

Písemná zkouška ze Základů matematiky 22. 1. 2009

Jméno a příjmení	1	2	3	4	5	Součet

Každý příklad je hodnocen 8 body. Pro odpovědi využijte volného prostoru mezi příklady, případně druhé strany papíru. Test trvá 90 minut.

1. Nechť $A = \{0, 1, 2\}$ je množina a $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ systém jejích podmnožin. Pro každou z následujících formulí nalezněte nějaký systém, který formulí splňuje, a nějaký systém (ten označte jako \mathcal{C}), který ji nesplňuje. Pokud takové \mathcal{B} nebo \mathcal{C} neexistuje, dokažte to.

a) $(\forall X \in \mathcal{B})(\exists Y \in \mathcal{B})(X \cap Y = \emptyset \wedge X \cup Y = A)$.

b) $(\forall X, Y \in \mathcal{B})(X \cap Y \in \mathcal{B})$.

c) $(\exists X \in \mathcal{B})(X \neq A \wedge (Y \subseteq X \leftrightarrow Y \in \mathcal{B}))$.

d) $(\forall x, y \in A)(x \neq y \rightarrow (\exists X \in \mathcal{B})(x \in X \wedge y \notin X))$.

2. Uvažujme množiny

$$X = \{\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x\rho y \Rightarrow x \leq y\},$$

$$Y = \{\rho \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x\rho y \Rightarrow y \leq x\}.$$

Najděte nějakou bijekci $f : X \rightarrow Y$, její inverzi $f^{-1} : Y \rightarrow X$ a ověřte, že jsou vzájemně inverzní.

3. Necht' $X, Y, Z, Y_i, i \in I$ jsou množiny. Dokažte, že platí:

a) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z),$

b) $X \cup \bigcap_{i \in I} Y_i = \bigcap_{i \in I} (X \cup Y_i).$

4. Načrtněte hasseovské diagramy všech vzájemně neizomorfních uspořádání na čtyřprvkové množině, kde každý minimální prvek je menší nebo roven každému maximálnímu prvku.

5. Popište multiplikativní tabulkou monoid $(\{0, 1\}^{\{0,1\}}, \circ)$, rozhodněte, zda je komutativní, a vysvětlete, proč se nejedná o grupu.