

M1130/01 – První zápočtová písemka

Příklad 1 (1 bod). Udejte příklad výroků A, B takových, aby výroky $\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg A)$, $\neg B \Rightarrow A$ byly nepravdivé.

Příklad 2 (1 bod). Označíme-li po řadě výroky

„Číslo 1075926 má ciferný součet dělitelný 6“,

„Číslo 1075926 není druhou mocninou prvočísla“,

„Číslo 1075926 je dělitelné 33“

jako A, B, C , запиште pomocí symbolů A, B, C a logických spojek výrok „Číslo 1075926 nemá ciferný součet dělitelný 6 tehdy a jenom tehdy, když je dělitelné 33 a je druhou mocninou prvočísla“.

Příklad 3 (2 body). Zjistěte, zda je výrok

$$((A \wedge B) \Rightarrow C) \iff (\neg A \vee (\neg B \vee C))$$

tautologií.

Příklad 4 (2 body). Utvořte negace výroků:

(a) Pokud vyhrají, tak to zaplatím ze svého.

(b) Pro libovolná kladná čísla x, y platí nerovnosti $x \leq x + y \leq x + 3y$.

Příklad 5 (2 body). Číslo $11^{k+1} + 12^{2k-1}$ je pro každé $k \in \mathbb{N}$ dělitelné číslem 133. Dokažte to.

Příklad 6 (2 body). Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 2$ platí

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Příklad 7 (2 body). Nalezněte $a, b \in \mathbb{R}$, pro která je

$$(1 - 3i)(1 + ai) - (a + 3i)(4 - i) + 2a + bi = 0.$$

Příklad 8 (1 bod). Spočtěte

$$\left| \left(\frac{i}{1+i} \right)^{100} \right|.$$

Příklad 9 (3 body). Vyřešte v \mathbb{C} rovnici $(2 - i)z^2 + (4 + 3i)z = 3 + 11i$.

Příklad 10 (2 body). Uveďte algebraický nebo goniometrický tvar čísla

$$\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta - i \sin \beta}.$$

Příklad 11 (1 bod). Stanovte $\sqrt[4]{-1}$.

Příklad 12 (1 bod). Zakreslete v Gaussově rovině množinu $z \in \mathbb{C}$ vyhovujících podmínce

$$|z - 1| = |z + i| = |z|.$$