# M1130/01 – Druhá zápočtová písemka

**Příklad 1 (2 body).** Rozložte v $\mathbb{R}$ polynomy
$$x^3 - x - 6; \qquad \left(x^2-3\right)^2 - 5\left(x^2-3\right) + 6.$$

*Výsledek.* Platí
$$x^3 - x - 6 = (x-2)\left(x^2+2x+3\right);$$
$$\left(x^2-3\right)^2 - 5\left(x^2-3\right) + 6 = \left(x-\sqrt{6}\right)\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right).$$

□

**Příklad 2 (2 body).** Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici
$$\frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$$
s parametrem $a \in \mathbb{R}$.

*Výsledek.* Pro $a = 0$ nemá rovnice žádné řešení; pro $a \neq 0$ má rovnice dva kořeny, a to
$$x_1 = \frac{1}{2}\,a, \qquad x_2 = -\frac{5}{6}\,a.$$

□

**Příklad 3 (3 body).** Určete všechny hodnoty parametru $m \in \mathbb{R}$, pro něž má rovnice
$$(m-2)x^2 - (3m+6)x + 6m = 0$$
(a) dva kladné (reálné) kořeny;
(b) dva záporné (reálné) kořeny;
(c) jeden kladný (reálný) a jeden záporný (reálný) kořen.

*Výsledek.* Výsledky jsou
(a) $m \in (2, 6)$;
(b) $m \in (-2/5, 0)$;
(c) $m \in (0, 2)$.

□

**Příklad 4 (1 bod).** Uveďte libovolnou kvadratickou rovnici s kořeny, které jsou čtyřnásobky kořenů rovnice $x^2 - 9x + 15 = 0$.

*Výsledek.* Každou takovou kvadratickou rovnici lze zapsat ve tvaru
$$a(x^2 - 36x + 240) = 0, \quad \text{kde } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
□

**Příklad 5 (2 body).** V $\mathbb{R}$ vyřešte
$$\frac{x}{x+4} + \frac{2}{3x-6} \geq 1.$$

*Výsledek.* Řešeními jsou právě $x \in (-\infty, -4) \cup \left(2, \frac{16}{5}\right\rangle$. □

**Příklad 6 (2 body).** Nalezněte $x \in \mathbb{R}$, pro která je
$$|\,10\,|\,x\,| + 8x - 6\,| \leq x + 3.$$

*Výsledek.* Uvedenou nerovnost splňují
$$x \in \{-3\} \cup \left\langle \frac{3}{19}, \frac{9}{17} \right\rangle.$$
□

**Příklad 7 (2 body).** Stanovte všechny hodnoty parametru $c \in \mathbb{R}$ tak, aby nerovnost
$$cx^2 + 2cx + c < -\frac{3}{4} - 3x$$
platila pro každé $x \in \mathbb{R}$.

*Výsledek.* Nerovnost je platná pro všechna $x \in \mathbb{R}$, právě když $c \in (-\infty, -1)$. □

**Příklad 8 (2 body).** Pro jaká $p \in \mathbb{R}$ má rovnice
$$(1-p)x^2 + 2x + 1 + p = 0$$
dva různé reálné kořeny $x_1, x_2$ s vlastností, že $|\,2x_1\,| > 1$, $|\,2x_2\,| > 1$?
Nápověda: Uvažte nejprve danou rovnici pro $x = -1$.

*Výsledek.* Množina hledaných $p$ je
$$(-\infty, -3) \cup \left(\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right) \setminus \{0, 1\}\right).$$
□

**Příklad 9 (2 body).** Např. vhodnou substitucí řešte v $\mathbb{R}$ rovnici
$$\sqrt{x^2 + x + 13} - \sqrt{x^2 + x + 4} = \sqrt{x^2 + x - 11}.$$

*Výsledek.* Rovnici vyhovuje $x = 3$, $x = -4$. $\square$

**Příklad 10 (2 body).** Určete $x \in \mathbb{R}$ z nerovnice

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+15} < 6.$$

*Výsledek.* Nerovnost (má smysl a) je splněna pro

$$x \in \langle -3, 1) \, .$$

$\square$