

MATEMATICKÁ ANALÝZA I, učitelské studium

13. ledna 2010

I. část

1. Znázorněte na číselné ose a zapište pomocí intervalů množiny řešení nerovnic:

$$a) \quad |5 - x| < 1, \quad b) \quad |1 + x| \geq 2.$$

2. Zdůvodněte, zda je funkce $y = \cos(x + \cos x)$ periodická či nikoliv.
3. Nakreslete (do samostatných obrázků) grafy funkcí

$$f: \quad y = |\log_2(1 + x)|, \quad g: \quad y = 2 \operatorname{arctg} |x|.$$

4. Určete definiční obor funkce

$$f: y = \ln \frac{x^3(x+1)^2}{x-5}.$$

5. Výrokem s kvantifikátory a nerovnostmi zapište, co znamená $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 3$.
6. Vypočtěte (pokud existují) limity těchto posloupností

$$a) \left\{ 2^{\frac{n}{n^2+1}} \right\}_{n=1}^{\infty}, \quad b) \left\{ \frac{2^n - 3^n}{3^n} \right\}_{n=1}^{\infty}.$$

7. Rozhodněte, zda funkce $f: y = |\operatorname{sgn} x|$ v bodě $x = 0$
a) má limitu, b) je spojitá, c) má ostrý lokální extrém.
8. Najděte rovnici přímky, jež je tečnou ke grafu funkce $f: y = 2\sqrt{2} \sin x$ s bodem dotyku $[\frac{\pi}{4}, ?]$. (Ve výsledku nesmí být neurčené hodnoty goniometrických funkcí.)
9. Napište tvar rozkladu na parciální zlomky (s neurčitými koeficienty, které nepočítejte) pro funkci

$$f: y = \frac{x^4}{(x^3 - 1)(x^2 - 1)}.$$

II. část

1. Derivujte funkci a výsledek upravte:

$$f: y = \frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

2. Vypočtěte

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}, \quad b) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x.$$

3. Vyšetřete průběh funkce

$$f: y = x e^{\frac{1}{x}}.$$