

# MATEMATICKÁ ANALÝZA 1, učitelské studium

27. ledna 2010

## I. část

1. Načrtněte grafy následujících funkcí (do samostatných obrázků)

$$f: y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x, \quad g: y = \frac{\pi}{2} + \arcsin 2x.$$

2. Rozhodněte, zda je funkce  $f: y = e^{\frac{1}{x}}$  na intervalu  $(-\infty, 0)$  ohraničená  
a) shora, b) zdola.
3. Udejte příklad posloupností  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  a  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ , jež splňují rovnosti  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 3$ . Pokud takový příklad neexistuje, vysvětlete proč.
4. K funkci  $f: y = \frac{3x+4}{2x+3}$  určete inverzní funkci  $g$  (předpis  $y = g(x)$ , definiční obor  $D(g)$  a obor hodnot  $H(g)$ ).
5. Výrokem s kvantifikátory a nerovnostmi zapište, co znamená  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ .
6. Přímo z definice vypočtěte derivaci funkce  $f: y = \frac{1}{x^2}$  v libovolném bodě  $x_0 \neq 0$ .
7. Rozhodněte, zda v bodě  $x = 1$  má funkce  $y = f(x)$  daná předpisem

$$y = \begin{cases} |x-1|, & \text{je-li } x \neq 1 \\ 1, & \text{je-li } x = 1 \end{cases}$$

- a) vlastní limitu, b) vlastní derivaci, c) lokální extrém.
8. Načrtněte příklad grafu funkce s definičním oborem  $D = (-1, 5)$ , která má na  $D$  absolutní maximum, ne však absolutní minimum, která je spojitá v každém bodě  $D$  s výjimkou bodů  $x = 0$ ,  $x = 1$  a  $x = 2$ , ve kterých má odstranitelnou nespojitost ( $x = 0$ ), jednostranné limity různých hodnot ( $x = 1$ ), jednu vlastní a jednu nevlastní jednostrannou limitu ( $x = 2$ ), a která má v bodě  $x = 3$  jednu kladnou a jednu zápornou jednostrannou derivaci.
9. Napište tvar rozkladu na parciální zlomky (s neurčitými koeficienty, které nepočítejte) pro funkci

$$f: y = \frac{x+1}{x^4+5x^2+6}.$$

## II. část

1. Derivujte funkce a výsledky pokud možno upravte

$$a) y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln \cos x, \quad b) y = x^{\ln x}.$$

2. Vypočtěte limity

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}, \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3}.$$

3. Vyšetřete průběh funkce

$$y = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x.$$