Kapitola 2

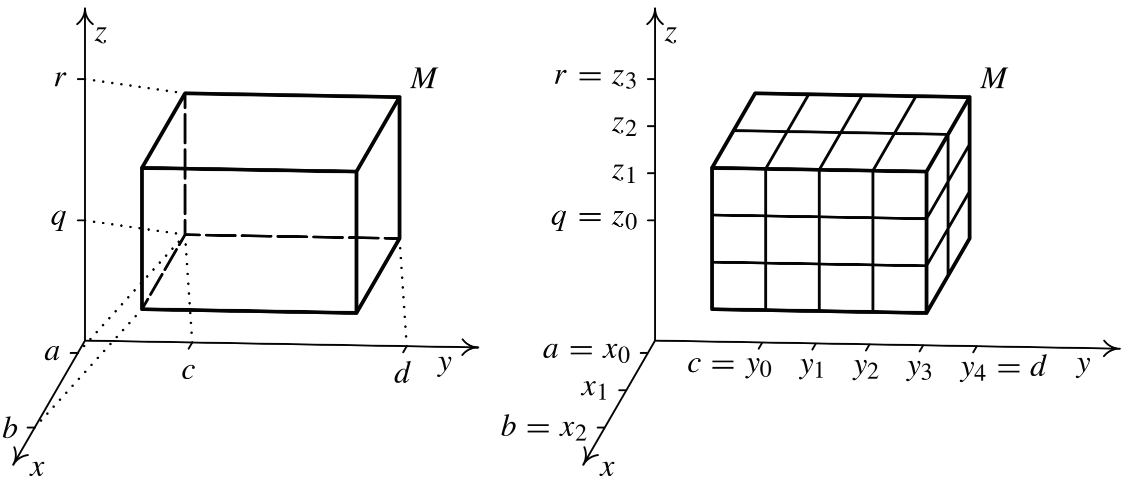
Integrály v prostorech obecné dimenze

V kapitole 1 byl zaveden integrál funkcí dvou proměnných. Naprosto obdobně je možné vybudovat integrál funkcí libovolného konečného počtu proměnných. Nejprve se definuje integrál na n-rozměrných intervalech, pomocí něho se zavedou měřitelné množiny a nakonec se definuje integrál na měřitelných množinách. Veškeré definice i výsledky předchozí kapitoly se snadno přenesou na případ obecného n, po technické stránce jsou důkazy všech tvrzení obdobné, jen zápisy jsou komplikovanější. Proto většinou jejich formulace ani důkazy nebudeme opakovat.

V následujících oddílech si všimneme nejprve případu $n = 3$. Ten je důležitý v aplikacích a navíc si při něm dokážeme ještě představit integrační obory. Potom se zmíníme o případu obecného n a nakonec krátce o případu $n = 1$, který bude zobecněním konstrukce jednorozměrného integrálu na intervalu, známé ze základního kurzu matematické analýzy.

2.1. Trojný integrál

Při definici trojného integrálu postupujeme zcela analogicky jako u integrálu dvojného. Nejprve definujeme trojný integrál funkce f ohraničené na nedegenerovaném trojrozměrném uzavřeném omezeném intervalu $M = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \times \langle q, r\rangle$. Takový interval budeme stručně nazývat *kvádrem*. Pro dělení D kvádru M používáme označení $D = D_x \times D_y \times D_z$, přičemž $D_x\colon a = x_0 < x_1 < < \cdots < x_m = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, $D_y\colon c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ je dělení intervalu $\langle c, d\rangle$ a $D_z\colon q = z_0 < z_1 < \cdots < z_p = r$ je dělení intervalu



a) b)

Obr. 2.1: Trojrozměrný interval M a jeho dělení

$\langle q, r\rangle$. Roviny $x = x_i$, $y = y_j$, $z = z_k$ $(i = 1, \dots, m-1;\ j = 1, \dots, n-1;\ k = 1, \dots, p-1)$ dělí kvádr M na menší kvádry zvané *dílky*, které se značí M_{ijk} (viz obr. 2.1); přitom $M_{ijk} = \langle x_{i-1}, x_i\rangle \times \langle y_{j-1}, y_j\rangle \times \langle z_{k-1}, z_k\rangle$. *Horní* a *dolní součty* pro danou funkci f jsou nyní tvaru

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} V_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}),$$
$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} v_{ijk}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1}),$$

kde

$$V_{ijk} = \sup\{f(x, y, z) : [x, y, z] \in M_{ijk}\},$$
$$v_{ijk} = \inf\{f(x, y, z) : [x, y, z] \in M_{ijk}\}.$$

Označíme-li $\mathrm{m}(M_{ijk}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$, pak lze psát

$$S(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} V_{ijk}\,\mathrm{m}(M_{ijk}),$$
$$s(D, f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} v_{ijk}\,\mathrm{m}(M_{ijk}),$$

přičemž $\mathrm{m}(M_{ijk})$ budeme nazývat *mírou* (*objemem*) kvádru M_{ijk}. *Dolní* a *horní integrál* funkce f přes kvádr M definujeme vztahy

$$\underline{\iiint\limits_M} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \sup\{s(D,f)\}$$

a

$$\overline{\iiint\limits_M} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \inf\{S(D,f)\}.$$

Jejich případnou společnou hodnotu nazýváme *trojný integrál* a značíme

$$\iiint\limits_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Všechny vlastnosti uvedené pro dvojný integrál na obdélníku platí analogicky i pro trojný integrál na kvádru. Vzorce Fubiniovy věty pro trojný integrál na kvádru $M = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle q,r\rangle$ mají pro různá pořadí proměnných integrace tvar

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle} \left(\overline{\int_q^r} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle q,r\rangle} \left(\overline{\int_c^d} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \\
&= \iint\limits_{\langle c,d\rangle\times\langle q,r\rangle} \left(\overline{\int_a^b} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\
&= \iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle} \left(\underline{\int_q^r} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\
&= \iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle q,r\rangle} \left(\underline{\int_c^d} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \\
&= \iint\limits_{\langle c,d\rangle\times\langle q,r\rangle} \left(\underline{\int_a^b} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

a také (při jiném „sdružení“ integračních proměnných)

$$\iiint\limits_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left(\overline{\iint\limits_{\langle c,d\rangle\times\langle q,r\rangle}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_c^d \Biggl(\overline{\iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle q,r\rangle}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \Biggr)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_q^r \Biggl(\overline{\iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Biggr)\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_a^b \Biggl(\underline{\iint\limits_{\langle c,d\rangle\times\langle q,r\rangle}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \Biggr)\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_c^d \Biggl(\underline{\iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle q,r\rangle}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z \Biggr)\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_q^r \Biggl(\underline{\iint\limits_{\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \Biggr)\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Zejména pro funkci f spojitou na kvádru $M = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle q,r\rangle$ platí

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_a^b \biggl\{ \int_c^d \biggl(\int_q^r f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \biggr)\,\mathrm{d}y \biggr\}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b \biggl\{ \int_q^r \biggl(\int_c^d f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \biggr)\,\mathrm{d}z \biggr\}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_c^d \biggl\{ \int_a^b \biggl(\int_q^r f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \biggr)\,\mathrm{d}x \biggr\}\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_c^d \biggl\{ \int_q^r \biggl(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \biggr)\,\mathrm{d}z \biggr\}\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_q^r \biggl\{ \int_a^b \biggl(\int_c^d f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \biggr)\,\mathrm{d}x \biggr\}\,\mathrm{d}z = \\
&= \int_q^r \biggl\{ \int_c^d \biggl(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \biggr)\,\mathrm{d}y \biggr\}\,\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Trojný integrál $\iiint\limits_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ se někdy označuje jako *integrál trojrozměrný*, zatímco integrály

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b \biggl\{ \int_c^d \biggl(\int_q^r f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \biggr)\,\mathrm{d}y \biggr\}\,\mathrm{d}x, \quad \int_a^b \biggl\{ \int_q^r \biggl(\int_c^d f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \biggr)\,\mathrm{d}z \biggr\}\,\mathrm{d}x, \\
&\int_c^d \biggl\{ \int_a^b \biggl(\int_q^r f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \biggr)\,\mathrm{d}x \biggr\}\,\mathrm{d}y, \quad \int_c^d \biggl\{ \int_q^r \biggl(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \biggr)\,\mathrm{d}z \biggr\}\,\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

a rovněž integrály

$$\int_q^r \left\{ \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y, z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}z, \qquad \int_q^r \left\{ \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z$$

jako *integrály trojnásobné*.

Poznámka 2.1. K označení trojnásobných integrálů se používá rovněž zápisů

$$\int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \mathrm{d}y \int_q^r f(x, y, z)\,\mathrm{d}z, \qquad \int_a^b \mathrm{d}x \int_r^q \mathrm{d}z \int_c^d f(x, y, z)\,\mathrm{d}y$$

a čtyř dalších analogických zápisů pro zbývající permutace proměnných x, y, z.

Příklad 2.2. Vypočtěte trojný integrál $I = \iiint\limits_M (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde integrační obor M je kvádr $\langle 1, 3\rangle \times \langle -1, 1\rangle \times \langle 0, 2\rangle$.

Řešení. Integrand je funkce spojitá na M (dokonce na $\mathbb{R}^3$). Podle Fubiniovy věty platí

$$I = \iiint\limits_M (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^3 \left\{ \int_{-1}^1 \left(\int_0^2 (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Pro přehlednost vypočteme postupně jednotlivé jednoduché integrály samostatně.

$$\int_0^2 (x + 2y - 3z)\,\mathrm{d}z = \left[xz + 2yz - \frac{3}{2} z^2 \right]_0^2 = 2x + 4y - 6.$$

Dále

$$\int_{-1}^1 (2x + 4y - 6)\,\mathrm{d}y = \left[2xy + 2y^2 - 6y \right]_{-1}^1 =$$
$$= (2x + 2 - 6) - (-2x + 2 + 6) = 4x - 12.$$

Celkově dostaneme

$$I = \int_1^3 (4x - 12)\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - 12x \right]_1^3 = (18 - 36) - (2 - 12) = -8.$$

Zvolili jsme pořadí integrace nejprve podle z, pak podle y a nakonec podle x. Jakékoliv jiné pořadí by dalo díky Fubiniově větě stejný výsledek a výpočet by byl přibližně stejně obtížný. ▲

Také charakteristická funkce množiny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ a její měřitelnost se definují analogicky jako v $\mathbb{R}^2$. Vzorec pro (Jordanovu) míru omezené množiny $M \subseteq \mathbb{R}^3$ je tvaru

$$\mathrm{m}(M) = \iiint\limits_R \chi_M(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde R je takový kvádr, že $M \subseteq R$ a

$$\chi_M(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{pro } [x, y, z] \in M, \\ 0 & \text{pro } [x, y, z] \notin M \end{cases}$$

je charakteristická funkce množiny M. Někdy, abychom odlišili míru v $\mathbb{R}^3$ od měr v prostorech jiných dimenzí, píšeme $\mathrm{m}_3(M)$ místo $\mathrm{m}(M)$. Míra v $\mathbb{R}^3$ má stejné vlastnosti jako v $\mathbb{R}^2$. Je-li $z = f(x, y)$ spojitá funkce na kompaktní množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$, pak míra grafu této funkce v $\mathbb{R}^3$ je rovna 0. Analogické tvrzení platí pro grafy funkcí $y = f(x, z)$, $x = f(y, z)$ spojitých na kompaktních množinách.

Trojný integrál funkce f ohraničené na měřitelné množině $M \subseteq \mathbb{R}^3$ definujeme rovností

$$\iiint\limits_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_R (\chi_M f)(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

kde $R \supseteq M$ je libovolný kvádr a funkce $\chi_M f$ je dána vztahem

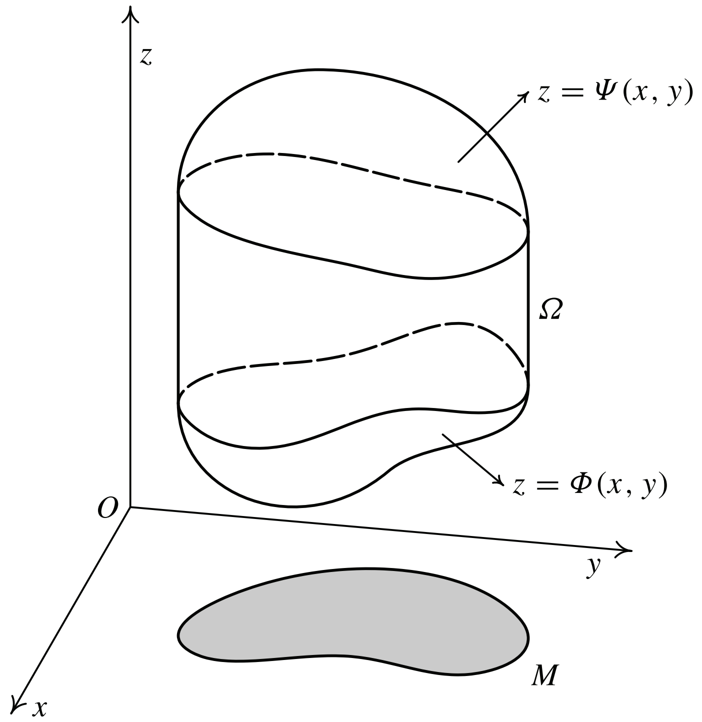
$$(\chi_M f)(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{pro každé } [x, y, z] \in M, \\ 0 & \text{pro každé } [x, y, z] \notin M. \end{cases}$$

Trojný integrál má stejné vlastnosti jako integrál dvojný. Elementární množina vzhledem k rovině xy je definována takto:

Definice 2.3. Buď M elementární množina v $\mathbb{R}^2$ (vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y) a nechť $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ jsou spojité funkce na M takové, že $\Phi(x, y) \leqq \Psi(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$. Množinu

$$\Omega = \left\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, \Phi(x, y) \leqq z \leqq \Psi(x, y)\right\}$$

nazýváme *elementární množinou vzhledem k rovině xy* v $\mathbb{R}^3$ (viz obr. 2.2). Analogicky definujeme *elementární množinu vzhledem k rovině xz*, resp. *vzhledem k rovině yz* v $\mathbb{R}^3$.
Elementární množinou v $\mathbb{R}^3$ rozumíme elementární množinu vzhledem k některé z rovin xy, resp. xz, resp. yz.



Obr. 2.2: Elementární množina Ω v trojrozměrném prostoru

Podobně jako v $\mathbb{R}^2$ platí, že elementární množina v $\mathbb{R}^3$ je měřitelná a že funkce spojitá na elementární množině v $\mathbb{R}^3$ je integrovatelná. Analogicky jako v $\mathbb{R}^2$ platí věta:

Věta 2.4. *Buď Ω elementární množina v $\mathbb{R}^3$ vzhledem k rovině xy, tj. $\Omega = \big\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : [x, y] \in M, \Phi(x, y) \leqq z \leqq \Psi(x, y)\big\}$, kde Φ, Ψ jsou funkce spojité na M takové, že $\Phi(x, y) \leqq \Psi(x, y)$ pro každé $[x, y] \in M$ a M je elementární množina v $\mathbb{R}^2$. Je-li funkce f spojitá na Ω, pak*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{M} \left(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{2.1}$$

Předpokládáme-li např., že M je elementární množina vzhledem k ose x, tj. $M = \big\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : a \leqq x \leqq b, \varphi(x) \leqq y \leqq \psi(x)\big\}$, přičemž φ, ψ jsou funkce spojité na $\langle a, b\rangle$, takové, že $\varphi(x) \leqq \psi(x)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x. \tag{2.2}$$

Poznámka 2.5.

a) Analogicky platí další dvě tvrzení, ve kterých vzorec (2.1) nabývá tvaru

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\widetilde{M}} \left(\int_{\widetilde{\Phi}(x,z)}^{\widetilde{\Psi}(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\widehat{M}} \left(\int_{\widehat{\Phi}(y,z)}^{\widehat{\Psi}(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

b) Záměnou pořadí proměnných v (2.2) dostáváme dalších pět vzorců:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\psi_1(x)} \left(\int_{\Phi_1(x,z)}^{\Psi_1(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}x,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \left\{ \int_{\varphi_2(y)}^{\psi_2(y)} \left(\int_{\Phi_2(x,y)}^{\Psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_c^d \left\{ \int_{\varphi_3(y)}^{\psi_3(y)} \left(\int_{\Phi_3(y,z)}^{\Psi_3(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}y,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_q^r \left\{ \int_{\varphi_4(z)}^{\psi_4(z)} \left(\int_{\Phi_4(x,z)}^{\Psi_4(x,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}z,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_q^r \left\{ \int_{\varphi_5(z)}^{\psi_5(z)} \left(\int_{\Phi_5(y,z)}^{\Psi_5(y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}z.$$

c) Integrál $\iiint\limits_{M} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ se nazývá *trojný integrál*, integrály na pravé straně rovnosti (2.2) a na pravých stranách posledních pěti rovností se nazývají *trojnásobné integrály*.

d) Tvrzení první části věty 2.4 a tvrzení části a) poznámky 2.5 zůstane v platnosti, i když bude funkce f integrovatelná (tj. ne nutně spojitá) na množině Ω. Ve vnitřních integrálech je však třeba doplnit znaky pro horní resp. dolní jednoduchý integrál.

Příklad 2.6. Vypočtěte $\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je množina omezená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

a) b)

Obr. 2.3

Řešení. Všechny čtyři plochy uvedené v zadání jsou roviny, přičemž první tři jsou souřadnicové roviny. Integrační obor je čtyřstěn, který je znázorněn na obr. 2.3 a). Jeho průmět do roviny xy je trojúhelník z obr. 2.3 b).

Zapíšeme-li Ω jako elementární množinu vzhledem k rovině xy, máme

$$\Omega: \quad \begin{aligned} &0 \leqq x \leqq 1, \\ &0 \leqq y \leqq 1 - x, \\ &0 \leqq z \leqq 1 - x - y. \end{aligned}$$

Integrovaná funkce je spojitá na Ω (dokonce na $\mathbb{R}^3$). Užitím vzorce (2.2) dostáváme

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} x^2 \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[x^2 z \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (x^2 - x^3 - x^2 y) \,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y - x^3 y - \frac{1}{2} x^2 y^2 \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - x^3 - x^3 + x^4 - \frac{1}{2} x^2 (1-x)^2 \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 - 2x^3 + x^4 - \frac{1}{2} x^4 + x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^4 - x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6 - 15 + 10}{60} = \frac{1}{60}.$$

▲

2.2. Další příklady na výpočet trojného integrálu Fubiniovou větou

Příklad 2.7. Vypočtěte $I = \iiint\limits_V (x - y + 2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina V je dána nerovnostmi:

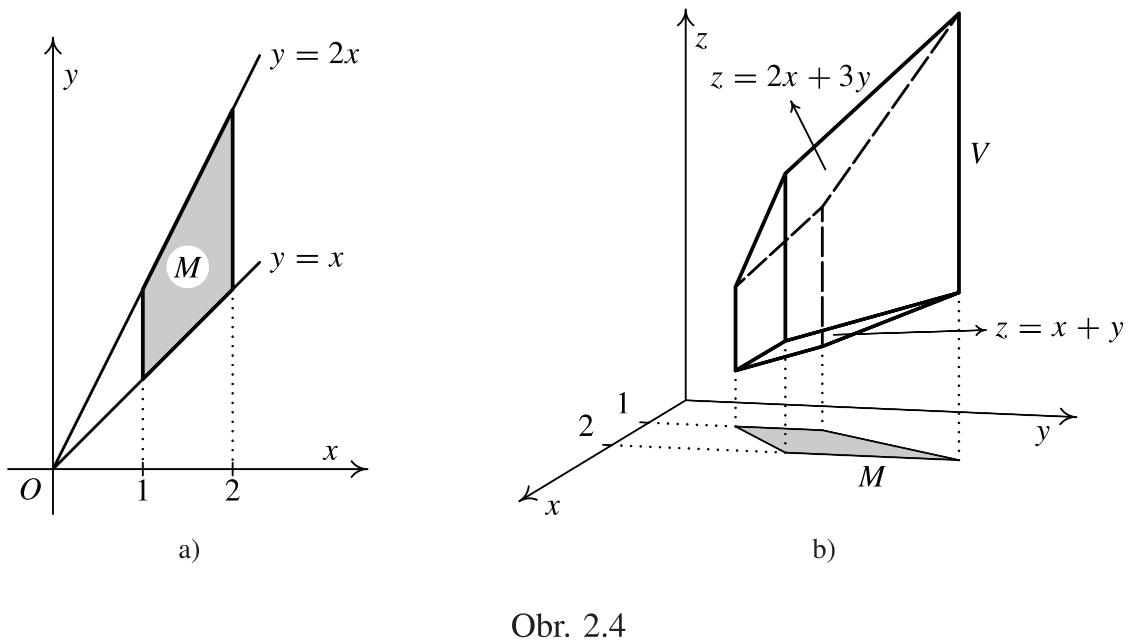
$$V: \quad \begin{aligned} 1 \leqq x &\leqq 2, \\ x \leqq y &\leqq 2x, \\ x + y \leqq z &\leqq 2x + 3y. \end{aligned}$$

Řešení. Integračním oborem je rovnoběžnostěn znázorněný na obr. 2.4 a integrand je funkce, která je na něm spojitá. Podle Fubiniovy věty bude:

$$I = \iiint\limits_V (x - y + 2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_1^2 \left\{ \int_x^{2x} \left(\int_{x+y}^{2x+3y} (x - y + 2z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Vypočteme postupně jednotlivé integrály:

$$\begin{aligned} \int_{x+y}^{2x+3y} (x - y + 2z)\,\mathrm{d}z &= \left[(x - y)z + z^2\right]_{x+y}^{2x+3y} = \\ &= \left((x - y)(2x + 3y) + (2x + 3y)^2\right) - \left((x - y)(x + y) + (x + y)^2\right) = \\ &= 4x^2 + 11xy + 6y^2, \end{aligned}$$



Obr. 2.4

$$\int_x^{2x} (4x^2 + 11xy + 6y^2)\,\mathrm{d}y = \left[4x^2y + \frac{11}{2}\,xy^2 + 2y^3\right]_x^{2x} =$$
$$= \left(4x^2 \cdot 2x + \frac{11}{2}\,x(2x)^2 + 2(2x)^3\right) - \left(4x^2 \cdot x + \frac{11}{2}\,x \cdot x^2 + 2x^3\right) =$$
$$= \frac{69}{2}\,x^3,$$

takže celkový výsledek bude

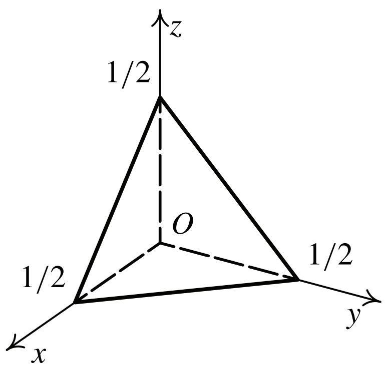
$$I = \int_1^2 \frac{69}{2}\,x^3\,\mathrm{d}x = \frac{69}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{69}{8}\,(16-1) = \frac{1035}{8}\,.$$

▲

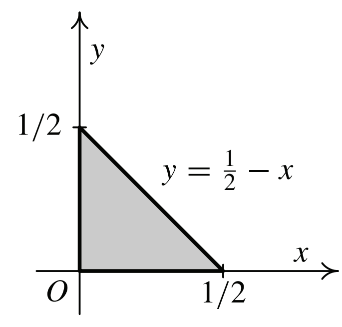
Příklad 2.8. Vypočtěte $I = \iiint\limits_M \dfrac{1}{1-x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina M je omezena plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1/2$.

Řešení. Integračním oborem je čtyřstěn, který je znázorněn na obr. 2.5 a). Jeho průmět do roviny xy je trojúhelník z obr. 2.5 b). Množinu M, která je elementární vzhledem k rovině xy, popíšeme následovně:

$$\begin{aligned} &0 \leqq x \leqq 1/2, \\ M\colon\ &0 \leqq y \leqq 1/2 - x, \\ &0 \leqq z \leqq 1/2 - x - y. \end{aligned}$$



a)



b)

Obr. 2.5

Integrand $1/(1-x-y)$ je funkce spojitá na množině M, neboť $1-x-y \geqq 1/2$ pro každé $[x, y, z] \in M$. Podle Fubiniovy věty platí:

$$I = \iiint\limits_V \frac{1}{1-x-y} \,dx\,dy\,dz =$$
$$= \int_0^{1/2} \left\{ \int_0^{1/2-x} \left(\int_0^{1/2-x-y} \frac{1}{1-x-y} \,dz \right) dy \right\} dx.$$

Postupně vypočítáme:

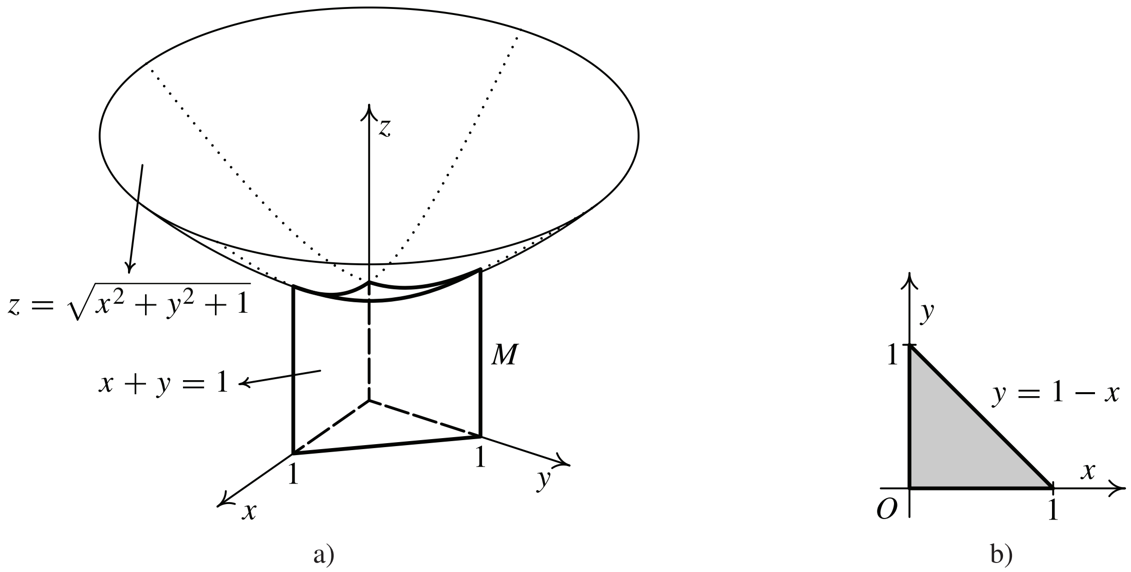
$$\int_0^{1/2-x-y} \frac{1}{1-x-y} \,dz = \frac{1}{1-x-y} \left[z\right]_0^{1/2-x-y} = \frac{1/2-x-y}{1-x-y} =$$
$$= \frac{1-x-y-1/2}{1-x-y} = 1 + \frac{1}{2(x+y-1)},$$

$$\int_0^{1/2-x} \left(1 + \frac{1}{2(x+y-1)}\right) dy = \left[y + \frac{1}{2} \ln|x+y-1|\right]_0^{1/2-x} =$$
$$= \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} \ln\left|x + \frac{1}{2} - x - 1\right| - \frac{1}{2} \ln|x-1| =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - x - \frac{1}{2} \ln(1-x).$$

Při úpravě jsme využili toho, že pro $0 \leqq x \leqq 1/2$ je $x-1 < 0$, takže $|x-1| = 1-x$. Celkově tedy dostaneme s použitím metody per partes (všimněte si drobného triku, když místo očekávaného $v = x$ zvolíme $v = x-1$, čímž se následující integrál $\int u'v \,dx$ značně zjednoduší):

$$I = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - x - \frac{1}{2} \ln(1-x)\right) dx = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 - x\right) dx -$$
$$- \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \ln(1-x) \,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(1-x) & u' = \frac{1}{x-1} \\ v' = 1 & v = x-1 \end{array} \right| =$$
$$= \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2\right) x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{1/2} - \frac{1}{2} \left[(x-1) \ln(1-x)\right]_0^{1/2} + \frac{1}{2} \int_0^{1/2} dx =$$
$$= \frac{1}{4} (1 - \ln 2) - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{2} \left[x\right]_0^{1/2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \ln 2.$$ ▲

Příklad 2.9. Vypočtěte $\iiint\limits_M 2z \,dx\,dy\,dz$, kde množina M je část prvního oktantu $x, y, z \geqq 0$ omezená plochami $x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $x + y = 1$.



Obr. 2.6

Řešení. První plochou je dvojdílný rotační hyperboloid s osou rotace v ose z. Druhou plochou je rovina, která je rovnoběžná s osou z. Z hyperboloidu nás tedy bude zajímat jen jeho horní část ležící v prvním oktantu. Integrační obor M je znázorněn na obr. 2.6 a). Jeho průmětem do roviny xy je trojúhelník z obr. 2.6 b). Integrační obor je tedy elementární množinou vzhledem k rovině xy. Z rovnice hyperboloidu určíme, že $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Množinu M popíšeme následovně:

$$M\colon\ \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 \leqq y \leqq 1 - x, \\ 0 \leqq z \leqq \sqrt{x^2 + y^2 + 1}. \end{array}$$

Podle Fubiniovy věty bude:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_M 2z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} 2z \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[z^2 \right]_0^{\sqrt{x^2+y^2+1}} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (x^2 + y^2 + 1) \,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3}\, y^3 + y \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{1}{3}\,(1-x)^3 + 1 - x \right) \mathrm{d}x =
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - 2x + \frac{4}{3}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - x^2 + \frac{4}{3}x\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

▲

Poznámka 2.10. Podobně jako u dvojného integrálu (viz poznámka 1.64), v případě, že integrační obor je trojrozměrný interval $J = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \times \langle q, r\rangle$ a integrand má tvar součinu $g(x)h(y)k(z)$, kde g je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, h je funkce spojitá na intervalu $\langle c, d\rangle$ a k je funkce spojitá na intervalu $\langle q, r\rangle$, lze výpočet podle Fubiniovy věty zjednodušit a výrazně urychlit:

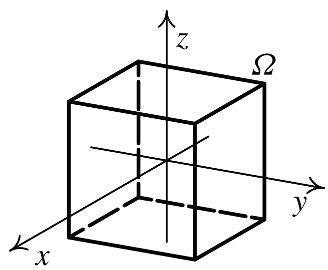
$$\iiint\limits_J g(x)h(y)k(z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{\int_c^d \left(\int_q^r g(x)h(y)k(z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right\} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \left\{\int_c^d g(x)h(y)\left(\int_q^r k(z)\,\mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y\right\} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b \left\{g(x)\cdot\left(\int_q^r k(z)\,\mathrm{d}z\right)\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right\} \mathrm{d}x =$$
$$= \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y \cdot \int_q^r k(z)\,\mathrm{d}z. \tag{2.3}$$

Integrály $\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y$ a $\int_q^r k(z)\,\mathrm{d}z$ jsou totiž konstanty, které lze z integrálů vytknout.

Příklad 2.11. Vypočtěte integrál $\iiint\limits_{\Omega} (1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina Ω je omezena plochami $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$, $y = -1$, $z = 1$, $z = -1$.

Řešení. Integrační obor je krychle omezená šesti rovinami, kolmými k souřadnicovým osám, která je znázorněná na obr. 2.7. Jde tedy o trojrozměrný interval $\langle -1, 1\rangle^3$, tj.

$$\Omega\colon \begin{array}{l} -1 \leqq x \leqq 1, \\ -1 \leqq y \leqq 1, \\ -1 \leqq z \leqq 1. \end{array}$$



Obr. 2.7

Vzhledem ke tvaru integrandu, který je na Ω spojitý, můžeme při použití Fubiniovy věty výpočet zjednodušit pomocí vzorce (2.3) (označíme $g(x) = 1 - x^2$, $h(y) = \sqrt{1 - y^2}$ a $k(z) = 1$). Vyjde (na druhý integrál použijeme substituční metodu):

$$\iiint\limits_{\Omega} (1 - x^2)\sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - y^2}\,\mathrm{d}y \cdot \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \sin u \\ \mathrm{d}y = \cos u\,\mathrm{d}u \\ -1 \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2},\ 1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

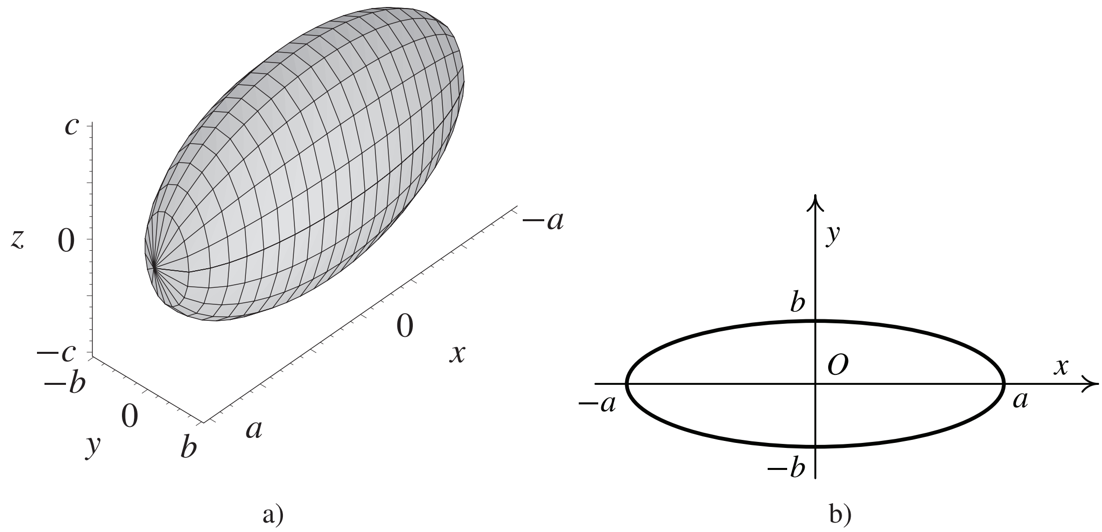
$$= \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^{1} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 u} \cdot \cos u\,\mathrm{d}u \cdot \big[z\big]_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)\,\mathrm{d}u =$$

$$= \frac{4}{3} \left[u + \frac{1}{2}\sin 2u \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}\pi.$$

Při úpravách jsme využili, že $\sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{\cos^2 u} = |\cos u| = \cos u$, protože $\cos u \geqq 0$ pro každé $u \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$. ▲

Příklad 2.12. Vypočtěte $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $\Omega : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1$, $a, b, c > 0$.



Obr. 2.8

Řešení. Integrační obor Ω je tvořen obecným elipsoidem (včetně vnitřku), jehož osy jsou umístěny v souřadnicových osách. Je znázorněn na obr. 2.8 a). Jeho průmětem do roviny xy je elipsa (včetně vnitřku) z obr. 2.8 b) daná nerovností $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leqq 1$, kterou dostaneme jako průsečnici daného elipsoidu a roviny o rovnici $z = 0$. Jde tedy o elementární množinu vzhledem k rovině xy, kterou lze popsat následovně:

$$\Omega: \quad \begin{aligned} -a &\leqq x \leqq a, \\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} &\leqq y \leqq b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \\ -c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} &\leqq z \leqq c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}. \end{aligned}$$

Integrand je roven konstantě jedna, takže integrál vyjadřuje objem $\mathrm{m}_3(\Omega)$ množiny Ω, tj. obecného elipsoidu. Podle Fubiniovy věty dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathrm{m}_3(\Omega) &= \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-a}^{a}\left\{\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-a}^{a}\left\{\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \Big[z\Big]_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} \mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \\ &= \int_{-a}^{a}\left\{\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Nyní určíme samostatně vnitřní integrál. Při výpočtu rozlišíme dva případy. Pro pevné x, kde $-a < x < a$, je $1 - x^2/a^2 > 0$. Užitím substituce tedy vyjde:

$$\begin{aligned} &\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{l} y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\sin t \\ \mathrm{d}y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\cos t\,\mathrm{d}t \\ -b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \rightsquigarrow -\frac{\pi}{2},\ b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= 2c\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\sin^2 t}\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\cos t\,\mathrm{d}t = \\ &= 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \end{aligned}$$

$$= 2bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Přitom pro $t \in \langle -\pi/2, \pi/2\rangle$ je $\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$.
Pro $x = \pm a$ je $1 - x^2/a^2 = 0$, takže v tomto případě má vnitřní integrál tvar

$$\int_0^0 2c\sqrt{-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Tedy pro libovolné x, kde $-a \leqq x \leqq a$, platí:

$$\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 2c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Celkově tudíž dostaneme:

$$\mathrm{m}_3(\Omega) = \int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x = \pi bc\left[x-\frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Ve speciálním případě $a = b = c = r$ dostáváme známý vzorec pro objem koule.

Předchozí výpočet byl poměrně komplikovaný. V kapitole 3 si ukážeme, jak lze vypočítat objem obecného elipsoidu podstatně snáze a rychleji (příklad 3.27).

▲

2.3. *n*-rozměrný integrál

Zcela analogicky, jako tomu bylo u dvojných a trojných integrálů, lze definovat integrály přes množiny v prostorech libovolné dimenze n, kde $n \geqq 2$, a vyšetřovat jejich vlastnosti. V této souvislosti mluvíme o *n-rozměrných integrálech*. K jejich označení používáme zápisu

$$\int_M \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

přičemž f je funkce integrovatelná (integrace schopná) na měřitelné množině M v $\mathbb{R}^n$. Při označení $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$, lze n-rozměrný integrál psát rovněž ve tvaru

$$\int_M \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \quad \text{nebo} \quad \int_M \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Míru měřitelné množiny M v prostoru $\mathbb{R}^n$ značíme $\mathrm{m}(M)$ nebo $\mathrm{m}_n(M)$. Je-li M speciálně n-rozměrný uzavřený omezený nedegenerovaný interval v $\mathbb{R}^n$, značí symboly

$$\underline{\int \cdots \int}_M f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

$$\overline{\int \cdots \int}_M f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$$

dolní resp. *horní integrál* ohraničené funkce f na intervalu M. Fubiniovu větu lze zformulovat například následujícím způsobem:

Věta 2.13 (Fubini). *Je-li funkce f integrace schopna na n-rozměrném intervalu $M = M_1 \times M_2$, kde M_1 je uzavřený omezený nedegenerovaný interval v $\mathbb{R}^m$, přičemž $m < n$, a M_2 je uzavřený omezený nedegenerovaný interval v $\mathbb{R}^{n-m}$, pak obě funkce*

$$\underline{\int \cdots \int}_{M_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2} \cdots \mathrm{d}x_n,$$

$$\overline{\int \cdots \int}_{M_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2} \cdots \mathrm{d}x_n$$

jsou integrovatelné na M_1 a platí

$$\int_M \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{M_1} \cdots \int \left(\underline{\int \cdots \int}_{M_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2} \cdots \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m =$$

$$= \int_{M_1} \cdots \int \left(\overline{\int \cdots \int}_{M_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_{m+1}\,\mathrm{d}x_{m+2} \cdots \mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m.$$

Platí také modifikace poslední věty: za předpokladů uvedených ve větě 2.13 jsou rovněž funkce

$$\underline{\int \cdots \int}_{M_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m,$$

$$\overline{\int \cdots \int}_{M_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m$$

integrovatelné na množině M_2 a platí

$$\int \cdots \int_M f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int \cdots \int_{M_2} \left(\underline{\int \cdots \int}_{M_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m \right) \mathrm{d}x_{m+1}\, \mathrm{d}x_{m+2} \cdots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int \cdots \int_{M_2} \left(\overline{\int \cdots \int}_{M_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_m \right) \mathrm{d}x_{m+1}\, \mathrm{d}x_{m+2} \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Pro funkci f spojitou na n-rozměrném intervalu $M = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle$ dostáváme

$$\int \cdots \int_M f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \mathrm{d}x_n \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1. \tag{2.4}$$

Integrál na pravé straně rovnosti (2.4) se nazývá *n-násobný integrál*. Analogické vzorce lze obdržet záměnou pořadí proměnných.

Pojem elementární množiny v $\mathbb{R}^n$ pro $n > 3$ zavádíme induktivně: *elementární množinou* v $\mathbb{R}^n$ vzhledem k nadrovině $x_1 x_2 \ldots x_{n-1}$ (tj. nadrovině o rovnici $x_n = 0$) rozumíme množinu tvaru

$$\Omega = \{[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}] \in M,$$
$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \leqq x_n \leqq \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\},$$

kde M je elementární množina v $\mathbb{R}^{n-1}$ a Φ, Ψ jsou funkce $n - 1$ proměnných spojité na množině M. Pro funkci f spojitou na této elementární množině Ω

platí

$$\int_{\Omega}\!\cdots\!\int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_{M}\!\cdots\!\int \left(\int_{\Phi(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\Psi(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_{n-1}. \tag{2.5}$$

Příklad 2.14. Vypočítejte čtyřrozměrný integrál

$$\iiiint_M (1-x-y-z-u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u,$$

kde $M = \left\{[x, y, z, u] \in \mathbb{R}^4 : x+y+z+u \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ u \geqq 0\right\}$.

Řešení. Funkce $f(x, y, z, u) = 1-x-y-z-u$ je spojitá na množině M. Přitom množina M je elementární množina, kterou lze vymezit nerovnostmi

$$M\colon \begin{array}{l} 0 \leqq x \leqq 1, \\ 0 \leqq y \leqq 1-x, \\ 0 \leqq z \leqq 1-x-y, \\ 0 \leqq u \leqq 1-x-y-z. \end{array}$$

Označíme-li $M_1 = \{[x, y, z] : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x,\ 0 \leqq z \leqq 1-x-y\}$, $M_2 = \{[x, y] : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1-x\}$, můžeme v souladu se vzorcem (2.5) psát

$$\iiiint_M (1-x-y-z-u)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u =$$

$$= \iiint_{M_1} \left(\int_0^{1-x-y-z} (1-x-y-z-u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iint_{M_2} \left[\int_0^{1-x-y} \left(\int_0^{1-x-y-z} (1-x-y-z-u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left\{\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \left(\int_0^{1-x-y-z} (1-x-y-z-u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \left[(1-x-y-z)u - \frac{u^2}{2} \right]_0^{1-x-y-z} \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} \frac{1}{2}(1-x-y-z)^2 \,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[-\frac{(1-x-y-z)^3}{3} \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (1-x-y)^3 \,\mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^4}{4} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{24} \int_0^1 (1-x)^4 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{24} \left[-\frac{(1-x)^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{120}.$$

▲

Příklad 2.15. Pro dané přirozené n vypočtěte

$$\int \cdots \int_M \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \right) \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n,$$

kde $M = \left\{ [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathbb{R}^n : 0 \leqq x_j \leqq 1 \ (j = 1, \ldots, n) \right\}$.

Řešení. Ukážeme si dva způsoby výpočtu tohoto integrálu ze spojité funkce přes n-rozměrnou krychli $\langle 0, 1 \rangle^n$.

Užitím vzorce (2.4) dostáváme

$$\int \cdots \int_M (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \,\mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\cdots \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \,\mathrm{d}x_n \right) \mathrm{d}x_{n-1} \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\cdots \left(\int_0^1 \left[(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2) x_n + \frac{x_n^3}{3} \right]_0^1 \mathrm{d}x_{n-1} \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\cdots \left(\int_0^1 \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}x_{n-1} \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\cdots \left(\int_0^1 \left[\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + \frac{1}{3} \right) x_{n-1} + \right. \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. \left. + \frac{x_{n-1}^3}{3} \right]_0^1 \mathrm{d}x_{n-2} \right) \cdots \right) \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 =$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_0^1 \Big(\cdots \Big(\int_0^1 \Big(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \Big) \mathrm{d}x_{n-2} \Big) \cdots \Big) \mathrm{d}x_2 \Big) \mathrm{d}x_1 =$$
$$= \cdots =$$
$$= \int_0^1 \Big(\frac{n-1}{3} + x_1^2 \Big) \mathrm{d}x_1 = \Big[\frac{n-1}{3} x_1 + \frac{x_1^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{n}{3}.$$

Druhou možností je využití symetrie integračního oboru a integrandu. Zřejmě

$$\int \cdots \int_M (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = n \int \cdots \int_M x_1^2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Analogicky jako v poznámkách 1.64 a 2.10 platí

$$\int \cdots \int_M x_1^2\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \int_0^1 x_1^2\, \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 \cdots \int_0^1 \mathrm{d}x_n = \Big[\frac{x_1^3}{3} \Big]_0^1 = \frac{1}{3},$$

což dává celkově stejný výsledek. ▲

2.4. Jednorozměrný integrál

Postupujeme-li analogickým způsobem u integrálu v $\mathbb{R}^1$, pak definici integrálu přes uzavřený omezený nedegenerovaný interval odpovídá integrál přes jednorozměrný kompaktní interval $\langle a, b \rangle$, což je zřejmě Riemannův určitý integrál definovaný v základním kurzu integrálního počtu. Definujeme-li charakteristickou funkci množiny $M \subseteq \mathbb{R}^1$ analogicky jako dříve, pak vzorec pro míru měřitelné množiny je

$$\mathrm{m}(M) = \int_a^b \chi_M(x)\, \mathrm{d}x,$$

kde $\langle a, b \rangle$ je takový interval, že $\langle a, b \rangle \supseteq M$. Míru v $\mathbb{R}^1$ značíme také $\mathrm{m}_1(M)$. *Jednoduchý* (*jednorozměrný*) *integrál* na měřitelné množině M definujeme rovností

$$\int_M f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b (\chi_M f)(x)\, \mathrm{d}x,$$

kde $\langle a, b \rangle \supseteq M$ a funkce $\chi_M f$ je dána vztahem

$$(\chi_M f)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pro každé } x \in M, \\ 0 & \text{pro každé } x \notin M. \end{cases}$$

Jednorozměrný integrál má stejné základní vlastnosti jako integrál dvojrozměrný či trojrozměrný a je zobecněním Riemannova určitého integrálu s mezemi a, b na integrál přes obecnější množinu než je interval $\langle a, b\rangle$.

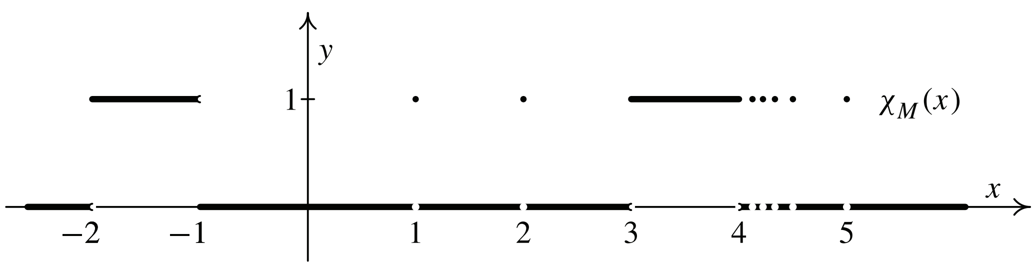
Příklad 2.16. Vypočítejte integrál $\int_M x\,\mathrm{d}x$, kde $M = M_1 \cup M_2 \cup I_1 \cup I_2$, přičemž $M_1 = \{1, 2\}$, $M_2 = \{4 + 1/k : k \in \mathbb{N}\}$, $I_1 = \langle -2, -1)$, $I_2 = \langle 3, 4\rangle$.

Řešení. Charakteristická funkce množiny M je znázorněna na obr. 2.9. Množina M_1 je konečná, takže $\mathrm{m}_1(M_1) = 0$ (viz cvičení 18 ke kapitole 1). Pro každé $\varepsilon > 0$ lze psát $M_2 = M_2^* \cup M_2^{**}$, kde $M_2^* = \{4 + 1/k : k \in \mathbb{N},\ k > \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1\}$, $M_2^{**} = \{4+1/k : k = 1, 2, \dots, \lfloor 1/\varepsilon\rfloor + 1\}$, přičemž $\lfloor 1/\varepsilon \rfloor$ značí celou část čísla $1/\varepsilon$ (obecně pro $a \in \mathbb{R}$ platí $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leqq a$). Pak $\chi_{M_2} = \chi_{M_2^*} + \chi_{M_2^{**}}$, protože $M_2^* \cap M_2^{**} = \emptyset$.

Jelikož M_2^{**} je konečná, platí $\int_{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}^5 \chi_{M_2^{**}}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{m}_1(M_2^{**}) = 0$ pro každé $\varepsilon > 0$. Dále pro každé $\varepsilon > 0$ máme $0 \leqq \overline{\int_4^{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}} \chi_{M_2^*}(x)\,\mathrm{d}x \leqq$ $\leqq \mathrm{m}_1\big(\big\langle 4, 4 + \frac{1}{1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor}\big\rangle\big) = \frac{1}{1+\lfloor 1/\varepsilon \rfloor} < \varepsilon$. Podle poznámky 1) na str. 16 před Fubiniovou větou (viz též cvičení 2 ke kapitole 1) dostáváme

$$
\begin{aligned}
0 \leqq \overline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x &= \overline{\int_4^{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \overline{\int_4^{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}} \chi_{M_2^*}(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}^5} \chi_{M_2^{**}}(x)\,\mathrm{d}x = \\
&= \overline{\int_4^{4+1/(1+\lfloor 1/\varepsilon\rfloor)}} \chi_{M_2^*}(x)\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

tedy $0 \leqq \overline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$. To znamená, že $\overline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Jelikož funkce χ_{M_2} je nezáporná, platí $0 \leqq \underline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x \leqq 0$,



Obr. 2.9: Charakteristická funkce množiny M

takže $\underline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_4^5} \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Tudíž integrál $\int_4^5 \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je roven nule. Množina M_2 je proto měřitelná a $\mathrm{m}_1(M_2) = \int_4^5 \chi_{M_2}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Protože funkce $f(x) = x$ je ohraničená na množinách M_1, M_2 míry 0, platí $\int_{M_1} x\,\mathrm{d}x = 0$, $\int_{M_2} x\,\mathrm{d}x = 0$. Užitím aditivity integrálu vzhledem k integračnímu oboru dostáváme

$$\int_M x\,\mathrm{d}x = \int_{M_1} x\,\mathrm{d}x + \int_{M_2} x\,\mathrm{d}x + \int_{I_1} x\,\mathrm{d}x + \int_{I_2} x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{I_1} x\,\mathrm{d}x + \int_{I_2} x\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} x\,\mathrm{d}x + \int_3^4 x\,\mathrm{d}x =$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \frac{1}{2} - 2 + 8 - \frac{9}{2} = 2.$$

▲

Poznámka 2.17. Pro úplnost si všimněme v předchozím příkladu podrobněji integrálu $\int_{I_1} x\,\mathrm{d}x$, jehož integračním oborem je *polootevřený* interval $I_1 = \langle -2, -1)$. Označme $I = \langle -2, -1\rangle$. Podle definice integrálu přes obecnou měřitelnou množinu pak je

$$\int_{I_1} x\,\mathrm{d}x = \int_I (\chi_{I_1} x)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} (\chi_{I_1} x)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} x\,\mathrm{d}x,$$

protože funkce $(\chi_{I_1} x)(x)$ a x se na intervalu I liší jen v pravém konci $x = -1$. Přitom poslední dva integrály mají za integrační obor *kompaktní* interval, jsou to tedy Riemannovy určité integrály, se kterými jste se seznámili v základním kurzu.

Cvičení

1. Ověřte, že úlohy 2–29 ze cvičení k první kapitole lze formulovat pro integrály libovolné dimenze. Udělejte potřebné úpravy a rozmyslete si, jak by bylo nutné modifikovat důkazy.

2. Vypočtěte integrál $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ přes danou množinu Ω:

   a) $\Omega:\ -1 \leqq x \leqq 0,\ -\pi/4 \leqq y \leqq -x,\ -1 \leqq z \leqq x^2,$

   b) $\Omega:\ -\sqrt{y} \leqq x \leqq \sqrt{y},\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 4 - x - y,$

   c) $\Omega:\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ z \leqq 1 - x - 2y,$