Kapitola 3

Transformace integrálů

V předchozí kapitole jsme se seznámili se základní metodou výpočtu vícerozměrných integrálů — převodem na násobné integrály. Z teorie jednorozměrného Riemannova integrálu na intervalu víme, že významnou metodou výpočtu určitého Riemannova integrálu je substituční metoda, kterou lze formulovat v následující podobě:
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a funkce φ na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, přičemž $\varphi(t) \in \langle a, b\rangle$ pro každé $t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, pak za předpokladu spojitosti funkce φ' na intervalu (α, β) platí

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{3.1}$$

Při užití této metody nás zajímá především změna integrandu, který chceme „zjednodušit“, abychom dokázali najít primitivní funkci a mohli ji použít pro výpočet určitého integrálu (Newtonova-Leibnizova formule). Rovněž v případě vícerozměrných integrálů má substituční metoda značný význam pro jejich výpočet. Motivace je zde však poněkud jiná. Často nám totiž jde zejména o *změnu integračního oboru* do podoby, která umožní snadnější převod na násobné integrály, a to mnohdy i *za cenu případného zkomplikování integrandu*. Místo o substituční metodě se u vícerozměrných integrálů často mluví o *záměně proměnných* v integrálu nebo o *transformaci integrálu*. Než vyslovíme příslušná tvrzení, uveďme poněkud pozměněnou formulaci věty o substituci v jednorozměrném integrálu, která bude více připomínat formulace vět o transformaci ve vícerozměrných integrálech.

Věta 3.1. *Nechť φ je funkce definovaná na kompaktním intervalu I a má derivaci φ' spojitou a různou od nuly v každém bodě z I. Nechť f je funkce spojitá na* *intervalu $\varphi(I)$. Pak platí*

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Důkaz. Protože I je kompaktní interval, existují reálná čísla α, β taková, že $I = \langle\alpha, \beta\rangle$. Funkce φ má derivaci na intervalu I, je tedy na tomto intervalu spojitá. Odtud vyplývá, že $\varphi(I)$ je skutečně (kompaktní) interval. Protože φ' je spojitá a od nuly různá na I, platí buď $\varphi'(t) > 0$ pro každé $t \in I$, nebo $\varphi'(t) < 0$ pro každé $t \in I$. V prvním případě je funkce φ rostoucí, takže platí $\varphi(I) = \langle a, b\rangle$, kde $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ a $\varphi(t) \in \langle a, b\rangle$ pro každé $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. Pak dostáváme

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Ve druhém případě je funkce φ klesající, takže platí $\varphi(I) = \langle a, b\rangle$, kde $a = \varphi(\beta)$, $b = \varphi(\alpha)$ a $\varphi(t) \in \langle a, b\rangle$ pro každé $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$. V tomto případě dostáváme

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))[-\varphi'(t)]\,\mathrm{d}t = \int_I f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \qquad \square$$

Poznámka 3.2. Všimněte si, že v integrálu na levé straně vzorce (3.1) může být $\varphi(\alpha) \gtreqqless \varphi(\beta)$. Integrály ve vzorci (3.1), můžeme tedy chápat jako integrály přes „orientované“ intervaly. Naproti tomu na levé straně rovnosti (3.2) vystupuje integrál s integračním oborem $\varphi(I)$, což je interval „neorientovaný“, jehož levý krajní bod nemůže být větší než jeho pravý krajní bod.

Věty o transformaci integrálu v této kapitole nejprve uvedeme bez důkazů a na konkrétních příkladech ukážeme způsoby jejich užití. Důkazům bude věnován závěrečný oddíl celé kapitoly.

3.1. Transformace dvojného integrálu

Ve formulaci věty o transformaci dvojného integrálu budeme potřebovat, aby funkce g a h, které realizují záměnu obou proměnných, měly spojité parciální derivace. To má smysl jen ve vnitřních bodech množiny, na které funkce g, h uvažujeme. Proto zavedeme následující pojem.

Definice 3.3. Nechť g, h jsou funkce definované na dané množině $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Buď $F\colon B \to \mathbb{R}^2$ zobrazení přiřazující každému bodu $[u, v] \in B$ bod $F(u, v) = [g(u, v), h(u, v)]$. Řekneme, že zobrazení F je *spojitě diferencovatelné* v B, jestliže existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce g, h lze rozšířit na Ω takovým způsobem, že funkce g, h mají v Ω spojité parciální derivace prvního řádu podle obou proměnných u, v.

Je-li $F\colon B \to \mathbb{R}^2$ spojitě diferencovatelné zobrazení v B, nazývá se při označení použitém v definici 3.3 determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix}$$

jakobián zobrazení F. Jakobián $J\colon B \to \mathbb{R}$ je funkcí proměnných u a v.

Definice 3.4. Spojitě diferencovatelné zobrazení $F\colon B \to \mathbb{R}^2$ na otevřené množině B se nazývá *regulární*, je-li jeho jakobián J různý od nuly v každém bodě množiny B.

Nyní již můžeme zformulovat základní větu o transformaci dvojného integrálu.

Věta 3.5. *Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^2$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $B \subseteq \Omega$. Nechť $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární zobrazení takové, že $F(u, v) = [g(u, v), h(u, v)]$ pro každé $[u, v] \in B$. Nechť funkce f proměnných x a y je spojitá v množině $A = F(B)$.*

Pak platí vztah

$$\iint\limits_A f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B f(g(u, v), h(u, v))|J(u, v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{3.3}$$

Poznámka 3.6.

1. Všimněme si, že vzorec (3.3) je analogický vzorci (3.2).
2. Vysvětlíme si význam jakobiánu ve vzorci (3.3). Zvolíme-li $f(x, y) = 1$ pro každé $(x, y) \in A$ a předpokládáme-li pro jednoduchost, že jakobián zobrazení F má konstantní hodnotu $J \neq 0$, dostáváme z (3.3) rovnost $\iint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B |J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = |J| \iint\limits_B \mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Podle definice 1.31 a 1.45 to znamená, že $\mathrm{m}_2(F(B)) = \mathrm{m}_2(A) = |J| \iint\limits_B \mathrm{d}u\mathrm{d}v = |J|\,\mathrm{m}_2(B)$. Lze tedy očekávat, že

„malá“ souvislá množina B zobrazením F přejde v množinu $A = F(B)$ o míře $\mathrm{m}_2(A)$ rovné $\mathrm{m}_2(A) = |J(u, v)|\,\mathrm{m}_2(B)$ pro vhodné $[u, v] \in B$ i v případě, že jakobián není konstantní.

Ilustrujme tuto skutečnost na příkladě: Nechť B je obdélník $\langle 0, \alpha\rangle \times \langle 0, \beta\rangle$, kde $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Zřejmě $\mathrm{m}_2(B) = \alpha\beta$. Uvažujme lineární zobrazení F takové, že $F(u, v) = [au + bv, cu + dv]$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ jsou takové konstanty, že $ad - bc \neq 0$. Pro jakobián J zobrazení F v každém bodě $[u, v]$ platí

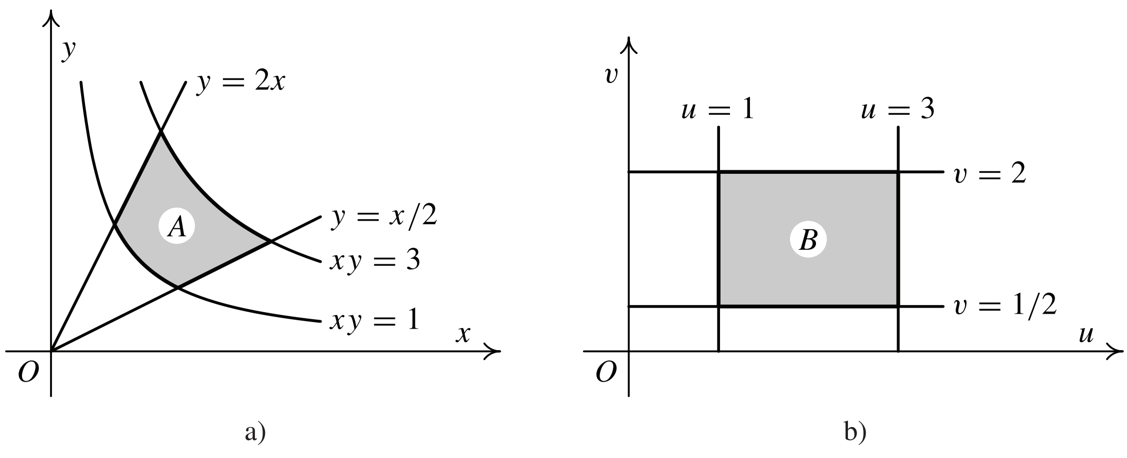
$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$$

a množina $A = F(B)$ je rovnoběžník s vrcholy $[0, 0]$, $[a\alpha, c\alpha]$, $[b\beta, d\beta]$, $[a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta]$. Z elementární geometrie plyne $\mathrm{m}_2(A) = \left|\det\left(\begin{smallmatrix} a\alpha & c\alpha \\ b\beta & d\beta \end{smallmatrix}\right)\right| = |ad - bc|\alpha\beta = |J|\,\mathrm{m}_2(B)$. Vzhledem k linearitě zobrazení F vyšla rovnost $\mathrm{m}_2(A) = |J(u, v)|\,\mathrm{m}_2(B)$ přesně pro každý bod $[u, v] \in B$.

Srovnejte též cvičení 4 k této kapitole.

Příklad 3.7. Vypočtěte $\displaystyle\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A leží v prvním kvadrantu a je omezena křivkami $xy = 1$, $xy = 3$, $y = x/2$ a $y = 2x$.

Řešení. První dvě křivky jsou hyperboly, druhé dvě přímky. Integrační obor A je znázorněn na obr. 3.1 a). Množinu A lze popsat jako elementární množinu, popřípadě sjednocení elementárních množin, vzhledem k ose x nebo vzhledem k ose y. Najít tento popis by však bylo poměrně pracné. Ukážeme, že volbou vhodné transformace se výpočet značně zjednoduší. Každým vnitřním bodem



Obr. 3.1

prvního kvadrantu s kartézskými souřadnicemi $[x_0, y_0]$ prochází právě jedna z hyperbol $xy = u_0$ a právě jedna z přímek $y = v_0 x$, kde $u_0 > 0$, $v_0 > 0$ jsou parametry. Čísla u_0 a v_0 jsou jednoznačně určena: $u_0 = x_0 y_0$ a $v_0 = y_0/x_0$. Dvojici $[u_0, v_0]$ lze tedy zvolit za nové souřadnice daného bodu. Vztah mezi původními a novými souřadnicemi je tudíž dán rovnicemi (vynecháme pro jednoduchost index nula) $xy = u$ a $y/x = v$. Z nich snadno vypočítáme $x = \sqrt{u/v}$, $y = \sqrt{uv}$. Dostáváme tedy prosté zobrazení se souřadnicovými funkcemi $g(u, v) = \sqrt{u/v}$ a $h(u, v) = \sqrt{uv}$. Tyto funkce mají uvnitř prvního kvadrantu spojité první parciální derivace podle obou proměnných. Vypočteme jakobián:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v^3}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4v} + \frac{1}{4v} = \frac{1}{2v}.$$

Jakobián je tedy uvnitř prvního kvadrantu nenulový, takže zobrazení je regulární.

Body ležící na hyperbole $xy = 1$ mají všechny novou první souřadnici $u = 1$. Analogicky body ležící na hyperbole $xy = 3$ mají všechny novou první souřadnici $u = 3$. Podobně body ležící na přímce $y = x/2$ mají všechny novou druhou souřadnici $v = 1/2$ a body ležící na přímce $y = 2x$ mají všechny novou druhou souřadnici $v = 2$. Odtud je vidět, že množina A je v transformaci F dané funkcemi g a h obrazem dvojrozměrného intervalu $B = \langle 1, 3\rangle \times \langle 1/2, 2\rangle$ — viz obr. 3.1 b).

S použitím vztahů (3.3) a (1.18) dostaneme:

$$\iint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^3 \mathrm{d}u \cdot \int_{1/2}^2 \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v =$$
$$= \frac{1}{2}\left[u\right]_1^3 \cdot \left[\ln v\right]_{1/2}^2 = \frac{1}{2}\cdot(3-1)\cdot\left(\ln 2 - \ln\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2.$$

Poznamenejme, že výsledné číslo $2\ln 2$ je rovno míře množiny A. ▲

V dalším uvedeme některé speciální transformace vhodné pro výpočet dvojných integrálů. Než se jimi začneme zabývat jednotlivě, všimneme si podmínek použití věty 3.5. Ukazuje se, že její univerzálnost má určité nedostatky. Předně, integrand musí být spojitá funkce a integrační obor uzavřená množina. Závažnější však je, že i u velmi jednoduchých transformací, se kterými se budeme dále seznamovat, protože jsou důležité v aplikacích, často nelze splnit předpoklady o transformačním zobrazení. Požadavek, aby je bylo možné *prostě* rozšířit na *otevřenou* nadmnožinu integračního oboru při zachování regularity, je často nesplnitelný. Proto nyní uvedeme větu o transformaci dvojného integrálu za obecnějších předpokladů. Formulace je sice komplikovanější, ale uplatnění je mnohem širší, což uvidíme níže při řešení příkladů. Stručně řečeno, obecnější věta 3.8 postihuje případy, kdy předpoklady věty 3.5 nejsou splněny na množinách míry nula. V konkrétních úlohách je ověření předpokladů obvykle snadné.

Věta 3.8. *Nechť* $B_1 \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^2$*, kde* B_1 *je otevřená množina,* B *je měřitelná množina a platí* $\mathrm{m}_2(B \setminus B_1) = 0$.

Buď $F\colon B \to \mathbb{R}^2$ *spojitě diferencovatelné zobrazení s jakobiánem* J*, které je regulární a prosté v* B_1*. Označme* $A = F(B)$*,* $A_1 = F(B_1)$*. Předpokládejme, že množina* A *je měřitelná a platí* $\mathrm{m}_2(A \setminus A_1) = 0$.

Buď funkce f *ohraničená na množině* A *a spojitá na množině* A_1*. Nechť funkce s hodnotou* $f(g(u,v), h(u,v))|J(u,v)|$ *v každém bodě* $[u,v] \in B$ *je ohraničená.*

Pak platí vztah (3.3)*, tj.*

$$\iint\limits_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_B f(g(u,v), h(u,v))|J(u,v)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

3.1.1. Některé běžné typy transformací dvojného integrálu

Všimněme si nyní podrobněji několika běžných často užívaných transformací $x = g(u,v)$, $y = h(u,v)$ dvojného integrálu.

Posunutí

Posunutí (*translace*) je dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= u + a, \\ y &= v + b, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde a, b jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Dilatace

Dilatace (ve speciálním případě $a > 0$, $b > 0$ *změna měřítek na souřadnicových osách*) je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= au, \\ y &= bv, \end{aligned} \tag{3.5}$$

kde $a \neq 0$, $b \neq 0$ jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} g_u & g_v \\ h_u & h_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab.$$

Transformace do polárních souřadnic

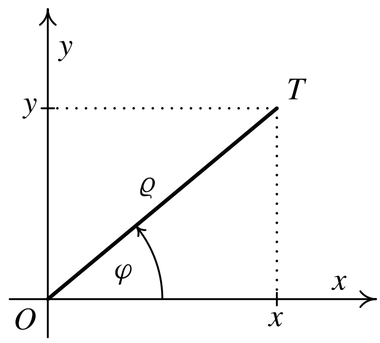
Transformace do polárních souřadnic je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \varphi, \end{aligned} \tag{3.6}$$

přičemž nové proměnné (tzv. *polární souřadnice bodu* $[x, y]$) značíme ϱ, φ namísto u, v. Jakobián zobrazení (3.6) je roven

$$J(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi \\ h_\varrho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = \varrho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \varrho.$$

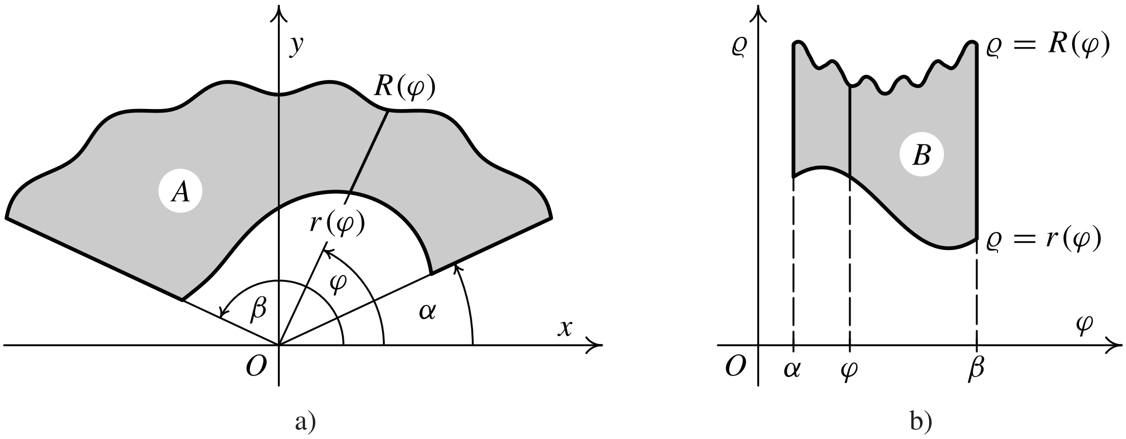
Připomeňme význam polárních souřadnic v rovině: Je-li T bod s kartézskými souřadnicemi $[x, y]$, značí ϱ vzdálenost bodu T od počátku O kartézské souřadnicové soustavy a φ úhel, který svírá vektor $\overrightarrow{OT}$ s kladnou poloosou x (viz obr. 3.2). Proměnná ϱ nabývá nezáporných hodnot, proměnná φ obvykle hodnot z vhodného intervalu délky 2π. Zobrazení do polárních souřadnic je regulární na množinách neobsahujících počátek. Transformace do polárních souřadnic se používá zvláště v případech, kdy popis množiny A v polárních souřadnicích je tvaru



Obr. 3.2

$$B\colon \quad \begin{aligned} \alpha \leqq \varphi &\leqq \beta, \\ r(\varphi) \leqq \varrho &\leqq R(\varphi), \end{aligned}$$

přičemž $\alpha < \beta$ jsou konstanty a r, R jsou spojité funkce na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, viz obr. 3.3. Označíme-li F zobrazení dané rovnicemi (3.6), platí $F(B) = A$.



Obr. 3.3: Transformace do polárních souřadnic

Poznámka 3.9. V předchozím textu bylo uvedeno, že polární souřadnice φ nabývá obvykle hodnot z vhodného intervalu délky 2π. Slovo „obvykle“ bylo použito záměrně, neboť existují i množiny, pro které toto tvrzení neplatí — viz obr. 3.4, kde $\varphi \in \langle 0, 3\pi \rangle$.

Transformace do eliptických (zobecněných polárních) souřadnic

Transformace do eliptických souřadnic ϱ, φ je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= a\varrho \cos \varphi, \\ y &= b\varrho \sin \varphi, \end{aligned} \tag{3.7}$$

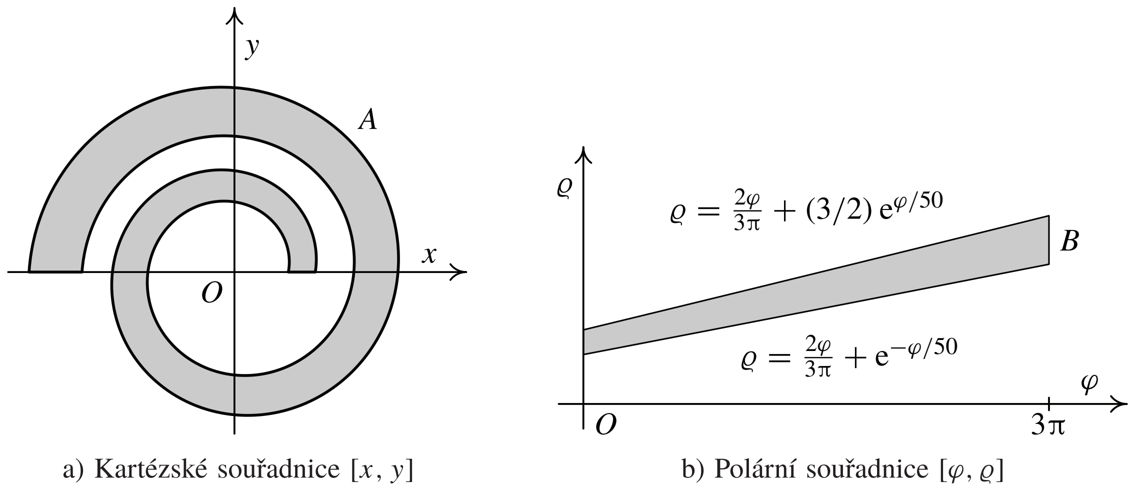
kde $a \neq 0$, $b \neq 0$ jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi \\ h_\varrho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\varrho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\varrho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\varrho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = ab\varrho.$$

Transformace do zobecněných eliptických souřadnic

Transformace do zobecněných eliptických souřadnic ϱ, φ je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= a\varrho \cos^n \varphi, \\ y &= b\varrho \sin^n \varphi, \end{aligned} \tag{3.8}$$



Obr. 3.4: Množina, jejíž polární souřadnice φ nenabývá hodnot z intervalu délky 2π.

kde $a \neq 0$, $b \neq 0$ a $n \in \mathbb{N}$ jsou konstanty. Pro jakobián zobrazení (3.8) v tomto případě platí

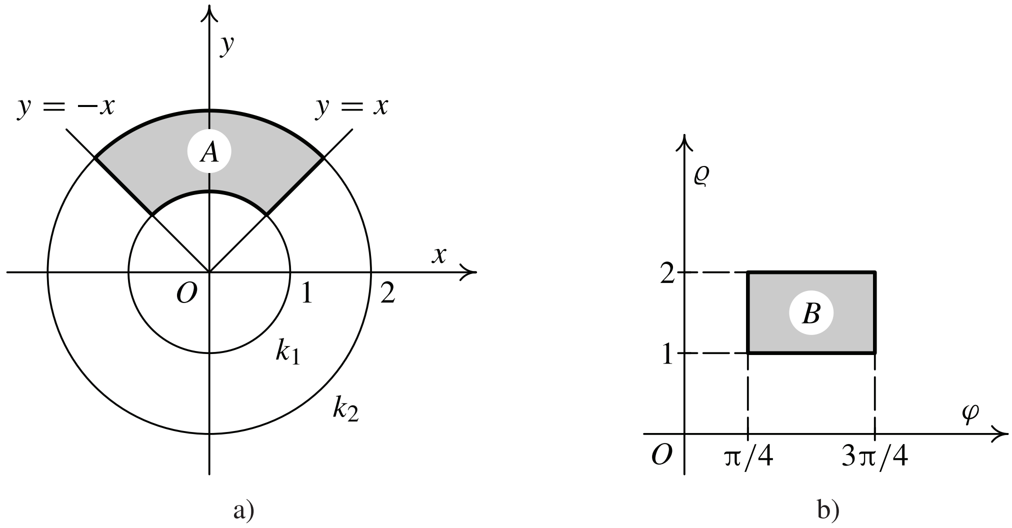
$$J(\varrho, \varphi) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi \\ h_\varrho & h_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos^n\varphi & -na\varrho\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi \\ b\sin^n\varphi & nb\varrho\sin^{n-1}\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} =$$
$$= nab\varrho\cos^{n-1}\varphi\sin^{n-1}\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = nab\varrho\cos^{n-1}\varphi\sin^{n-1}\varphi.$$

Poznámka 3.10. Kromě uvedených obvyklých transformací připadají v úvahu i jiné transformace vhodné pro danou oblast integrace nebo daný integrand. Při výpočtu některých složitějších integrálů je mnohdy účelné provádět několik transformací postupně za sebou.

Příklad 3.11. Vypočtěte $\displaystyle\iint_A (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A je určena podmínkami $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$, $y \geqq |x|$.

Řešení. Rovnice $x^2 + y^2 = 1$ a $x^2 + y^2 = 4$ určují kružnice k_1 a k_2 se středy v počátku O a poloměry 1 a 2. První podmínka tedy zadává mezikruží. Dále graf funkce $y = |x|$ je tvořen dvěma polopřímkami (osami prvního a druhého kvadrantu) o rovnicích $y = x$ a $y = -x$. Body splňující nerovnost $y \geqq |x|$ leží nad tímto grafem. Dohromady tudíž obě podmínky zadávají výseč mezikruží A z obr. 3.5 a).

Určíme, jak bude tato výseč popsána v polárních souřadnicích. Polopřímky vycházející z počátku O, které protínají množinu A, svírají s kladnou částí osy x



Obr. 3.5

úhel v rozmezí $\pi/4$ ($y = x$ je osa prvního kvadrantu) až $3\pi/4$ ($y = -x$ je osa druhého kvadrantu). Tedy $\pi/4 \leqq \varphi \leqq 3\pi/4$.

Libovolná taková polopřímka protíná množinu A v úsečce, jejíž koncové body mají od počátku O stále stejné vzdálenosti, a to $r = 1$ a $R = 2$. Tedy $1 \leqq \varrho \leqq 2$. To znamená, že množina B uspořádaných dvojic $[\varphi, \varrho]$ bude dvojrozměrný interval v rovině s kartézskými souřadnicemi φ, ϱ — viz obr. 3.5 b).

Snadno se ověří, že jsou splněny předpoklady věty 3.5. Za množinu Ω z této věty lze zvolit libovolný otevřený dvojrozměrný interval, který bude obsahovat uzavřený interval B, bude ležet v prvním kvadrantu a jehož horizontální rozměr bude menší než 2π. Zobrazení F dané rovnicemi (3.6) pak bude na Ω prosté a regulární. Protože integrand $f(x, y) = x^2 + y^2$ je funkce spojitá na A, lze zmíněnou větu skutečně použít. Podle (3.3) platí:

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_A (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B \big((\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2\big)\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\
&= \iint_B \varrho^3(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \iint_B \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho = \\
&= \big[\varphi\big]_{\pi/4}^{3\pi/4} \cdot \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_1^2 = \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{16}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{15\pi}{8}\,.
\end{aligned}
$$

Při výpočtu transformovaného integrálu jsme použili kromě Fubiniovy věty rovněž vztah (1.18). ▲

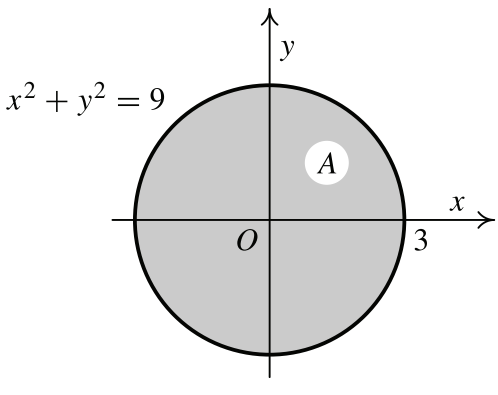
Příklad 3.12. Vypočtěte $\displaystyle\iint_A (2x-3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A je určena podmínkou $x^2+y^2 \leqq 9$.

Řešení. Integračním oborem je kruh se středem v počátku souřadnic O a poloměrem 3 (obr. 3.6 a)). Použijeme opět transformaci do polárních souřadnic. Tentokrát integrační obor protíná libovolná polopřímka vycházející z počátku O. Tedy $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. Průnikem každé takové polopřímky s integračním oborem je úsečka délky 3 vycházející z počátku O, tedy $0 \leqq \varrho \leqq 3$. Množinou B uspořádaných dvojic $[\varphi, \varrho]$ je dvojrozměrný interval (obr. 3.6 b)).

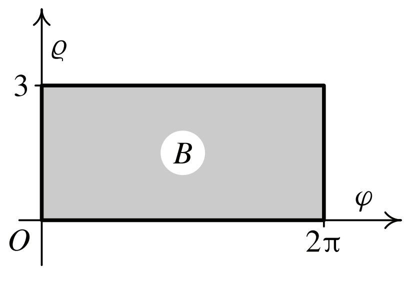
Předpoklady věty 3.5 tentokrát nelze splnit. Zobrazení $F\colon B \to A$ není prosté na množině B. Všechny body dolní hraniční úsečky obdélníku B se zobrazí na počátek O. Dále pro každé $c \in \langle 0, 3\rangle$ se body $[0, c]$ a $[2\pi, c]$ ležící na levé resp. pravé hraniční úsečce obdélníku B zobrazí na tentýž bod $[c, 0] \in A$. Pokud bychom za B zvolili např. obdélník popsaný nerovnostmi $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $0 < \varrho \leqq 3$ doplněný o bod $[0, 0]$, bylo by sice zobrazení F prosté, ale B by nebyla uzavřená množina.

Lze však použít větu 3.8. Za množinu B_1 z této věty lze zvolit vnitřek intervalu B. Pak množina $B \setminus B_1$ je tvořena čtyřmi hraničními úsečkami intervalu B a množina $F(B) \setminus F(B_1)$ je tvořena hraniční kružnicí kruhu A a úsečkou spojující jeho střed O s bodem $[3, 0]$. Na množině B_1 je zobrazení F regulární i prosté a rovněž všechny další předpoklady věty 3.8 jsou splněny. Platí proto:

$$I = \iint_A (2x-3y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B (2\varrho\cos\varphi - 3\varrho\sin\varphi)\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$



a)



b)

Obr. 3.6

$$= \iint_B \varrho^2(2\cos\varphi - 3\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}(2\cos\varphi - 3\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^3 \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \big[2\sin\varphi + 3\cos\varphi\big]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^3 = (0 + 3 - 0 - 3)(9 - 0) = 0.$$

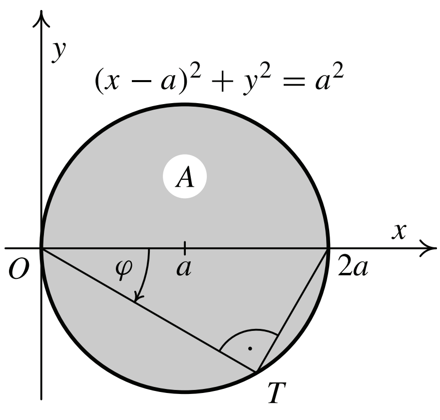
Při výpočtu transformovaného integrálu jsme opět použili kromě Fubiniovy věty i vztah (1.18). ▲

Příklad 3.13. Vypočtěte $\iint_A \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A je určena podmínkou $x^2 + y^2 - 2ax \leqq 0$, kde $a > 0$ je daná konstanta.

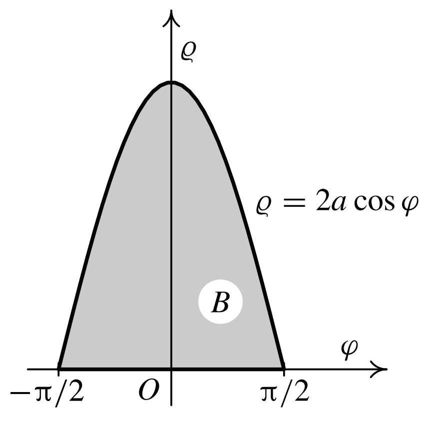
Řešení. Rovnice $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ zadává nějakou kuželosečku. Doplněním na čtverec určíme jakou:

$$x^2 + y^2 - 2ax = (x - a)^2 - a^2 + y^2 = 0, \text{ takže } (x - a)^2 + y^2 = a^2.$$

Jde o kružnici se středem v bodě $[a, 0]$ a poloměrem a. Integračním oborem A je tedy kruh — viz obr. 3.7 a). S ohledem na tvar integrované funkce použijeme transformaci do polárních souřadnic. Kdybychom se místo o zjednodušení integrandu pokusili zjednodušit integrační obor posunutím středu kruhu A do počátku s následným zavedením polárních souřadnic, integrovaná funkce by se nepříjemně zkomplikovala. Vzhledem k poloze množiny A (leží v prvním a čtvrtém kvadrantu) bude výhodnější volit rozmezí úhlů z intervalu $(-\pi, \pi\rangle$. Polopřímky vycházející z počátku O, které protínají množinu A i v jiných bodech než



a)



b)

Obr. 3.7

v počátku O, svírají totiž s kladnou částí osy x úhly z intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$. Budeme tedy mít $-\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi/2$.

Nyní určíme omezení pro ϱ. Z obrázku je zřejmé, že délky úseček $\left|\overline{OT}\right|$, které jsou průnikem uvažovaných polopřímek s množinou A, se budou měnit a budou záviset na úhlu φ. Dosazením polárních souřadnic do rovnice kružnice obdržíme:

$$(\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2 - 2a\varrho\cos\varphi = 0, \text{ odkud } \varrho(\varrho - 2a\cos\varphi) = 0.$$

Hodnotě $\varrho = 0$ odpovídá počátek O, pro druhý průsečík polopřímky s kružnicí platí $\varrho = 2a\cos\varphi$. (Tento výsledek lze snadno zdůvodnit i geometricky. V trojúhelníku s vrcholy O, $[2a, 0]$ a T (obr. 3.7 a)) je podle Thaletovy věty u vrcholu T pravý úhel. Z definice kosinu vyplývá, že $\varrho = \left|\overline{OT}\right| = 2a\cos\varphi$.) Celkově tedy dostáváme, že

$$B\colon\quad \begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2},\\ 0 \leqq \varrho \leqq 2a\cos\varphi. \end{aligned}$$

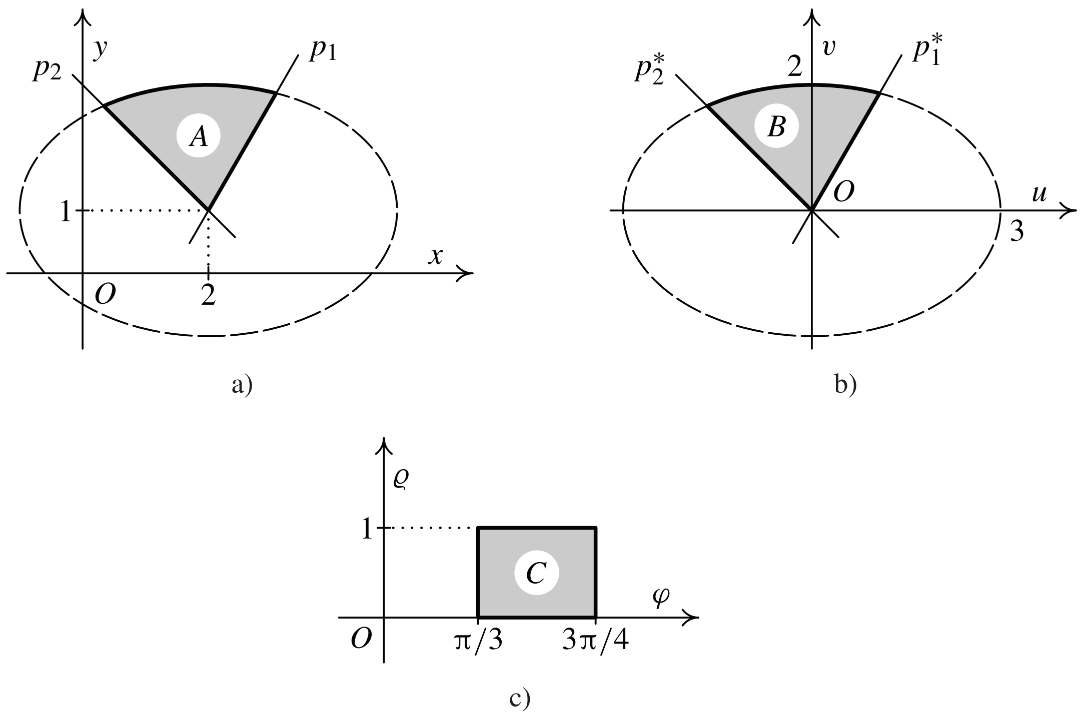
Množina B je tudíž elementární vzhledem k φ (obr. 3.7 b)).

Použitím věty 3.8 dostaneme (zdůvodněte sami obdobně jako v předchozím příkladu, že všechny její předpoklady jsou splněny):

$$\begin{aligned} I &= \iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B \sqrt{(\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\ &= \iint_B \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^{2a\cos\varphi} \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^{2a\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{8}{3}a^3\cos^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{8}{3}a^3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \left|\begin{array}{c} \sin\varphi = t \\ \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t \\ -\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow -1,\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1 \end{array}\right| = \frac{8}{3}a^3\int_{-1}^{1}(1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}a^3\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{32}{9}a^3. \end{aligned}$$

Na výpočet transformovaného integrálu jsme použili Fubiniovu větu 1.55, vzniklý jednoduchý integrál jsme pak počítali substituční metodou. ▲

Příklad 3.14. Vypočtěte $\iint_A (x+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde množina A je dána nerovnostmi $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} \leqq 1$, $2x - \sqrt{3}\,y + \sqrt{3} - 4 \leqq 0$ a $2x + 3y - 7 \geqq 0$.



Obr. 3.8: Eliptická výseč a eliptické souřadnice

Řešení. První nerovnost vyjadřuje elipsu (vnitřek včetně hranice) se středem v bodě [2, 1], která má poloosy o velikostech 3 a 2 a jejíž osy jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Další dvě nerovnosti určují poloroviny. Označme $p_1\colon 2x - \sqrt{3}\,y + \sqrt{3} - 4 = 0$ a $p_2\colon 2x + 3y - 7 = 0$ jejich hraniční přímky. Dosazením se můžeme přesvědčit, že obě tyto přímky procházejí středem elipsy. Přímka p_1 má kladnou směrnici $2/\sqrt{3}$, přímka p_2 má zápornou směrnici $-2/3$. Integrační obor A je znázorněn na obr. 3.8 a). Jde o výseč elipsy.

K výpočtu integrálu použijeme nejdříve posunutí

$$\begin{aligned} x &= u + 2, \\ y &= v + 1, \end{aligned} \qquad |J| = 1,$$

po kterém přejde střed původní elipsy do počátku. Dosazením do nerovnosti určující původní elipsu a do rovnic hraničních přímek dostaneme

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} \leqq 1, \qquad 2u - \sqrt{3}\,v = 0, \qquad 2u + 3v = 0.$$

Po posunutí tedy množina A přešla v množinu $B = \left\{[u, v] \in \mathbb{R}^2\colon \frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} \leqq \leqq 1,\ 2u - \sqrt{3}\,v \leqq 0,\ 2u + 3v \geqq 0\right\}$, což je shodná výseč shodné elipsy se středem v počátku souřadnicové soustavy proměnných u, v; přímky p_1, p_2 přitom přešly v přímky p_1^*, p_2^* procházející počátkem (obr. 3.8 b)).

Nyní provedeme transformaci množiny B do eliptických souřadnic

$$\begin{aligned} u &= 3\varrho\cos\varphi, \\ v &= 2\varrho\sin\varphi, \end{aligned} \qquad |J| = 6\varrho.$$

Dosazením do nerovnosti určující elipsu dostaneme

$$\frac{(3\varrho\cos\varphi)^2}{9} + \frac{(2\varrho\sin\varphi)^2}{4} \leqq 1, \text{ takže } \varrho^2 \leqq 1.$$

Tedy $0 \leqq \varrho \leqq 1$.

Dále dosadíme do rovnic posunutých přímek. Vyjde nám

$$\begin{aligned} p_1^*&\colon 2\cdot 3\varrho\cos\varphi - \sqrt{3}\cdot 2\varrho\sin\varphi = 0, \\ p_2^*&\colon 2\cdot 3\varrho\cos\varphi + 3\cdot 2\varrho\sin\varphi = 0, \end{aligned} \quad \text{odkud} \quad \begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg}\varphi &= -1. \end{aligned}$$

Přímce p_1^* tudíž odpovídá hodnota $\varphi = \pi/3$ a přímce p_2^* hodnota $\varphi = 3\pi/4$, takže $\pi/3 \leqq \varphi \leqq 3\pi/4$. Množina B tedy přešla v množinu C, která je obdélníkem (obr. 3.8 c)):

$$C\colon \begin{aligned} \pi/3 \leqq \varphi &\leqq 3\pi/4, \\ 0 \leqq \varrho &\leqq 1. \end{aligned}$$

Použijeme větu 3.8 (ověřte sami, že všechny její předpoklady jsou splněny):

$$\begin{aligned} I &= \iint_A (x+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_B \big(u + 2 + (v+1)^2\big)\cdot 1\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \iint_B \big(u + v^2 + 2v + 3\big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \\ &= \iint_C \Big(3\varrho\cos\varphi + (2\varrho\sin\varphi)^2 + 4\varrho\sin\varphi + 3\Big)6\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\ &= 6\iint_C (3\varrho^2\cos\varphi + 4\varrho^3\sin^2\varphi + 4\varrho^2\sin\varphi + 3\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = \\ &= 24\iint_C \varrho^3\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi + 6\iint_C \varrho^2(3\cos\varphi + 4\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi + \\ &\quad + 18\iint_C \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Další výpočet provedeme odděleně pro každý ze tří integrálů I_1, I_2, I_3. Na každý z nich použijeme Fubiniovu větu a vztah (1.18). V prvním integrálu použijeme identitu $\sin^2\varphi = (1-\cos 2\varphi)/2$.

$$I_1 = 12\int_0^1 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (1-\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 3\big[\varrho^4\big]_0^1 \cdot \left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\pi/3}^{3\pi/4} =$$
$$= 3\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}(-1) - \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{4} + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4},$$
$$I_2 = 6\int_0^1 \varrho^2\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (3\cos\varphi + 4\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\big[\varrho^3\big]_0^1 \cdot \big[3\sin\varphi - 4\cos\varphi\big]_{\pi/3}^{3\pi/4} =$$
$$= 2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\cdot\frac{1}{2}\right) = 7\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + 4,$$
$$I_3 = 18\int_0^1 \varrho\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{\pi/3}^{3\pi/4} \mathrm{d}\varphi = 9\big[\varrho^2\big]_0^1 \cdot \big[\varphi\big]_{\pi/3}^{3\pi/4} = 9\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{15\pi}{4}.$$

Sečtením dostaneme celkový výsledek:

$$I = 5\pi + \frac{11}{2} - \frac{9\sqrt{3}}{4} + 7\sqrt{2}.$$

▲

Příklad 3.15. Transformací $u = x+y$, $v = x-y$ vypočtěte $\displaystyle\iint_M (x^2-y^2)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde $M = \big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq y \leqq x \leqq 1\big\}$.

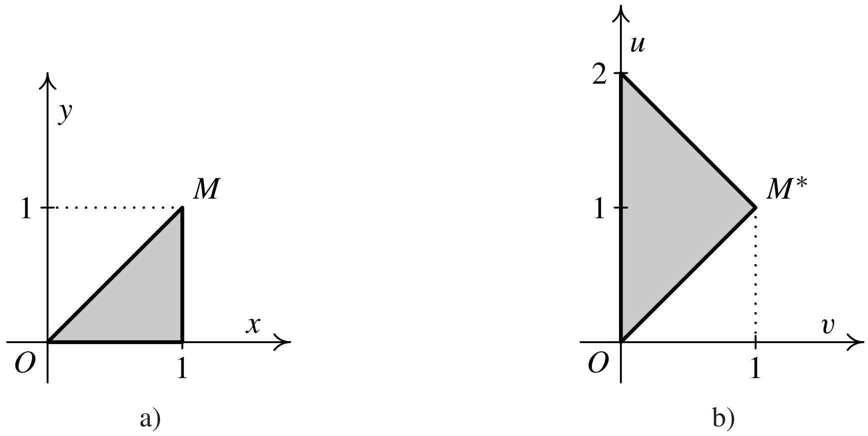
Řešení. Množinu M lze zapsat ve tvaru $\big\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\big\}$. Geometricky se jedná o trojúhelník s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$ (obr. 3.9 a)). Inverzní transformace k transformaci $u = x+y$, $v = x-y$ je transformace $F\colon x = (u+v)/2$, $y = (u-v)/2$. Snadno se ověří, že pro její jakobián platí $J = -1/2$. Dosazením vztahů $x = (u+v)/2$, $y = (u-v)/2$ do nerovností $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq x$ dostáváme

$$0 \leqq \frac{1}{2}(u+v) \leqq 1, \quad 0 \leqq \frac{1}{2}(u-v) \leqq \frac{1}{2}(u+v).$$

Odtud plynou nerovnosti

$$0 \leqq v, \quad u \geqq v, \quad v \leqq 1, \quad u \leqq 2-v.$$

Naopak se snadno ověří, že z posledních nerovností plynou původní nerovnosti $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq x$. Množina M tedy transformací F^{-1} přejde v množinu



Obr. 3.9: Afinní transformace

$M^* = \{[u, v] \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leqq v \leqq 1,\ v \leqq u \leqq 2 - v\}$ (obr. 3.9 b)). Užitím věty 1.55 nyní dostáváme

$$\iint_M (x^2 - y^2)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{M^*} u^2 v^2 \frac{1}{2} \,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_v^{2-v} u^2 v^2 \,\mathrm{d}u\right) \mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{u^3 v^2}{3}\right]_v^{2-v} \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{8v^2 - 12v^3 + 6v^4 - v^5 - v^5}{3} \,\mathrm{d}v =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 \left(8v^2 - 12v^3 + 6v^4 - 2v^5\right) \mathrm{d}v = \frac{1}{3}\left[\frac{4}{3}v^3 - \frac{6}{4}v^4 + \frac{3}{5}v^5 - \frac{1}{6}v^6\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2} + \frac{3}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{40 - 45 + 18 - 5}{30} = \frac{4}{45}.$$

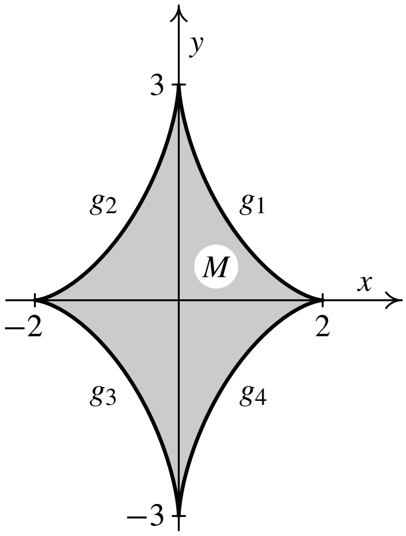
▲

Příklad 3.16. Vypočtěte integrál $\displaystyle\iint_M (x + 1) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, kde

$$M = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \colon \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} \leqq 1\right\}.$$

Řešení. Množina M je omezena uzavřenou křivkou γ, která je dána rovností

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1, \tag{3.9}$$



Obr. 3.10:
Množina M omezená křivkou $\gamma\colon \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} = 1$

prochází body [2,0], [0,3], [−2,0], [0,−3] a je tvořena grafy čtyř funkcí $g_j(x)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ — viz obr. 3.10. Ze vztahu (3.9) lze snadno získat funkční předpisy pro funkce $g_j(x)$ a výpočtem jejich první a druhé derivace ověřit, že grafy těchto funkcí mají skutečně tvar nakreslený v obr. 3.10.

K výpočtu zadaného integrálu použijeme transformace do zobecněných eliptických souřadnic $x = 2\varrho\cos^3\varphi$, $y = 3\varrho\sin^3\varphi$ — viz 3.8. Pro příslušný jakobián platí $J = 18\varrho\cos^2\varphi\sin^2\varphi$. Dosazením transformačních vztahů do nerovnosti

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{3}\right)^{2/3} \leqq 1$$

dostáváme $\varrho^{2/3}(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \leqq 1$, což je splněno právě tehdy, když $\varrho \leqq 1$. Množině M v polárních souřadnicích odpovídá obdélník $M^* = \big\{[\varphi, \varrho] \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi,\ 0 \leqq \varrho \leqq 1\big\}$. Ověřte si sami, že na jeho vnitřku je transformace prostá. Nyní

$$\iint\limits_M (x+1) = \iint\limits_{M^*} (2\varrho\cos^3\varphi + 1)18\varrho\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 36\int_0^{2\pi}\cos^5\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho + 18\iint\limits_{M^*}\varrho\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 36\int_0^{2\pi}(1-\sin^2\varphi)^2\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho + \frac{9}{2}\iint\limits_{M^*}\varrho\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 36\int_0^{2\pi}(\sin^6\varphi - 2\sin^4\varphi + \sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho +$$

$$+\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^1\varrho\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= 36\left[\frac{\sin^7\varphi}{7} - 2\frac{\sin^5\varphi}{5} + \frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{2\pi}\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}\varrho +$$

$$+\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= 0\cdot\int_0^1\varrho^2\,\mathrm{d}r + \frac{9}{8}\left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_0^{2\pi} = \frac{9}{8}\cdot 2\pi = \frac{9}{4}\,\pi.$$

▲

3.2. Transformace trojného integrálu

Problematika transformace trojného integrálu je zcela analogická jako u transformace dvojného integrálu. Definice spojitě diferencovatelného zobrazení, jeho jakobiánu a regulárního zobrazení mají v trojrozměrném případě následující podobu:

Definice 3.17. Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^3$ a nechť g, h, k jsou funkce definované na množině B. Buď $F\colon B \to \mathbb{R}^3$ zobrazení přiřazující každému bodu $[u, v, w] \in B$ bod $F(u, v, w) = [g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)]$. Řekneme, že zobrazení F je *spojitě diferencovatelné* v B, jestliže existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce g, h, k lze rozšířit na Ω takovým způsobem, aby měly v Ω spojité parciální derivace prvního řádu podle všech tří proměnných u, v, w.

Je-li $F\colon B \to \mathbb{R}^3$ spojitě diferencovatelné zobrazení v B, determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}$$

se při označení použitém v definici 3.17 nazývá *jakobián* zobrazení F. Jakobián $J\colon B \to \mathbb{R}$ je funkcí proměnných u, v a w.

Definice 3.18. Spojitě diferencovatelné zobrazení $F\colon B \to \mathbb{R}^3$ na otevřené množině B se nazývá *regulární*, je-li jeho jakobián J různý od nuly v každém bodě množiny B.

Větu o transformaci trojného integrálu analogickou větě 3.5 lze zformulovat takto:

Věta 3.19. *Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^3$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ je otevřená množina, $B \subseteq \Omega$. Nechť $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ je prosté regulární zobrazení s jakobiánem J takové, že $F(u, v, w) = [g(u, v, w), h(u, v, w), k(u, v, w)]$ pro každé $[u, v, w] \in B$. Nechť funkce f proměnných x, y a z je spojitá v množině $A = F(B)$.*

Pak platí vztah

$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$= \iiint_B f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w. \tag{3.10}$$

Podobně jako u dvojného integrálu je někdy užitečná následující obecnější, avšak poněkud komplikovanější věta, analogická větě 3.8:

Věta 3.20. *Nechť $B_1 \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^3$, kde B_1 je otevřená množina, B je měřitelná množina a platí* $\mathrm{m}_3(B \setminus B_1) = 0$.

Buď $F\colon B \to \mathbb{R}^3$ spojitě diferencovatelné zobrazení s jakobiánem J, které je regulární a prosté v B_1. Označme $A = F(B)$, $A_1 = F(B_1)$. Předpokládejme, že množina A je měřitelná a platí $\mathrm{m}_3(A \setminus A_1) = 0$.

Buď funkce f ohraničená na množině A a spojitá na množině A_1. Nechť funkce s hodnotou $f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))|J(u,v,w)|$ v každém bodě $[u,v,w] \in B$ je ohraničená.

Pak platí vztah (3.10)*, tj.*

$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$
$$= \iiint_B f(g(u,v,w),h(u,v,w),k(u,v,w))|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

3.2.1. Některé běžné typy transformací trojného integrálu

Uveďme nyní podrobněji několik běžných, často užívaných transformací $x = g(u,v,w)$, $y = h(u,v,w)$, $z = k(u,v,w)$ trojného integrálu.

Posunutí

Posunutí (*translace*) je dáno rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= u + a,\\ y &= v + b,\\ z &= w + c, \end{aligned} \tag{3.11}$$

kde a, b, c jsou konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Dilatace

Dilatace (ve speciálním případě $a>0$, $b>0$, $c>0$ *změna měřítek na souřadnicových osách*) je dána rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= au, \\ y &= bv, \\ z &= cw, \end{aligned} \tag{3.12}$$

kde a, b, c jsou nenulové konstanty. Jakobián tohoto zobrazení je roven

$$J(u,v,w)=\begin{vmatrix} g_u & g_v & g_w \\ h_u & h_v & h_w \\ k_u & k_v & k_w \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}=abc.$$

Transformace do válcových souřadnic

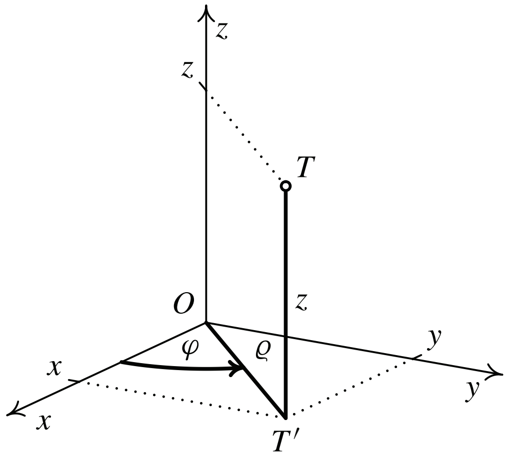
Transformace do válcových (cylindrických) souřadnic ϱ, φ, z je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi, \\ y &= \varrho\sin\varphi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Jakobián zobrazení (3.13) je roven

$$J(\varrho,\varphi,z)=\begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi & g_z \\ h_\varrho & h_\varphi & h_z \\ k_\varrho & k_\varphi & k_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\varrho\cos^2\varphi+\varrho\sin^2\varphi=\varrho.$$

Všimněme si nyní geometrického významu cylindrických souřadnic bodu T majícího kartézské souřadnice $[x,y,z]$. Označme T' kolmý průmět bodu T do souřadnicové roviny xy, tedy T' má souřadnice $[x,y,0]$. Bod T' vyjádříme v polárních souřadnicích $[\varrho,\varphi]$ v rovině xy. Polohu bodu T v prostoru lze nyní určit trojicí čísel $[\varrho,\varphi,z]$, což jsou cylindrické souřadnice bodu T — viz obr. 3.11. Podotkněme ještě, že vzdálenost ϱ je nezáporná, úhel φ obvykle volíme



Obr. 3.11: Cylindrické souřadnice

z vhodného intervalu délky 2π a souřadnice z se nemění. Všimněme si, že při konstantním $\varrho_0 > 0$ je rovnicí $\varrho = \varrho_0$ určena „nekonečná“ rotační válcová plocha s osou v souřadnicové ose z, zatímco při $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ je rovnicí $\varphi = \varphi_0$ v $\mathbb{R}^3$ dána polorovina, jejíž hranicí je souřadnicová osa z. Transformace do válcových je výhodné užívat zejména v případech, kdy integrační obor je rotační těleso s osou rotace v ose z, nebo jeho vhodná část. V případě, že integrand je těleso mající osu rotace v ose x nebo v ose y, je možné použít patřičně modifikované transformace do válcových souřadnic.

Transformace do sférických souřadnic

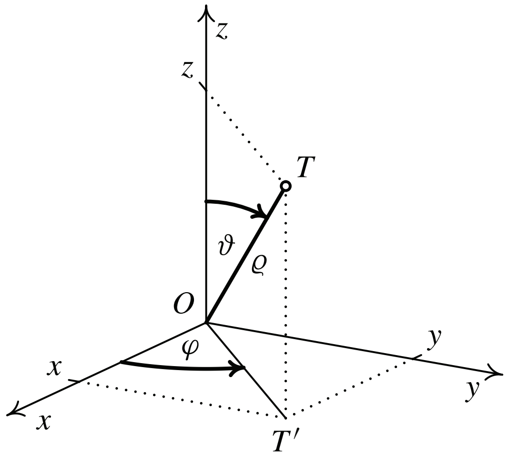
Transformace do sférických (kulových) souřadnic ϱ, φ, ϑ je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi\sin\vartheta,\\ y &= \varrho\sin\varphi\sin\vartheta,\\ z &= \varrho\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Jakobián zobrazení (3.14) je roven

$$J(\varrho,\varphi,\vartheta) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi & g_\vartheta \\ h_\varrho & h_\varphi & h_\vartheta \\ k_\varrho & k_\varphi & k_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -\varrho\sin\varphi\sin\vartheta & \varrho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \varrho\cos\varphi\sin\vartheta & \varrho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -\varrho\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= -\varrho^2\cos^2\varphi\sin^3\vartheta - \varrho^2\sin^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \varrho^2\cos^2\varphi\cos^2\vartheta\sin\vartheta - \\ &\quad - \varrho^2\sin^2\varphi\sin^3\vartheta = -\varrho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\cos^2\vartheta\sin\vartheta + \\ &\quad - \varrho^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\sin^3\vartheta = -\varrho^2\sin\vartheta(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = -\varrho^2\sin\vartheta. \end{aligned}$$



Obr. 3.12: Sférické souřadnice

Věnujme nyní pozornost geometrickému významu sférických souřadnic bodu T majícího kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Označme T' kolmý průmět bodu T do souřadnicové roviny xy, který má souřadnice $[x, y, 0]$. Označme ϱ vzdálenost bodu T od počátku O kartézské souřadnicové soustavy. Dále označme φ úhel, který svírá polopřímka $\overrightarrow{OT'}$ s kladnou částí osy x (analogicky jako v polárních souřadnicích). Konečně označme ϑ úhel, který svírá polopřímka $\overrightarrow{OT}$ s kladnou částí osy z. Polohu bodu T v prostoru pak určíme trojicí čísel $[\varrho, \varphi, \vartheta]$, což jsou sférické souřadnice bodu T — viz obr. 3.12. Protože $\triangle OT'T$ je pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu T', platí $\left|OT'\right| = \varrho \sin\vartheta$ a $z = \varrho\cos\vartheta$. Přitom vzdálenost ϱ je nezáporná, úhel φ volíme obvykle z intervalu délky 2π a úhel ϑ je obvykle z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Všimněme si, že při konstantním $\varrho_0 > 0$ je rovnicí $\varrho = \varrho_0$ určena kulová plocha se středem v počátku o poloměru ϱ_0, při konstantním $\vartheta_0 \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ je rovnicí $\vartheta = \vartheta_0$ v $\mathbb{R}^3$ dána část rotační kuželové plochy s vrcholem v počátku a osou v souřadnicové ose z, zatímco při konstantním $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ rovnice $\varphi = \varphi_0$ v R^3 popisuje polorovinu, jejíž hranicí je souřadnicová osa z. Transformace do sférických souřadnic se používá hlavně v případě, kdy integrační obor je koule nebo její vhodná část.

Transformace do zobecněných válcových souřadnic

Transformace do zobecněných válcových (cylindrických) souřadnic ϱ, φ, z je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= a\varrho\cos\varphi, \\ y &= b\varrho\sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned} \tag{3.15}$$

kde $a \neq 0$, $b \neq 0$ jsou konstanty. Jakobián zobrazení (3.15) je roven

$$J(\varrho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi & g_z \\ h_\varrho & h_\varphi & h_z \\ k_\varrho & k_\varphi & k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\varrho\sin\varphi & 0 \\ b\sin\varphi & b\varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= ab\varrho(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = ab\varrho.$$

Používá se nejčastěji, je-li integrační obor eliptický válec nebo jeho vhodná část.

Transformace do zobecněných sférických souřadnic

Transformace do zobecněných sférických (kulových) souřadnic ϱ, φ, ϑ je dána vztahy

$$\begin{aligned} x &= a\varrho\cos\varphi\sin\vartheta, \\ y &= b\varrho\sin\varphi\sin\vartheta, \\ z &= c\varrho\cos\vartheta, \end{aligned} \tag{3.16}$$

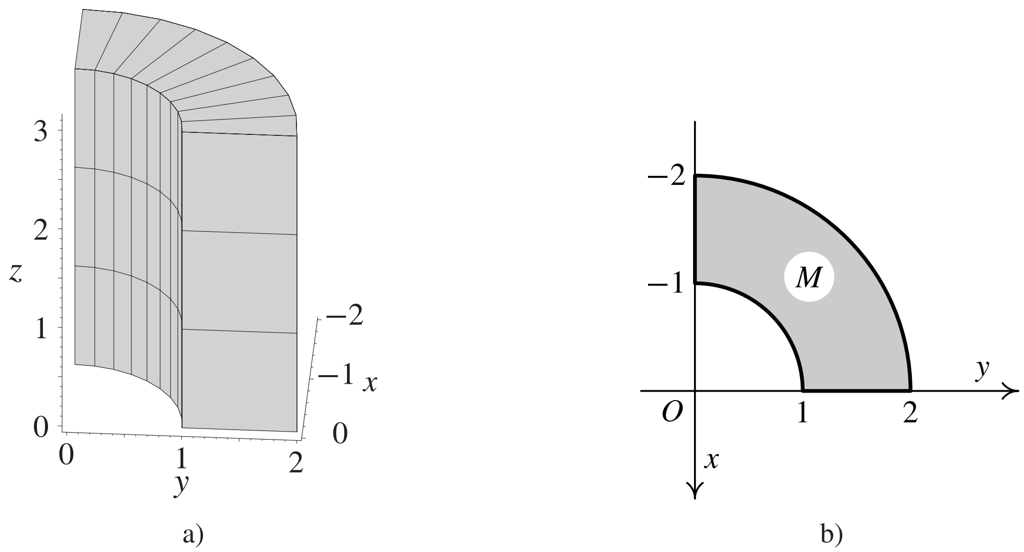
kde $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ jsou konstanty. Jakobián zobrazení (3.16) je roven

$$J(\varrho, \varphi, \vartheta) = \begin{vmatrix} g_\varrho & g_\varphi & g_\vartheta \\ h_\varrho & h_\varphi & h_\vartheta \\ k_\varrho & k_\varphi & k_\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi\sin\vartheta & -a\varrho\sin\varphi\sin\vartheta & a\varrho\cos\varphi\cos\vartheta \\ b\sin\varphi\sin\vartheta & b\varrho\cos\varphi\sin\vartheta & b\varrho\sin\varphi\cos\vartheta \\ c\cos\vartheta & 0 & -c\varrho\sin\vartheta \end{vmatrix} =$$
$$= abc \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -\varrho\sin\varphi\sin\vartheta & \varrho\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & \varrho\cos\varphi\sin\vartheta & \varrho\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -\varrho\sin\vartheta \end{vmatrix} = -abc\varrho^2\sin\vartheta.$$

Používá se nejčastěji, je-li integrační obor elipsoid nebo jeho vhodná část.

Příklad 3.21. Vypočtěte $\displaystyle\iiint_A xz\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je množina omezená plochami $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$ a ležící v průniku poloprostorů $x \leqq 0$, $y \geqq 0$.

Řešení. Rovnice $x^2 + y^2 = 1$ a $x^2 + y^2 = 4$ zadávají rotační válcové plochy s osou v souřadnicové ose z o poloměrech 1 a 2. Ty určují dutý válec, z něhož je rovinami $z = 0$ a $z = 3$ odříznuta část o výšce 3. Z ní pak nerovnosti $x \leqq 0$ a $y \geqq 0$ určí jednu čtvrtinu — viz obr. 3.13 a). Průmětem tohoto tělesa do roviny xy je množina M, představující jednu čtvrtinu mezikruží ve druhém kvadrantu — viz obr. 3.13 b).



Obr. 3.13

Vyjádření množiny M v polárních souřadnicích je snadné — zřejmě $\pi/2 \leqq \varphi \leqq \pi$ a $1 \leqq \varrho \leqq 2$. Obrazem množiny A v transformaci do cylindrických souřadnic je tedy množina

$$B: \quad \begin{aligned} \frac{\pi}{2} \leqq \varphi &\leqq \pi, \\ 1 \leqq \varrho &\leqq 2, \\ 0 \leqq z &\leqq 3, \end{aligned}$$

což je trojrozměrný interval. Použijeme větu 3.19. Za množinu Ω v ní lze zvolit trojrozměrný otevřený interval $\Omega \supset B$, který bude mít jen nepatrně větší rozměry než B. Na něm bude zobrazení F dané rovnicemi (3.13) regulární a prosté. Vzniklý trojný integrál vypočteme pomocí Fubiniovy věty. Výpočet proběhne takto:

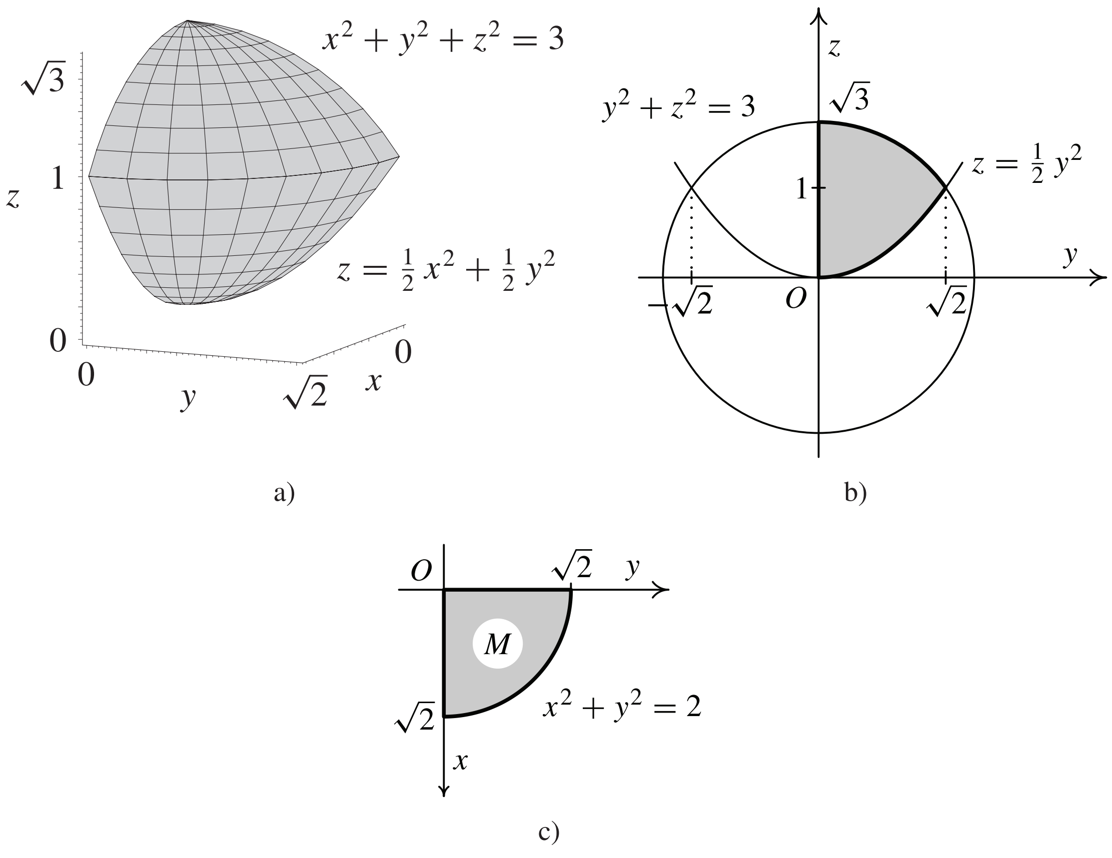
$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_A xz\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \\ &= \iiint\limits_B \varrho\cos\varphi \cdot z\,\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} \cdot \varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\ &= \iiint\limits_B \varrho^3 z\cos\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_{\pi/2}^{\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_1^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^3 z\,\mathrm{d}z = \\ &= \big[\sin\varphi\big]_{\pi/2}^{\pi} \cdot \left[\frac{1}{4}\varrho^4\right]_1^2 \cdot \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^3 = (0-1)\cdot\frac{16-1}{4}\cdot\frac{9-0}{2} = -\frac{135}{8}\,. \end{aligned}$$

▲

Příklad 3.22. Vypočtěte $\iiint\limits_A 4xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je určena podmínkami $z \geqq x^2/2 + y^2/2$, $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3$, $x \geqq 0$ a $y \geqq 0$.

Řešení. Rovnice $z = x^2/2+y^2/2$ určuje rotační paraboloid s osou v souřadnicové ose z a vrcholem v počátku. Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ určuje kulovou plochu se středem v počátku o poloměru $\sqrt{3}$. Půjde tedy o rotační těleso, které je zdola omezené paraboloidem a shora kulovou plochou. Nerovnosti $x \geqq 0$ a $y \geqq 0$ pak říkají, že z tohoto tělesa máme uvažovat jen čtvrtinu — viz obr. 3.14 a).

Abychom množinu A popsali v cylindrických souřadnicích, uvažujme její řez souřadnicovou rovinou $x = 0$. Výsledek je znázorněn na obr. 3.14 b). Určíme souřadnice průsečíku paraboly $z = y^2/2$ a kružnice $y^2 + z^2 = 3$. Dosazením první rovnice do druhé obdržíme kvadratickou rovnici $z^2 + 2z - 3 = 0$, která má kořeny 1 a -3. Pro nás má smysl pouze kladný kořen. K němu pak určíme, že $y = \pm\sqrt{2}$. Průsečíky tedy mají souřadnice $\left[\pm\sqrt{2}, 1\right]$. Z toho je vidět, že



Obr. 3.14

kolmým průmětem M množiny A do roviny xy je čtvrtkruh se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{2}$, ležící v prvním kvadrantu — viz obr. 3.14 c).

Vyjádření množiny M v polárních souřadnicích je snadné: $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$ a $0 \leqq \varrho \leqq \sqrt{2}$. Dále dosazením z rovnic (3.13) do rovnice paraboloidu dostaneme

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}(\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi) = \frac{1}{2}\varrho^2$$

a do rovnice kulové plochy (její horní poloviny) dostaneme

$$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2} = \sqrt{3 - \varrho^2\cos^2\varphi - \varrho^2\sin^2\varphi} = \sqrt{3 - \varrho^2}.$$

Množina A se tedy při přechodu k cylindrickým souřadnicím transformuje na množinu B, jejíž popis je:

$$B: \quad \begin{aligned} 0 \leqq \varphi &\leqq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leqq \varrho &\leqq \sqrt{2}, \\ \frac{1}{2}\varrho^2 \leqq z &\leqq \sqrt{3 - \varrho^2}. \end{aligned}$$

Větu 3.19 tentokrát není možné použít. Všechny body z B tvaru $[0, \varphi, z]$, kde $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, se transformací F danou rovnicemi (3.13) zobrazí na body $[0, 0, z]$, tj. F není prosté ani na množině B. Jsou však splněny předpoklady věty 3.20, když za množinu B_1 zvolíme vnitřek množiny B. Na vzniklý integrál použijeme Fubiniovu větu. Vzhledem k popisu množiny B je přitom nutné, aby integrace vzhledem k proměnné z proběhla dříve než integrace vzhledem k proměnné ϱ. Pořadí integrace vzhledem k proměnné φ je libovolné. Při výpočtu použijeme mimo jiné vzorec $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$. Vyjde nám:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A 4xyz \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_B 4\varrho\cos\varphi \cdot \varrho\sin\varphi \cdot z \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\ &= \iiint_B 2\varrho^3 z \sin 2\varphi \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{\varrho^2/2}^{\sqrt{3-\varrho^2}} 2\varrho^3 z \sin 2\varphi \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^3 \sin 2\varphi \big[z^2\big]_{\varrho^2/2}^{\sqrt{3-\varrho^2}} \,\mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} \varrho^3 \sin 2\varphi \left(3 - \varrho^2 - \frac{1}{4}\varrho^4\right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} \sin 2\varphi \left(3\varrho^3 - \varrho^5 - \frac{1}{4}\varrho^7 \right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \left[\frac{3}{4}\varrho^4 - \frac{1}{6}\varrho^6 - \frac{1}{32}\varrho^8 \right]_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \left(3 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{7}{6} \int_0^{\pi/2} \sin 2\varphi \, \mathrm{d}\varphi =$$
$$= -\frac{7}{12} \left[\cos 2\varphi \right]_0^{\pi/2} = -\frac{7}{12}(-1-1) = \frac{7}{6}.$$

▲

Příklad 3.23. Vypočtěte $\displaystyle\iiint_A \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+z^2+1}$, kde množina A je omezená plochami $y = 2 - \sqrt{x^2+z^2}$ a $y = 1$.

Řešení. Rovnice první plochy je rovnicí části rotační kuželové plochy v poloprostoru $y \leqq 2$ s osou rotace v souřadnicové ose y a vrcholem v bodě $[0, 2, 0]$. Toto je vidět ze skutečnosti, že řezy plochy rovinami $y = c$, kde $c < 2$, jsou kružnice, zatímco průměty plochy do rovin $x = 0$, resp. $z = 0$, mají rovnice $y = 2 - |z|$, resp. $y = 2 - |x|$. Množina A je tedy kuželem na obr. 3.15 a). Můžeme ji snadno popsat v cylindrických souřadnicích, jen musíme oproti rovnicím (3.13) zaměnit role souřadnicových os, což nemá vliv na vyjádření jakobiánu v polárních souřadnicích příslušné souřadnicové roviny. Zvolíme

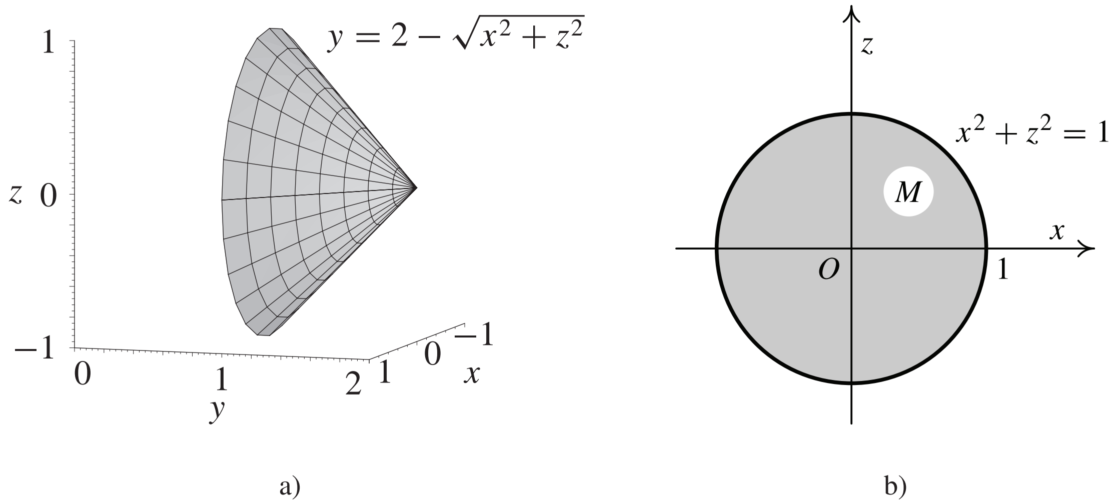
$$\begin{aligned} x &= \varrho\cos\varphi, \\ z &= \varrho\sin\varphi, \qquad |J| = \varrho. \\ y &= y, \end{aligned}$$

Průmětem M množiny A do souřadnicové roviny xz je kruh. Jeho rovnici dostaneme dosazením vztahu $y = 1$ do rovnice kuželové plochy. Vyjde $x^2 + z^2 = 1$, takže poloměr kruhu je jedna (obr. 3.15 b)). Bude tedy $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ a $0 \leqq \varrho \leqq 1$. Dále dosadíme vyjádření x a z pomocí φ a ϱ do rovnice poloviny kuželové plochy. Vyjde

$$y = 2 - \sqrt{x^2+z^2} = 2 - \sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi} = 2 - \varrho.$$

Množina A se tedy transformuje na množinu B, jejíž popis je:

$$B\colon \begin{aligned} &0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ &0 \leqq \varrho \leqq 1, \\ &1 \leqq y \leqq 2 - \varrho. \end{aligned}$$



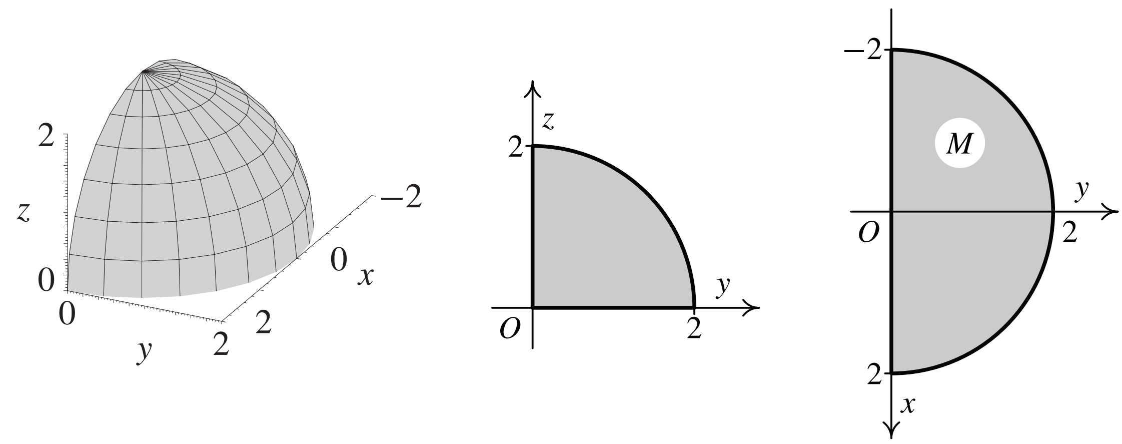
Obr. 3.15

Použijeme větu 3.20. Za množinu B_1 se v ní zvolí vnitřek množiny B. Výsledný integrál upravíme pomocí Fubiniovy věty. Vzhledem k popisu množiny B musí integrace podle y předcházet integraci podle ϱ. Integrace podle φ může proběhnout kdykoli. Dostaneme:

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_A \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+z^2+1} = \iiint\limits_B \frac{\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}y}{\varrho^2+1} = \\
&= \int_0^1 \left\{ \int_1^{2-\varrho} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\varrho\,\mathrm{d}\varphi}{\varrho^2+1} \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}\varrho = \int_0^1 \left\{ \int_1^{2-\varrho} \frac{\varrho}{\varrho^2+1} \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}\varrho = \\
&= \int_0^1 \frac{2\pi\varrho}{\varrho^2+1} \left[y\right]_1^{2-\varrho} \mathrm{d}\varrho = 2\pi \int_0^1 \frac{\varrho-\varrho^2}{\varrho^2+1}\,\mathrm{d}\varrho = \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{-\varrho^2-1+\varrho+1}{\varrho^2+1}\,\mathrm{d}\varrho = 2\pi \int_0^1 \left(-1 + \frac{1}{2}\,\frac{2\varrho}{\varrho^2+1} + \frac{1}{\varrho^2+1} \right) \mathrm{d}\varrho = \\
&= 2\pi \left[-\varrho + \frac{1}{2}\ln(\varrho^2+1) + \operatorname{arctg}\varrho \right]_0^1 = 2\pi \left(-1 + \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} \right).
\end{aligned}
$$
▲

Příklad 3.24. Vypočtěte $\displaystyle\iiint\limits_A (x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je určena nerovnostmi $x^2+y^2+z^2 \leqq 4$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$.

Řešení. Rovnice $x^2+y^2+z^2 = 4$ je rovnicí kulové plochy se středem v počátku O souřadnicového systému a poloměrem 2. První podmínka tedy určuje kouli. Další



a) b) c)

Obr. 3.16

dvě podmínky určují poloprostory, vymezené rovinami xz a xy. Celkově dostáváme, že množina A je čtvrtina koule, která je znázorněná na obr. 3.16 a). Pro výpočet integrálu použijeme transformaci do sférických souřadnic.

Libovolná rovina, která prochází osou z a svírá s kladnou částí osy x úhel z intervalu $(0, \pi)$, protne množinu A ve čtvrtkruhu — viz obr. 3.16 b), kde je znázorněn řez rovinou yz. Z toho vidíme, že $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/2$.

Dále průmětem M množiny A do roviny xy je půlkruh z obr. 3.16 c). To znamená, že $0 \leqq \varphi \leqq \pi$. Konečně je zřejmě $0 \leqq \varrho \leqq 2$. Obrazem množiny A v transformaci do sférických souřadnic tudíž bude množina

$$B: \begin{aligned} &0 \leqq \varrho \leqq 2, \\ &0 \leqq \varphi \leqq \pi, \\ &0 \leqq \vartheta \leqq \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

což je trojrozměrný interval. Zobrazení Φ dané rovnicemi (3.14) není na této množině prosté. Např. $\Phi(0, \varphi, \vartheta) = (0, 0, 0)$ pro libovolná φ a ϑ, tj. celá jedna stěna kvádru B se zobrazí na počátek O. Proto použijeme větu 3.20. Za množinu B_1 z této věty lze zvolit vnitřek intervalu B. Transformovaný integrál rozdělíme na dva a na každý z nich pak použijeme Fubiniovu větu. S použitím vztahů (3.14) a $|J| = \varrho^2 \sin\vartheta$ pro sférické souřadnice a jejich jakobián dostaneme:

$$I = \iiint\limits_A (x + y + z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \iiint_B (\varrho\cos\varphi\sin\vartheta + \varrho\sin\varphi\sin\vartheta + \varrho\cos\vartheta)\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \iiint_B \varrho^3(\cos\varphi + \sin\varphi)\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta + \iiint_B \varrho^3\cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^\pi (\cos\varphi + \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta +$$

$$+ \int_0^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^2 \cdot \big[\sin\varphi - \cos\varphi\big]_0^\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\vartheta - \frac{\sin 2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^2 \cdot \big[\varphi\big]_0^\pi \times$$

$$\times \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{\cos 2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 4\pi.$$

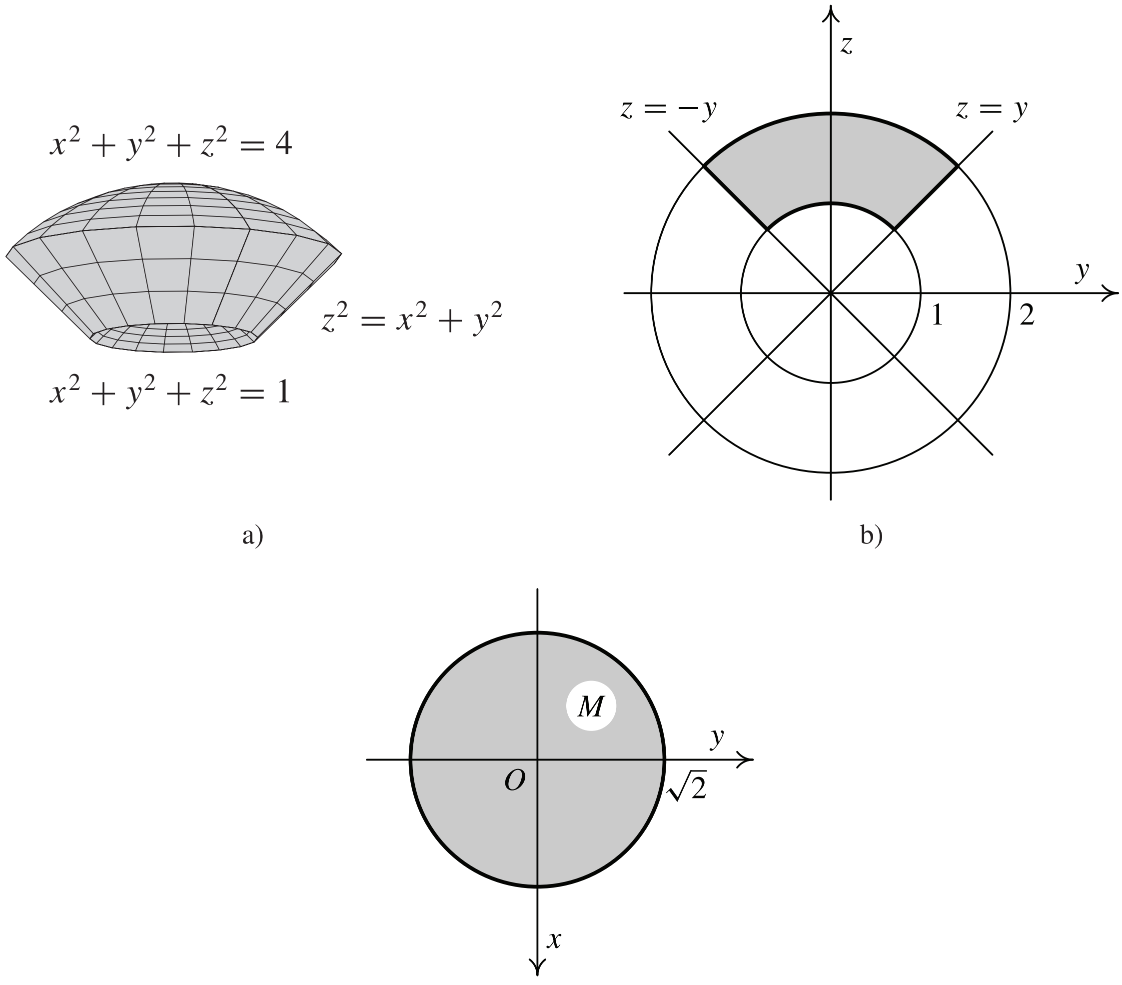
▲

Příklad 3.25. Vypočtěte $\displaystyle\iiint_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je určená nerovnostmi $z \geqq \sqrt{x^2+y^2}$, $1 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq 4$.

Řešení. Rovnice $z = \sqrt{x^2+y^2}$ určuje rotační kuželovou plochu v poloprostoru $z \geqq 0$ s osou v souřadnicové ose z a vrcholem v počátku. První nerovnost tedy zadává množinu bodů ležících na a nad horní polovinou zmíněné rotační kuželové plochy. Dále rovnice $x^2+y^2+z^2 = r^2$ je pro každé $r > 0$ rovnicí kulové plochy se středem v počátku O a poloměrem r. Podmínka $1 \leqq x^2+y^2+z^2 \leqq 4$ tudíž říká, že množina A je rovněž omezena dvěma soustřednými kulovými plochami o poloměrech 1 a 2. Výsledek je znázorněn na obr. 3.17 a). Pro výpočet integrálu použijeme transformaci do sférických souřadnic.

Protože zadané těleso je rotační, bude řez libovolnou rovinou procházející rotační souřadnicovou osou z stejný. Na obr. 3.17 b) je znázorněn takový řez rovinou yz. Z něho určíme rozmezí pro úhel ϑ. Protože přímka $y = z$ je osou prvního kvadrantu, svírá s osou z úhel $45\,^\circ$, což znamená, že $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/4$.

Průmětem M množiny A do roviny xy je zřejmě kruh se středem v počátku O, jehož hraniční kružnice je průmětem kružnice, kterou dostaneme jako průnik kuželové plochy a větší kulové plochy — srovnejte obr. 3.17 a). Vyloučením proměnné z z rovnic $z^2 = x^2+y^2$ a $x^2+y^2+z^2 = 4$ dostaneme, že $x^2+y^2 = 2$, tj. poloměr kruhu M je $\sqrt{2}$ — viz obr. 3.17 c). Tento údaj však není důležitý, určili jsme jej jen pro úplnost; podstatné je, že pro úhel φ platí $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$.



Obr. 3.17

Konečně pro sférickou souřadnici ϱ zřejmě platí $1 \leqq \varrho \leqq 2$. Obrazem množiny A při transformaci do sférických souřadnic tedy je množina

$$B:\begin{array}{l} 1 \leqq \varrho \leqq 2, \\ 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 \leqq \vartheta \leqq \dfrac{\pi}{4}, \end{array}$$

což je trojrozměrný interval. Zobrazení F dané rovnicemi (3.14) není na B prosté. Platí totiž např. $F(\varrho, 0, \vartheta) = F(\varrho, 2\pi, \vartheta)$ pro libovolná $1 \leqq \varrho \leqq 2$ a $0 \leqq \vartheta \leqq \pi/4$ nebo $F(\varrho, \varphi, 0) = F(\varrho, 0, 0)$ pro libovolná $1 \leqq \varrho \leqq 2$ a $0 \leqq \varphi \leqq$ $\leqq 2\pi$. Proto použijeme větu 3.20. Za množinu B_1 z této věty lze zvolit vnitřek intervalu B. Na transformovaný integrál použijeme Fubiniovu větu. S použitím vztahů (3.14) pro sférické souřadnice a jejich jakobián a rovnosti $x^2+y^2+z^2 = \varrho^2$ dostaneme:

$$I = \iiint\limits_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_B \varrho\cdot\varrho^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_1^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\pi/4}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_1^2\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\cdot\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi/4} =$$

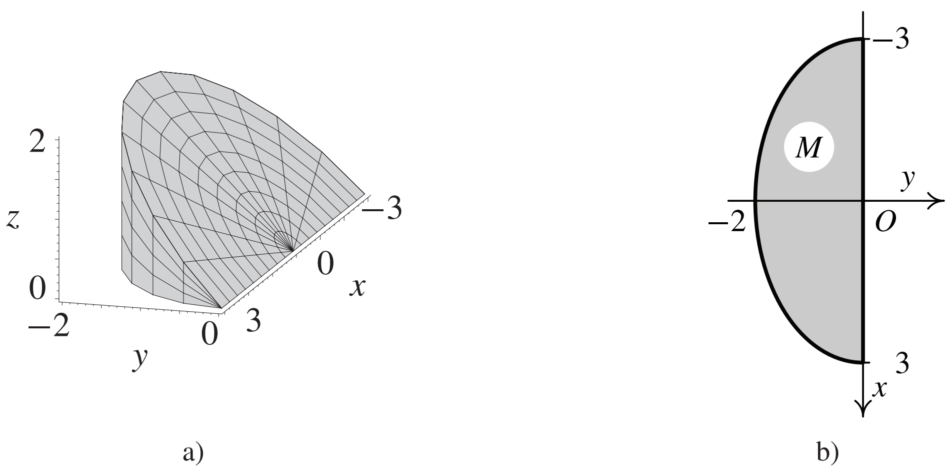
$$= \frac{15}{4}\cdot 2\pi\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) = \frac{15\pi\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}.$$

▲

Příklad 3.26. Vypočtěte $\iiint\limits_A yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde množina A je určena nerovnostmi $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\leqq 1$ a $0\leqq z\leqq -y$.

Řešení. Rovnice $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ určuje eliptický válec s osou v souřadnicové ose z. Dále $z=0$ a $z=-y$ jsou rovnice dvou rovin, které ze zmíněného válce vytnou „klín“ znázorněný na obr. 3.18 a). Kolmým průmětem množiny A do roviny xy je polovina elipsy znázorněná na obr. 3.18 b). Použijeme transformaci do zobecněných cylindrických souřadnic. V (3.15) zvolíme $a=3$, $b=2$:

$$\begin{aligned} x &= 3\varrho\cos\varphi, \\ y &= 2\varrho\sin\varphi, \qquad |J| = 6\varrho. \\ z &= z, \end{aligned}$$



a) b)

Obr. 3.18

Změna měřítek na souřadnicových osách x a y způsobí, že polovina elipsy přejde v polovinu jednotkového kruhu, který musíme vyjádřit v polárních souřadnicích. Pro ně bude tudíž platit $\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi$ a $0 \leqq \varrho \leqq 1$. Dosazením transformačních rovnic do omezení pro z dostaneme $0 \leqq z \leqq -2\varrho \sin\varphi$. Množina A se tedy transformuje na množinu

$$B\colon\ \begin{aligned} &\pi \leqq \varphi \leqq 2\pi,\\ &0 \leqq \varrho \leqq 1,\\ &0 \leqq z \leqq -2\varrho \sin\varphi. \end{aligned}$$

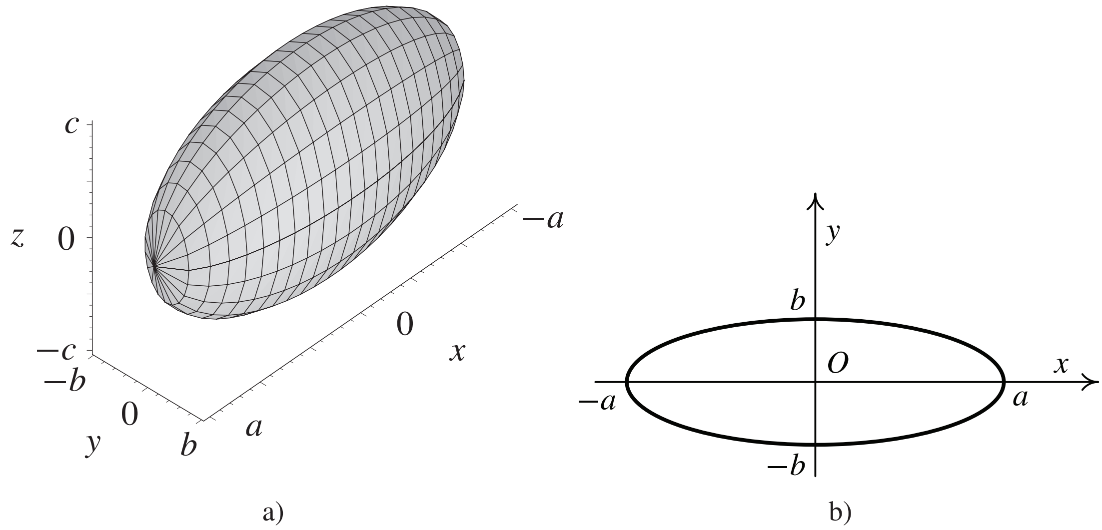
Použijeme větu 3.20 (můžete se přesvědčit, že transformace není na B prostá). Vzniklý integrál vypočítáme pomocí Fubiniovy věty. Množina B je elementární vzhledem k $\varrho\varphi$. Nejprve tedy musíme integrovat podle proměnné z (v mezích pro tuto proměnnou figuruje φ i ϱ), další pořadí je libovolné. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_A yz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_B 2\varrho\sin\varphi\cdot z\cdot 6\varrho\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =\\
&= \iiint\limits_B 12\varrho^2 z\sin\varphi\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z =\\
&= \int_\pi^{2\pi}\left\{\int_0^1\left(\int_0^{-2\varrho\sin\varphi} 12\varrho^2 z\sin\varphi\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi =\\
&= \int_\pi^{2\pi}\left\{\int_0^1 6\varrho^2\sin\varphi\big[z^2\big]_0^{-2\varrho\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi = \int_\pi^{2\pi}\left\{\int_0^1 24\varrho^4\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varrho\right\}\mathrm{d}\varphi =\\
&= \int_\pi^{2\pi}\frac{24}{5}\sin^3\varphi\big[\varrho^5\big]_0^1\,\mathrm{d}\varphi = \frac{24}{5}\int_\pi^{2\pi}(1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi =\\
&= \left|\begin{array}{c} \cos\varphi = t\\ -\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{d}t\\ \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}t\\ \pi \rightsquigarrow -1,\ 2\pi \rightsquigarrow 1 \end{array}\right| = -\frac{24}{5}\int_{-1}^1 (1-t^2)\,\mathrm{d}t = -\frac{24}{5}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^1 = -\frac{32}{5}.
\end{aligned}$$

▲

Příklad 3.27. Vypočtěte $\displaystyle\iiint\limits_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, kde $A\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqq 1$, $a, b, c > 0$.

Řešení. Integračním oborem A je elipsoid z obrázku 3.19 a). Vzhledem k definicím měřitelné množiny a trojného integrálu přes měřitelnou množinu bude



a) b)

Obr. 3.19

výsledkem vzorec pro míru elipsoidu s poloosami a, b, c. Použijeme zobecněné sférické souřadnice. Zvolíme

$$\begin{aligned} x &= a\varrho \cos\varphi \sin\vartheta, \\ y &= b\varrho \sin\varphi \sin\vartheta, \qquad |J| = abc\varrho^2 \sin\vartheta. \\ z &= c\varrho \cos\vartheta, \end{aligned}$$

Změna měřítek na souřadnicových osách způsobí, že elipsoid přejde v jednotkovou kouli. Tu musíme vyjádřit ve sférických souřadnicích. Množina A se přitom transformuje v množinu

$$B\colon \begin{aligned} 0 &\leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ 0 &\leqq \varrho \leqq 1, \\ 0 &\leqq \vartheta \leqq \pi. \end{aligned}$$

To je trojrozměrný interval, takže na integrál vzniklý po použití věty 3.20 můžeme snadno aplikovat Fubiniovu větu. Dostaneme:

$$\iiint_A \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_B abc\varrho^2 \sin\vartheta \,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= abc \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \varrho^2 \,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{\pi} \sin\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= abc\big[\varphi\big]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^1 \cdot \big[-\cos\vartheta\big]_0^{\pi} = abc \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}\,\pi abc.$$

▲

3.3. Transformace n-rozměrného integrálu

Pokud jde o transformaci n-rozměrného integrálu, je situace naprosto analogická jako u transformace dvojného či trojného integrálu. Uvedeme proto přímo definice spojitě diferencovatelného zobrazení, jakobiánu a regulárního zobrazení.

Definice 3.28. Předpokládejme, že $B \subseteq \mathbb{R}^n$ a nechť g_j, $j = 1, 2, \dots, n$, jsou funkce definované na množině B. Buď $F\colon B \to \mathbb{R}^n$ zobrazení, které přiřazuje libovolnému bodu $[u_1, u_2, \dots, u_n] \in B$ bod $F(u_1, u_2, \dots, u_n) = [g_1(u_1, u_2, \dots, u_n), g_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, g_n(u_1, u_2, \dots, u_n)]$. Řekneme, že zobrazení F je *spojitě diferencovatelné* v B, jestliže existuje otevřená množina $\Omega \supseteq B$ taková, že funkce g_j $(j = 1, 2 \dots, n)$ lze rozšířit na Ω takovým způsobem, aby měly v Ω spojité parciální derivace prvního řádu podle všech svých proměnných.

Je-li $F\colon B \to \mathbb{R}^n$ spojitě diferencovatelné zobrazení v B, determinant

$$J = \begin{vmatrix} g_{1|u_1} & g_{1|u_2} & \cdots & g_{1|u_n} \\ g_{2|u_1} & g_{2|u_2} & \cdots & g_{2|u_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n|u_1} & g_{n|u_2} & \cdots & g_{n|u_n} \end{vmatrix},$$

kde $g_{i|u_j} = \frac{\partial}{\partial u_j} g_i$, se při označení použitém v definici 3.28 nazývá *jakobián* zobrazení F. Jakobián $J\colon B \to \mathbb{R}$ je funkcí proměnných $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Definice 3.29. Spojitě diferencovatelné zobrazení $F\colon B \to \mathbb{R}^n$ na otevřené množině B se nazývá *regulární*, je-li jeho jakobián J různý od nuly v každém bodě množiny B.

Věty o transformaci n-rozměrného integrálu lze zformulovat takto:

Věta 3.30. *Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^n$ je uzavřená měřitelná množina a $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $B \subseteq \Omega$. Nechť $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení s jakobiánem J takové, že $F(u_1, u_2, \dots, u_n) = [g_1(u), g_2(u), \dots, g_n(u)]$ pro každé $u = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in B$. Označme $A = F(B)$ a předpokládejme,že funkce $f\colon A \to \mathbb{R}$ je spojitá.*

Pak platí vztah

$$\begin{aligned} &\int \cdots \int_A f(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n = \\ &\qquad = \int \cdots \int_B f(g_1(u), g_2(u), \cdots, g_n(u))|J(u)|\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 \dots \mathrm{d}u_n. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Věta 3.31. *Nechť $B_1 \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, kde B_1 je otevřená množina, B je měřitelná množina a platí $\mathrm{m}_n(B \setminus B_1) = 0$.*

Buď F spojitě diferencovatelné zobrazení B do $\mathbb{R}^n$, které je regulární a prosté v B_1. Označme $A = F(B)$, $A_1 = F(B_1)$. Předpokládejme, že množina A je měřitelná a platí $\mathrm{m}_n(A \setminus A_1) = 0$.

Buď funkce f ohraničená na množině A a spojitá na množině A_1. Nechť funkce, která každému $u \in B$ přiřazuje hodnotu $f(g_1(u), g_2(u), \dots, g_n(u))|J(u)|$, je ohraničená.

Pak platí vztah (3.17)*, tj.*

$$\int_A \cdots \int f(x)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int_B \cdots \int f(g_1(u), g_2(u), \dots, g_n(u))|J(u)|\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_n.$$

3.3.1. Některé běžné typy transformací n-rozměrného integrálu

Uveďme, podobně jako u dvojného a trojného integrálu, některé běžně užívané transformace $x_1 = g_1(u_1, u_2, \dots, u_n)$, $x_2 = g_2(u_1, u_2, \dots, u_n), \dots, x_n = g_n(u_1, u_2, \dots, u_n)$ n-rozměrného integrálu.

Posunutí

Posunutí (*translace*) je dáno rovnicemi

$$x_1 = u_1 + a_1,\ \ x_2 = u_2 + a_2,\ \ \dots,\ \ x_n = u_n + a_n, \tag{3.18}$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou konstanty. Jakobián této transformace je $J = 1$.

Dilatace

Dilatace (ve speciálním případě $a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ *změna měřítek na souřadnicových osách*) je dána rovnicemi

$$x_1 = a_1 u_1,\ \ x_2 = a_2 u_2,\ \ \dots,\ \ x_n = a_n u_n \tag{3.19}$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou nenulové konstanty. Pro jakobián tohoto zobrazení platí $J(u_1, u_2, \dots, u_n) = a_1 a_2 \cdots a_n$.

Transformace do sférických souřadnic

Transformace do sférických souřadnic $\varrho, \varphi, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-2}$ (používá se též název *hypersférické souřadnice*), kde $n \geqq 2$ (pro $n = 2$ jde o polární souřadnice), je dána vztahy

$$\begin{aligned}
x_1 &= \varrho \cos\varphi \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_2 &= \varrho \sin\varphi \sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_3 &= \varrho \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_4 &= \varrho \cos\vartheta_2 \cdots \sin\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
&\vdots\\
x_{n-2} &= \varrho \cos\vartheta_{n-4} \sin\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_{n-1} &= \varrho \cos\vartheta_{n-3} \sin\vartheta_{n-2},\\
x_n &= \varrho \cos\vartheta_{n-2}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Označme $J_n = J_n(\varrho, \varphi, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{n-2})$ jakobián transformace (3.20). Pak, značí-li $g_1^n, g_2^n, \dots, g_n^n$ pravé strany ve vztazích (3.20) (horní index n znamená, že jde o transformaci v $\mathbb{R}^n$), máme

$$J_n = \begin{vmatrix}
g^n_{1|\varrho} & g^n_{1|\varphi} & g^n_{1|\vartheta_1} & \cdots & g^n_{1|\vartheta_{n-3}} & g^n_{1|\vartheta_{n-2}}\\
g^n_{2|\varrho} & g^n_{2|\varphi} & g^n_{2|\vartheta_1} & \cdots & g^n_{2|\vartheta_{n-3}} & g^n_{2|\vartheta_{n-2}}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
g^n_{n-1|\varrho} & g^n_{n-1|\varphi} & g^n_{n-1|\vartheta_1} & \cdots & g^n_{n-1|\vartheta_{n-3}} & g^n_{n-1|\vartheta_{n-2}}\\
g^n_{n|\varrho} & g^n_{n|\varphi} & g^n_{n|\vartheta_1} & \cdots & g^n_{n|\vartheta_{n-3}} & g^n_{n|\vartheta_{n-2}}
\end{vmatrix}. \tag{3.21}$$

Platí $g_k^n = g_k^{n-1} \sin\vartheta_{n-2}$, $k = 1, \dots, n-1$. Označme ještě $h_1^n, h_2^n, \dots, h_n^n$ pravé strany ve vztazích (3.20) bez proměnné ϱ, tj. $g_k^n = \varrho h_k^n$, $k = 1, \dots, n$. Vypočteme-li všechny parciální derivace vystupující v determinantu (3.21), vidíme, že z druhého až $(n-1)$-ního sloupce lze vytknout $\sin\vartheta_{n-2}$ a z n-tého sloupce lze vytknout ϱ. Dále vynásobíme první sloupec determinantu J_n funkcí $\sin\vartheta_{n-2}$ a přičteme k němu poslední sloupec vynásobený $\cos\vartheta_{n-2}$. Postupně dostaneme

$$J_n = \begin{vmatrix}
g^{n-1}_{1|\varrho}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{1|\varphi}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{1|\vartheta_1}\sin\vartheta_{n-2} & \cdots & g^{n-1}_{1|\vartheta_{n-3}}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{1}\cos\vartheta_{n-2}\\
g^{n-1}_{2|\varrho}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{2|\varphi}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{2|\vartheta_1}\sin\vartheta_{n-2} & \cdots & g^{n-1}_{2|\vartheta_{n-3}}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{2}\cos\vartheta_{n-2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
g^{n-1}_{n-1|\varrho}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{n-1|\varphi}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{n-1|\vartheta_1}\sin\vartheta_{n-2} & \cdots & g^{n-1}_{n-1|\vartheta_{n-3}}\sin\vartheta_{n-2} & g^{n-1}_{n-1}\cos\vartheta_{n-2}\\
\cos\vartheta_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\varrho\sin\vartheta_{n-2}
\end{vmatrix} =$$

$$
= \varrho \sin^{n-2}\vartheta_{n-2} \begin{vmatrix} h_1^{n-1}\sin\vartheta_{n-2} & g_{1|\varphi}^{n-1} & g_{1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_1^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ h_2^{n-1}\sin\vartheta_{n-2} & g_{2|\varphi}^{n-1} & g_{2|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{2|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_2^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1}^{n-1}\sin\vartheta_{n-2} & g_{n-1|\varphi}^{n-1} & g_{n-1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{n-1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_{n-1}^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ \cos\vartheta_{n-2} & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin\vartheta_{n-2} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \varrho \sin^{n-3}\vartheta_{n-2} \begin{vmatrix} h_1^{n-1}(\sin^2\vartheta_{n-2}+\cos^2\vartheta_{n-2}) & g_{1|\varphi}^{n-1} & g_{1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_1^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ h_2^{n-1}(\sin^2\vartheta_{n-2}+\cos^2\vartheta_{n-2}) & g_{2|\varphi}^{n-1} & g_{2|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{2|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_2^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{n-1}^{n-1}(\sin^2\vartheta_{n-2}+\cos^2\vartheta_{n-2}) & g_{n-1|\varphi}^{n-1} & g_{n-1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{n-1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_{n-1}^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin\vartheta_{n-2} \end{vmatrix} =
$$

$$
= \varrho \sin^{n-3}\vartheta_{n-2} \begin{vmatrix} g_{1|\varrho}^{n-1} & g_{1|\varphi}^{n-1} & g_{1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_1^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ g_{2|\varrho}^{n-1} & g_{2|\varphi}^{n-1} & g_{2|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{2|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & g_2^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1|\varrho}^{n-1} & g_{n-1|\varphi}^{n-1} & h_{n-1|\vartheta_1}^{n-1} & \dots & g_{n-1|\vartheta_{n-3}}^{n-1} & h_{n-1}^{n-1}\cos\vartheta_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\sin\vartheta_{n-2} \end{vmatrix} = -\varrho\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}J_{n-1}.
$$

Opakovaným užitím tohoto výsledku postupně plyne

$$
\begin{aligned} J_n &= -\varrho\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}J_{n-1} = \varrho^2\sin^{n-3}\vartheta_{n-3}\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}J_{n-2} = \dots = \\ &= (-1)^{n-2}\varrho^{n-2}\sin\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\cdots\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}J_2. \end{aligned}
$$

Protože

$$
J_2 = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho,
$$

a $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, dostáváme

$$
J_n = (-1)^n\varrho^{n-1}\sin\vartheta_1\sin^2\vartheta_2\cdots\sin^{n-2}\vartheta_{n-2}. \tag{3.22}
$$

Snadno lze ověřit, že

$$
x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \varrho^2.
$$

Přitom souřadnice ϱ je nezáporná, úhel φ obvykle volíme z intervalu délky 2π a úhly ϑ_j ($j = 1, 2, \dots, n-2$) jsou obvykle z intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Zobrazení dané vztahy (3.20) zobrazí takovou množinu na celý prostor $\mathbb{R}^n$ a je prosté a regulární na jejím vnitřku — viz cvičení 2 k této kapitole. Geometricky lze vzorce (3.20) interpretovat následujícím způsobem: Hodnota ϱ je vzdálenost bodu $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ od počátku, tj. $\varrho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$. Pro kolmý průmět bodu x na souřadnicovou osu x_n platí $x_n = \varrho\cos\vartheta_{n-2}$, kde ϑ_{n-2} je úhel, který svírá průvodič bodu x, tj. vektor určený počátkem a bodem x, s kladným směrem osy x_n. Označme $x^{[1]}$ kolmý průmět bodu x do prostoru $x_n = 0$, tj. do podprostoru $\mathbb{R}^n$ určeného souřadnicemi $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Pro „délku“ ϱ_1 průvodiče bodu $x^{[1]}$ platí $\varrho_1 = \varrho \sin \vartheta_{n-2}$. Kolmý průmět bodu $x^{[1]}$ do souřadnicové osy x_{n-1} je tedy $x_{n-1} = \varrho_1 \cos \vartheta_{n-3} = \varrho \cos \vartheta_{n-3} \sin \vartheta_{n-2}$, kde ϑ_{n-3} je úhel, který svírá průvodič bodu $x^{[1]}$ s kladným směrem souřadnicové osy x_{n-1}. Nyní bod $x^{[1]}$ kolmo promítneme do podprostoru proměnných $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ a jeho průmět označíme $x^{[2]}$. Tímto způsobem postupujeme dále, až po konečném počtu kroků získáme všechny rovnosti v (3.20). Transformace do sférických souřadnic se u n-rozměrného integrálu používá hlavně v případě, kdy integrační obor je n-rozměrná koule nebo její vhodná část.

Příklad 3.32. Vypočtěte $\displaystyle\int \cdots \int_V \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^\alpha \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n$, kde $V = \left\{[x_1, x_2, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n \colon x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqq R^2\right\}$, přičemž $R > 0$, $\alpha \geqq 0$ jsou konstanty a $n \geqq 2$ je dané celé číslo.

Řešení. Předpokládejme, že $n \geqq 3$ a použijme transformaci do sférických souřadnic (3.20). Množina V touto transformací přejde v množinu V^*, která je vymezena následujícími nerovnostmi:

$$V^*\colon \quad \begin{array}{rcl} 0 \leqq & \varrho & \leqq R, \\ 0 \leqq & \varphi & \leqq 2\pi, \\ 0 \leqq & \vartheta_1 & \leqq \pi, \\ & \vdots & \\ 0 \leqq & \vartheta_{n-2} & \leqq \pi. \end{array}$$

Pro absolutní hodnotu jakobiánu zvolené transformace platí

$$|J| = \varrho^{n-1} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-2} \vartheta_{n-2}.$$

Aplikací věty 3.31 a Fubiniovy věty dostáváme

$$\int \cdots \int_V \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\right)^\alpha \mathrm{d}x_1 \,\mathrm{d}x_2 \dots \mathrm{d}x_n =$$

$$= \int \cdots \int_{V^*} \varrho^{2\alpha+n-1} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-2} \vartheta_{n-2} \,\mathrm{d}\varrho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta_1 \cdots \mathrm{d}\vartheta_{n-2} =$$

$$= \int_0^R \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \cdots \left(\int_0^\pi \varrho^{2\alpha+n-1} \sin \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_2 \cdots \sin^{n-2} \vartheta_{n-2} \right. \right. \right. \right. \times$$

$$\left.\left.\left.\times\, \mathrm{d}\vartheta_1\right)\cdots \mathrm{d}\vartheta_{n-2}\right]\mathrm{d}\varphi\right\}\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int_0^R \varrho^{2\alpha+n-1}\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin\vartheta_1\,\mathrm{d}\vartheta_1 \cdots \int_0^{\pi} \sin^{n-2}\mathrm{d}\vartheta_{n-2}. \qquad (3.23)$$

Užitím rekurentního vzorce

$$\int_0^{\pi} \sin^k\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{k-1}{k}\int_0^{\pi}\sin^{k-2}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta,$$

který platí (viz pozn. 3.33) pro každé $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 2$, snadno zjistíme, že

$$\int_0^{\pi} \sin^k\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{k-1}{k}\cdot\frac{k-3}{k-2}\cdots\frac{2}{3}\cdot\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$
$$= \frac{(k-1)!!}{k!!}[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 2\,\frac{(k-1)!!}{k!!} \qquad \text{pro } k \text{ liché}$$

a

$$\int_0^{\pi} \sin^k\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{k-1}{k}\cdot\frac{k-3}{k-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta = \pi\,\frac{(k-1)!!}{k!!} \qquad \text{pro } k \text{ sudé.}$$

Přitom $k!!$ definujeme vztahem $k!! = k\cdot(k-2)\cdot(k-4)\cdots 3\cdot 1$, je-li $k \geqq 3$ liché, a vztahem $k!! = k\cdot(k-2)\cdot(k-4)\cdots 4\cdot 2$, je-li $k \geqq 2$ sudé; dále klademe $0!! = 1$, $1!! = 1$. Položíme-li $\gamma_n = \pi$ pro n sudé a $\gamma_n = 2$ pro n liché, dostáváme dosazením do (3.23)

$$\int\cdots\int_V \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)^{\alpha}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\ldots\,\mathrm{d}x_n =$$
$$= \left[\frac{\varrho^{2\alpha+n}}{2\alpha+n}\right]_0^R \cdot [\varphi]_0^{2\pi}\cdot 2\cdot\pi\,\frac{1}{2}\cdot 2\,\frac{2}{3}\cdot\pi\,\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot 2\,\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdots\gamma_n\,\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!} =$$
$$= \frac{R^{2\alpha+n}}{2\alpha+n}\cdot 2\pi\cdot 2^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\cdot\pi^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{4\cdot 2}{5\cdot 3}\cdots\frac{(n-4)!!}{(n-3)!!}\cdot\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!} =$$
$$= \frac{R^{2\alpha+n}}{(2\alpha+n)(n-2)!!}\cdot 2^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}\cdot\pi^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}.$$

Přitom $\lfloor x\rfloor$ značí celou část čísla x. Snadno se ověří, že výsledek platí i pro $n = 2$. Podrobněji viz příklad 4.7 v kapitole 4. ▲

Poznámka 3.33. Při výpočtu integrálu v předcházejícím příkladu byl užit rekurentní vzorec pro integrál z k-té mocniny funkce sinus. Tento vzorec se snadno odvodí metodou per partes. Označme $I_k = \int_0^{\pi} \sin^k \vartheta \, d\vartheta$, kde $k \in \mathbb{N}$, $k \geqq 2$. Pak

$$
\begin{aligned}
I_k &= \int_0^{\pi} \sin^k \vartheta \, d\vartheta = \left| \begin{array}{ll} u = \sin^{k-1} \vartheta & u' = (k-1) \sin^{k-2} \vartheta \cos \vartheta \\ v' = \sin \vartheta & v = -\cos \vartheta \end{array} \right| = \\
&= \left[-\sin^{k-1} \vartheta \cos \vartheta \right]_0^{\pi} + (k-1) \int_0^{\pi} \sin^{k-2} \vartheta \cos^2 \vartheta \, d\vartheta = \\
&= (k-1) \int_0^{\pi} \sin^{k-2} \vartheta (1 - \sin^2 \vartheta) \, d\vartheta = \\
&= (k-1) \left(\int_0^{\pi} \sin^{k-2} \vartheta \, d\vartheta - \int_0^{\pi} \sin^k \vartheta \, d\vartheta \right) = (k-1)(I_{k-2} - I_k).
\end{aligned}
$$

Odtud dostáváme $k I_k = (k-1) I_{k-2}$, takže $I_k = \frac{k-1}{k} I_{k-2}$, což je dokazovaný rekurentní vzorec. Všimněte si, že stejný vzorec zůstává v platnosti, když funkci sinus nahradíme funkcí kosinus, nebo když horní mez nahradíme libovolným z čísel $\pi/2$, $3\pi/2$, 2π.

Příklad 3.34. Vypočtěte integrál

$$
\iiiint\limits_V dx\,dy\,dz\,du,
$$

je-li $V = \left\{ [x, y, z, u] \in \mathbb{R}^4 \colon x^2 + y^2 \leqq z^2 + u^2 \leqq 1 \right\}$.

Řešení. S ohledem na oblast integrace použijeme transformace do nových proměnných ϱ, φ, r, ϑ, které jsou s původními proměnnými vázány vztahy

$$
\begin{aligned}
x &= \varrho \cos \varphi, \qquad & z &= r \cos \vartheta, \\
y &= \varrho \sin \varphi, \qquad & u &= r \sin \vartheta.
\end{aligned}
$$

Jde vlastně o pár polárních souřadnic v rovinách xy a zu. Jakobián této transformace je

$$
J = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\varrho \sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -r \sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & r \cos \vartheta \end{vmatrix} = \varrho r.
$$

Podmínky vymezující množinu V se v nových souřadnicích vyjádří nerovnostmi $\varrho^2 \leqq r^2 \leqq 1$. Napíšeme-li odpovídající množinu V^* ve tvaru elementární množiny, máme

$$V^*\colon \quad \begin{aligned} &0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \\ &0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi, \\ &0 \leqq r \leqq 1, \\ &0 \leqq \varrho \leqq r, \end{aligned}$$

přičemž transformace je na vnitřku množiny V^* prostá a regulární. Označme $M = \{[\varrho, r] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \varrho \leqq r\}$. Užitím věty 3.31 a Fubiniovy věty dostáváme

$$\iiiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}u = \iiiint\limits_{V^*} \varrho r\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\iint\limits_M \varrho r\,\mathrm{d}\varrho \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\vartheta \right\} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\vartheta \cdot \iint\limits_M \varrho r\,\mathrm{d}\varrho\mathrm{d}r =$$

$$= 2\pi \cdot 2\pi \cdot \int_0^1 \left(\int_0^r \varrho r\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}r = 4\pi^2 \int_0^1 r \left[\frac{\varrho^2}{2} \right]_0^r \mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi^2 \int_0^1 \frac{r^3}{2}\,\mathrm{d}r = 2\pi^2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{2}.$$

▲

3.4. Důkaz věty o transformaci n-rozměrného integrálu

Cílem tohoto oddílu je dokázat věty 3.30 a 3.31. Důkazy těchto tvrzení jsou technicky poměrné náročné a rozsáhlé. Rozčleníme je proto do několika pomocných tvrzení. Hlavní kroky důkazu budou tyto:

- Najdeme vzorec pro jakobián složeného zobrazení (lemma 3.35).
- Odvodíme některé vlastnosti prostých regulárních zobrazení. Zejména ukážeme, jak zobrazují vnitřní a hraniční body (lemma 3.39), že obrazem množiny nulové míry je opět množina nulové míry a že obrazem kompaktní měřitelné množiny je měřitelná množina (lemma 3.43).
- Ukážeme, že regulární zobrazení je možné lokálně vyjádřit jako složení dvou regulárních zobrazení s jistými speciálními vlastnostmi (lemma 3.44).
- Dokážeme, že jestliže vzorec (3.17) platí pro mnohorozměrné intervaly, platí pro libovolné kompaktní měřitelné množiny v prostoru téže dimenze (lemma 3.46).
- Indukcí vzhledem k dimenzi dokážeme (s využitím předchozích dvou bodů a Fubiniovy věty) platnost vzorce (3.17) pro intervaly libovolné dimenze (lemma 3.49).
- Z předchozích dvou bodů dostaneme důkaz věty 3.30.