2. Funkcionální charakteristiky stochastických procesů

2.1. Definice: Definice střední hodnoty a rozptylu SP, definice centrovaného a standardizovaného SP

2.2. Příklad: Nechť náhodná veličina X má střední hodnotu E(X) = 2 a rozptyl D(X) = 9. Zavedeme SP $\{X_t; t \in \mathbb{R}\}$, kde $X_t = X.\cos \omega t$, $\omega > 0$ je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP.
Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(X \cdot \cos\omega t) = \cos\omega t \cdot E(X) = 2\cos\omega t$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(X \cdot \cos\omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(X) = 9\cos^2 \omega t$$

2.3. Poznámka: Další funkcionální charakteristiky stochastického procesu

2.4. Definice: Definice autokovarianční a autokorelační funkce SP

2.5. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce SP

2.6. Příklad: Najděte autokovarianční a autokorelační funkci SP z příkladu 2.2.
Řešení:

$$\gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = C(X \cdot \cos\omega t_1, X \cdot \cos\omega t_2) = \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 \cdot C(X, X) =$$

$$= \cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2 \cdot D(X) = 9\cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2$$

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \frac{9\cos\omega t_1 \cdot \cos\omega t_2}{\sqrt{9\cos^2 \omega t_1}\sqrt{9\cos^2 \omega t_2}} =$$

2.7. Věta: Věta o střední hodnotě a autokovarianční funkci transformovaného SP

2.8. Definice: Definice slabě stacionárního SP

2.9. Poznámka: Vztah mezi striktní a slabou stacionaritou SP, zavedení autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

2.10. Věta: Věta o vlastnostech autokovarianční funkce slabě stacionárního SP

2.11. Příklad: Nechť Y, Z jsou standardizované náhodné veličiny (tj. E(Y) = 0, E(Z) = 0, D(Y) = 1, D(Z) = 1), které jsou stochasticky nezávislé.
Zavedeme SP $\{X_t; t \in \mathbb{R}\}$, kde $X_t = Y.\cos \omega t + Z.\sin \omega t$, $\omega > 0$ je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP a ukažte, že je slabě stacionární.
Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(Y \cdot \cos\omega t + Z \cdot \sin\omega t) = \cos\omega t \cdot E(Y) + \sin\omega t \cdot E(Z) = 0$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(Y \cdot \cos\omega t + Z \cdot \sin\omega t) = \cos^2 \omega t \cdot D(Y) + \sin^2 \omega t \cdot D(Z) = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

Aby byl SP slabě stacionární, musí mít konstatntní střední hodnotu, konečný rozptyl a pro jeho autokovarianční funkci musí platit γ(h) = γ(t, t+h). První dvě podmínky jsou splněny, ověříme třetí:

$$\gamma(t, t+h) = C(X_t, X_{t+h}) = C(Y\cdot\cos t + Z\cdot\sin t, Y\cdot\cos(t+h) + Z\cdot\sin(t+h)) =$$
$$= \cos t\cdot\cos(t+h)\cdot C(Y,Y) + \sin t\cdot\cos(t+h)\cdot C(Z,Y) + \cos t\cdot\sin(t+h)\cdot C(Y,Z) +$$
$$+ \sin t\cdot\sin(t+h)\cdot C(Z,Z) =$$
$$= \cos t\cdot\cos(t+h)\cdot D(Y) + \sin t\cdot\sin(t+h)\cdot D(Z) = \cos t\cdot\cos(t+h) + \sin t\cdot\sin(t+h) =$$
$$= \cos(t - (t+h)) = \cos(-h) = \cos(h) = \gamma(h)$$

2.12. Věta: Věta o vlastnostech autokorelační funkce slabě stacionárního SP

2.13. Příklad: Nechť je dán SP $\{X_t; t \in T\}$, kde náhodné veličiny $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots$ jsou stochasticky nezávislé a mají všechny stejnou distribuční funkci Φ(x). Určete střední hodnotu, rozptyl a autokorelační funkci tohoto SP.
Řešení: Protože náhodné veličiny X_t, $t \in T$ mají všechny stejnou distribuční funkci Φ(x), mají i stejnou střední hodnotu $E(X_t) = \mu$ a stejný rozptyl $D(X_t) = \sigma^2$. Dále opočítáme autokovarianční funkci $\gamma(t_1, t_2) = C(X_{t_1}, X_{t_2}) = \begin{cases} \sigma^2 \text{ pro } t_1 = t_2 \\ 0 \text{ pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$. Jedná se tedy o slabě stacionární SP. Nyní spočteme autokorelační funkci $\rho(t_1, t_2) = \dfrac{\gamma(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)} = \begin{cases} 1 \text{ pro } t_1 = t_2 \\ 0 \text{ pro } t_1 \neq t_2 \end{cases}$.
Znamená to, že neexistuje žádná závislost mezi realizacemi SP ve dvou různých okamžicích.