3. Markovské řetězce s diskrétním časem

3.1. Definice: Definice markovského řetězce s diskrétním časem

3.2. Věta: Věta o simultánní pravděpodobnostní funkci markovského řetězce s diskrétním časem

3.3. Příklad: Nechť $Y_1, Y_2, \ldots$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, které nabývají hodnot z množiny $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ (jde o tzv. celočíselné náhodné veličiny). Položme $X_0 = 0, X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, n \ge 1$. Dokažte, že stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ je markovský řetězec.

Řešení: Dokážeme, že levá strana v markovské vlastnosti se rovná pravé straně.

Levá strana:

$$P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0) = \frac{P(X_n = i_n \wedge X_{n-1} = i_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = i_{n-1} \wedge X_{n-2} = i_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)}.$$

Jevy zapsané pomocí náhodných veličin $X_0, X_1, \ldots, X_n$ se budeme snažit zapsat pomocí náhodných veličin $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, které jsou stochasticky nezávislé.

$X_0 = 0$, $X_1 = X_0 + Y_1 \Rightarrow Y_1 = X_1 - X_0$, $X_2 = X_1 + Y_2 \Rightarrow Y_2 = X_2 - X_1, \ldots, X_n = X_{n-1} + Y_n \Rightarrow Y_n = X_n - X_{n-1}$, tedy

$$(X_n = i_n \wedge X_{n-1} = i_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_1 = i_1 \wedge X_0 = 0) =$$
$$= (Y_n = i_n - i_{n-1} \wedge Y_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2} \wedge \ldots \wedge Y_1 = i_1)$$

Dále

$$(X_{n-1} = i_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_1 = i_1 \wedge X_0 = 0) = (Y_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2} \wedge \ldots \wedge Y_1 = i_1).$$

Po dosazení do levé strany:

$$\frac{P(X_n = i_n \wedge X_{n-1} = i_{n-1} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)}{P(X_{n-1} = i_{n-1} \wedge X_{n-2} = i_{n-2} \wedge \ldots \wedge X_0 = 0)} = \frac{P(Y_n = i_n - i_{n-1}) P(Y_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(Y_1 = i_1)}{P(Y_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2}) \cdot \ldots \cdot P(Y_1 = i_1)} =$$
$$= P(Y_n = i_n - i_{n-1})$$

Pravá strana:

$$P(X_n = i_n / X_{n-1} = i_{n-1}) = \frac{P(X_n = i_n \wedge X_{n-1} = i_{n-1})}{P(X_{n-1} = i_{n-1})} =$$
$$= \frac{P(Y_n = i_n - i_{n-1}) P(Y_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2})}{P(Y_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2})} = P(Y_n = i_n - i_{n-1})$$

Protože levá strana se rovná pravé straně, je daný stochastický proces $\{X_n; n \in N_0\}$ markovský řetězec.

Speciální případ – náhodná procházka na přímce.

3.4. Příklad: Galtonův – Watsonův proces větvení

3.5. Označení

3.6. Věta: Věta o vlastnostech markovského řetězce s diskrétním časem

3.7. Poznámka: Zápis vlastností markovského řetězce s diskrétním časem v maticovém tvaru

3.8. Příklad: Nechť je dán markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}.

Pravděpodobnosti přechodu 1. řádu jsou dány maticí $\mathbf{P}(n, n+1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Vektor absolutních pravděpodobností v okamžiku n je $\mathbf{p}(n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$. Jaká je pravděpodobnost, že po jednom kroku bude řetězec ve stavu 0 (resp. 1)?

Řešení: Podle zákona evoluce máme: **p**(n+1) = **p**(n) **P**(n,n+1) =

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \right) = \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3}, \frac{3}{8} + \frac{1}{6} \right) = \left(\frac{11}{24}, \frac{13}{24} \right) = (0{,}4583; 0{,}5417)$$

Po jednom kroku tedy bude řetězec ve stavu 0 s pravděpodobností 0,4583 a ve stavu 1 s pravděpodobností 0,5417.

3.9. Definice: Definice stochastického vektoru a stochastické matice