

## 4. Homogenní markovské řetězce s diskretním časem

4.1. Definice: Definice homogenního markovského řetězce (s diskretním časem)

4.2. Příklad: Na okružní trase je umístěno  $2m$  bodů. Mezi nimi převáží auto náklady. Náklad se z každého bodu převáží do následujícího s pravděpodobností  $p$  nebo do předchozího s pravděpodobností  $q = 1 - p$ . Zavedeme stochastický proces  $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_0^+\}$ , kde  $X_n = j$ , když v okamžiku  $n$  je auto v bodě  $j$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2m$ . Ukažte, že tento stochastický proces je homogenní markovský řetězec a najděte jeho matici přechodu.

Řešení: Daný stochastický proces je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých. Je to homogenní markovský řetězec, protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku  $n$ .

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & q \\ q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ p & 0 & 0 & \dots & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

4.3. Věta: Vlastnosti homogenního markovského řetězce

4.4. Příklad: Je dán homogenní markovský řetězec  $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_0^+\}$  s množinou stavů  $J = \{0, 1, 2\}$ , vektorem počátečních pravděpodobností  $\mathbf{p}(0) = (1/2, 1/6, 1/3)$  a maticí přechodu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \text{ Určete vektor absolutních pravděpodobností po čtyřech krocích.}$$

$$\text{Řešení: } p(4) = p(0)P^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{5}{16} & \frac{6}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{96} & \frac{31}{96} & \frac{34}{96} \end{pmatrix}$$

4.5. Poznámka: Přechodový diagram v rozvinutém a nerozvinutém tvaru.

4.6. Příklad: Necht'  $\{X_n; n \in \mathbb{Z}_0^+\}$  je homogenní markovský řetězec s množinou stavů  $J =$

$$\{0, 1, 2\} \text{ a maticí přechodu } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \text{ Nakreslete přechodový diagram.}$$

4.7. Příklad: Najděte matici přechodu k danému přechodovému diagramu.

#### 4.8. Příklad: Model havarijního pojištění

Počet výskytů pojistné události v  $n$ -tém pojistném období je náhodná veličina  $Y_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Předpokládáme, že náhodné veličiny  $Y_n$  jsou stochasticky nezávislé a všechny se řídí rozložením  $Po(\lambda)$ . Existují tři kategorie pojistného: 0 ... základní pojistné, 1 ... pojistné s bonusem 30%, 2 ... pojistné s bonusem 50%. V prvním pojistném období platí klient základní pojistné. Jestliže pojistné období má bezeškodní průběh, je klient v dalším pojistném období zařazen o kategorii výše. Pokud uplatní jeden pojistný nárok, je v příštím období zařazen o kategorii níže. Při uplatnění dvou a více pojistných událostí je zařazen o dvě kategorie níže. Necht' náhodná veličina  $X_n$  značí kategorii pojistného v  $n$ -tém pojistném období. Lze snadno odvodit, že platí

$$X_{n+1} = \begin{cases} \min \{X_{n+1}, 2\} & \text{pro } Y_n = 0 \\ \max \{X_{n+1}, 0\} & \text{pro } Y_n = 1 \\ 0 & \text{pro } Y_n \geq 2 \end{cases}$$

Stochastický proces  $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$  s množinou stavů  $J = \{0, 1, 2\}$  je markovský řetězec, protože jeho budoucí stav závisí pouze na stavu přítomném a nikoliv na stavech minulých. Protože pravděpodobnosti přechodu 1. řádu nezávisí na okamžiku  $n$ , jde o homogenní markovský řetězec.

- Najděte vektor počátečních pravděpodobností a matici přechodu. (Návod: využijte toho, že matice přechodu je stochastická matice.
- Nakreslete přechodový diagram.