Příklady na čtvrté cvičení v počítačové učebně, SMI, PS 2009

Definice markovskéhp řetězce s oceněním přechodů
Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je homogenní markovský řetězec s konečnou množinou stavů J, v němž jsou všechny stavy trvalé nenulové neperiodické (tj. ergodické). Předpokládáme, že každému přechodu ze stavu i do stavu j je přiřazeno ocenění r_{ij} (představuje výnos nebo ztrátu spojenou s přechodem z i do j). Tato ocenění uspořádáme do matice $\mathbf{R} = (r_{ij})_{i,j \in J}$, která se nazývá matice výnosů. Řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ se pak nazývá markovský řetězec s oceněním přechodů.

Rekurentní metoda výpočtu středních hodnot celkových výnosů
Nechť $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ je markovský řetězec s oceněním přechodů, který má matici přechodu **P** a matici ocenění **R**. Označme
$v_i(n)$ střední hodnotu celkového výnosu, který se získá po n krocích, když řetězec vychází ze stavu i,
$q_i = \sum_{j \in J} p_{ij} r_{ij}$ střední hodnotu výnosu při jednom přechodu ze stavu i.
Pak pro $\forall i \in J$ a n = 1, 2, 3, ... platí rekurentní vztah:
$v_i(n) = q_i + \sum_{j \in J} p_{ij} v_j(n-1)$, přičemž $v_i(0) = 0$.
V maticové formě: $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\mathbf{v}(n-1)$, n = 1, 2, …

Výpočet vytvořující funkce $G_v(z)$ posloupnosti vektorů $\{\mathbf{v}(n)\}_{n=1}^{\infty}$

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z}\left(\mathbf{I} - z\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{q}$$

Aproximační vzorec pro výpočet středních hodnot celkových výnosů
$\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{A}\mathbf{q} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$.

Příklad 1.: Řidič taxi dlouhodobým pozorováním zjistil, že když se v daném okamžiku nachází ve městě A, pak s pravděpodobností 0,3 poveze příštího zákazníka do města B a s pravděpodobností 0,7 bude zákazník žádat jízdu uvnitř A. Jestliže se řidič taxi nachází ve městě B, pak se stejnou pravděpodobností buď poveze příštího zákazníka do A nebo bude jezdit uvnitř B. Průměrná tržba za jízdu (v obou směrech) mezi A a B činí 1000 Kč a uvnitř měst A a B 100 Kč. Vypočítejte střední hodnotu tržby za první dvě jízdy, vyjede-li řidič z města A resp. B.

Řešení:
Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v okamžiku n je řidič ve městě A (resp. B). Matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 100 & 1000 \\ 1000 & 100 \end{pmatrix}$.

$q_0 = 0{,}7.100 + 0{,}3.1000 = 370$, $q_1 = 0{,}5.1000 + 0{,}5.100 = 550$

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix}$

$\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 370 \\ 550 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 794 \\ 1010 \end{pmatrix}$

Vyjede-li řidič z města A, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 794 Kč. Vyjede-li řidič z města B, bude mít za první dvě jízdy v průměru tržbu 1010 Kč.

Návod na řešení v MATLABu:
Zadáme matice **P**, **R** a vektor **v**0:
P=[0.7 0.3;0.5 0.5]; R=[100 1000;1000 100];v0=[0 0]‘;
Vypočteme pomocnou matici Q=P*R’;
Diagonála matice Q je vektor q=diag(Q);
Vypočteme vektor v1=q+P*v0
Vypočteme vektor v2=q+P*v1

Upozornění:
Posloupnost vektorů **v**(n) lze v MATLABu získat pomocí cyklu:

```
v(:,1) = [0;0]
n=2;
for i=1:n
   v(:,i+1) = q + P*v(:, i)
end
```

Příklad 2.: Předpokládejme, že chovatel má slepici, která buď snáší vejce (stav 0) nebo sedí na vejcích (stav 1). Uvažujeme období o délce 1 měsíc. Matice přechodu a matice výnosů jsou:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

a) Pomocí vytvořujících funkcí najděte vektor středních hodnot celkových výnosů po n měsících.
b) Jaký je vektor středních hodnot celkových výnosů pro n = 1, 2, …, 24? Graficky znázorněte závislost středních hodnot celkových výnosů na n.

Řešení:
Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v měsíci n slepice snáší vejce (resp. sedí na vejcích). Matice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$

$q_0 = 0{,}6.8 + 0{,}4.2 = 5{,}6$, $q_1 = 0{,}3.3 + 0{,}7.(-6) = -3{,}3$

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 5{,}6 \\ -3{,}3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$G_v(z) = \frac{z}{1-z}\left(\mathbf{I} - \mathbf{P}z\right)^{-1}\mathbf{q} = \ldots = \frac{z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix} \frac{36}{70} \\ \frac{36}{70} \end{pmatrix} + \frac{10}{7}\frac{1}{1-z} - \frac{10}{7}\frac{1}{1-\frac{3}{10}z}\begin{pmatrix} \frac{356}{70} \\ -\frac{267}{70} \end{pmatrix}$$

$\frac{z}{(1-z)^2}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = n$, n = 0, 1, 2, ...

$\frac{10}{7}\cdot\frac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \frac{10}{7}\cdot 1^n = \frac{10}{7}$, n = 0, 1, 2, ...

$-\frac{10}{7}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{10}z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = -\frac{10}{7}\cdot 0{,}3^n$, n = 0, 1, 2, ...

Celkem:

$$\mathbf{v}(n) = n\begin{pmatrix}\frac{36}{70}\\ \frac{36}{70}\end{pmatrix} + \frac{10}{7}\left(1-0{,}3^n\right)\begin{pmatrix}\frac{356}{70}\\ -\frac{267}{70}\end{pmatrix}$$

$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix}5{,}6\\ -3{,}3\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix}7{,}64\\ -3{,}93\end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix}8{,}612\\ -3{,}759\end{pmatrix}$, …, $\mathbf{v}(24) = \begin{pmatrix}19{,}608\\ 6{,}893\end{pmatrix}$.

Návod na řešení v MATLABu:
Zadáme vektor n: n=[0:1:24];
Napíšeme vyjádření pro první složku vektoru **v**(n):
v0n=n.*(36/70)+(10/7)*(1-0.3.^n)*(356/70)
Napíšeme vyjádření pro druhou složku vektoru **v**(n):
v1n=n.*(36/70)+(10/7)*(1-0.3.^n)*(-267/70)
Graficky znázorníme závislost středních hodnot celkových výnosů na n:
plot(n,v0n,'o',n,v1n,'*')

Příklad 3.: Výrobce limonád pravidelně sleduje prodejnost nového výrobku na domácím trhu. Výrobek hodnotí v každém sledovaném období jako úspěšný (stav 0) nebo jako neúspěšný (stav 1), přičemž lze předpokládat, že úspěšnost či neúspěšnost prodeje v daném období je ovlivněna jen tím, jak se výrobek prodával v předchozím období. Dlouhodobým sledováním prodeje byly zjištěny tyto poznatky: pokud byl výrobek v jednom období úspěšný, pak v následujícím období bude úspěšný s pravděpodobností 0,8. Jestliže byl výrobek v jednom období neúspěšný, tak v následujícím období zůstane neúspěšný s pravděpodobností 0,7. Zůstává-li výrobek úspěšný, je výnos 10 jednotek. Změní-li se z úspěšného na neúspěšný, klesne výnos na 5 jednotek. Při změně z neúspěšného na úspěšný je výnos 10 jednotek a zůstává-li výrobek neúspěšný, dojde ke ztrátě 20 jednotek.
a) Modelujte proces pomocí homogenního markovského řetězce. Najděte matici přechodu a matici výnosů.
b) Pomocí rekurentního vzorce $\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(n-1)$ vypočtěte pro oba stavy střední hodnotu celkového výnosu, který se získá za n období, n = 1, 2, ..., 6.
c) Pomocí aproximačního vzorce $\mathbf{v}(n) \approx (n-1)\mathbf{Aq} + (\mathbf{I} - (\mathbf{P} - \mathbf{A}))^{-1}\mathbf{q}$ najděte přibližné vyjádření pro vektor středních hodnot celkových výnosů $\mathbf{v}(n)$. Pro n = 1, 2, ..., 6 porovnejte výsledky s přesným vyjádřením získaným v bodě (b).

Řešení:
ad a) Zavedeme HMŘ $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1}, přičemž $X_n = 0$ (resp. 1), když v n-tém období je výrobek úspěšný (resp. neúspěšný). Matice

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}0{,}8 & 0{,}2\\ 0{,}3 & 0{,}7\end{pmatrix},\quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix}10 & 5\\ 10 & -20\end{pmatrix}.$$

ad b) Výpočet pomocí rekurentního vzorce:
$q_0 = 0{,}8.10 + 0{,}2.5 = 9$, $q_1 = 0{,}3.10 + 0{,}7.(-20) = -11$

$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{v}(1) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 14 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(3) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 17 \\ -18 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{v}(4) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -18{,}5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(5) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20{,}5 \\ -18{,}25 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(6) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21{,}75 \\ -17{,}625 \end{pmatrix}$

ad c) Výpočet pomocí aproximačního vzorce:
Nejprve najdeme stacionární vektor **a** matice **P** (viz Příklady na druhé cvičení v počítačové učebně) a sestavíme limitní matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$. Po dosazení do aproximačního vzorce získáme výsledky:

$\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 17 \\ -23 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 18 \\ -22 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(3) = \begin{pmatrix} 19 \\ -21 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(4) = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(5) = \begin{pmatrix} 21 \\ -19 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}(6) = \begin{pmatrix} 22 \\ -18 \end{pmatrix}$

Je zřejmé, že aproximační vzorec je pro malá n nevhodný.