Vzorová písemná zkouška z předmětu Stochastické modely I

Příklad 1.: (15 bodů) Nechť Y, Z jsou stochasticky nezávislé standardizované náhodné veličiny.
Zavedeme SP $\{X_t; t \in \mathbb{R}\}$, kde $X_t = Y.\cos \omega t + Z.\sin \omega t$, $\omega > 0$ je konstanta. Najděte střední hodnotu a rozptyl tohoto SP a ukažte, že je slabě stacionární.

Řešení:

$$\mu(t) = E(X_t) = E(Y \cdot \cos\omega t + Z \cdot \sin\omega t) = \cos\omega t \cdot E(Y) + \sin\omega t \cdot E(Z) = 0$$

$$\sigma^2(t) = D(X_t) = D(Y \cdot \cos\omega t + Z \cdot \sin\omega t) = \cos^2\omega t \cdot D(Y) + \sin^2\omega t \cdot D(Z) = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1$$

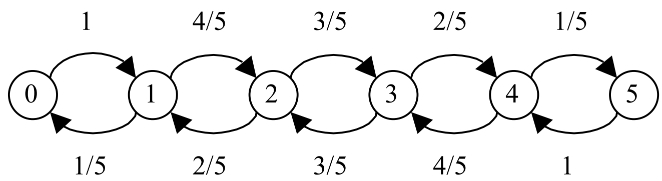
Aby byl SP slabě stacionární, musí mít konstatntní střední hodnotu, konečný rozptyl a pro jeho autokovarianční funkci musí platit $\gamma(h) = \gamma(t, t+h)$. První dvě podmínky jsou splněny, ověříme třetí:

$$\gamma(t, t+h) = C(X_t, X_{t+h}) = C(Y \cdot \cos t + Z \cdot \sin t, Y \cdot \cos(t+h) + Z \cdot \sin(t+h)) =$$
$$= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Y,Y) + \sin t \cdot \cos(t+h) \cdot C(Z,Y) + \cos t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Y,Z) +$$
$$+ \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot C(Z,Z) =$$
$$= \cos t \cdot \cos(t+h) \cdot D(Y) + \sin t \cdot \sin(t+h) \cdot D(Z) = \cos t \cdot \cos(t+h) + \sin t \cdot \sin(t+h) =$$
$$= \cos(t - (t+h)) = \cos(-h) = \cos(h) = \gamma(h)$$

Příklad 2.: (25 bodů) Máme černou a bílou urnu a pět koulí. Na počátku pokusu jsou všechny koule v černé urně. V každém kroku pokusu náhodně vybereme jednu kouli, přičemž výběr každé koule je stejně pravděpodobný a přemístíme ji do druhé urny. Zavedeme homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů J = {0,1, ..., 5}, kde $X_n = j$, když po n-tém kroku bude v černé urně právě j koulí.
a) Najděte matici přechodu a nakreslete přechodový diagram.
b) Najděte stacionární rozložení tohoto řetězce.
c) Vypočtěte střední hodnotu počtu koulí v černé urně po stabilizaci pokusu.

Řešení:

ad a) $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



ad b) $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 0 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$a_0 = \frac{1}{5}a_1,\ a_1 = a_0 + \frac{2}{5}a_2,\ a_2 = \frac{4}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_3,\ a_3 = \frac{3}{5}a_2 + \frac{4}{5}a_4,\ a_4 = \frac{2}{5}a_3 + a_5,\ a_5 = \frac{1}{5}a_1$$

$a_1 = 5a_0$, $a_2 = 10a_0$, $a_3 = 10a_0$, $a_4 = 5a_0$, $a_5 = a_0$

Protože $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1$, dostáváme $a_0 + 5a_0 + 10a_0 + 10a_0 + 5a_0 + a_0 = 1 \Rightarrow$ $a_0 = \frac{1}{32}$

Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{1}{32}, \frac{5}{32}, \frac{10}{32}, \frac{10}{32}, \frac{5}{32}, \frac{1}{32}\right)$

ad c) $E(X) = 0\cdot\frac{1}{32} + 1\cdot\frac{5}{32} + 2\cdot\frac{10}{32} + 3\cdot\frac{10}{32} + 4\cdot\frac{5}{32} + 5\cdot\frac{1}{32} = \frac{80}{32} = 2{,}5$

Příklad 3.: (30 bodů) Máme populaci diploidní cizosprašné rostliny, ve které sledujeme gen se dvěma alelami a,A. Z populace náhodně vybereme jedince, sprášíme ho homozygotním jedincem typu AA a v příštím kroku vybíráme z populace tvořené jejich potomky. Postup lze popsat pomocí homogenního markovského řetězce s množinou stavů J = {0,1,2}, kde stav 0 = aa, stav 1 = Aa = aA, stav 2 = AA.

a) Najděte matici přechodu **P**.
b) Ukažte, že řetězec je absorpční.
c) Najděte fundamentální matici **M** a interpretujte její prvky.
d) Vypočtěte matici přechodu do absorpčních stavů **B** a interpretujte její prvky.
e) Zjistěte vektor středních hodnot počtu kroků před absorpcí.

Řešení:

ad a) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ad b) Řetězec má jediný trvalý stav AA, který je absorpční, proto je řetězec absorpční.

ad c) Nejprve je nutné najít kanonický tvar matice přechodu.

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Vidíme, že $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. Dále $\mathbf{M} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aa (tj. od recesivního homozygota) v něm v průměru setrvá 1 krok než bude absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aa setrvá ve stavu aA v průměru 2 kroky než bude absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aA v něm v průměru setrvá 2 kroky než bude absorbován.

ad d) $\mathbf{B} = \mathbf{MR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Interpretace: Ať řetězec vychází ze stavu aa nebo aA, tak s pravděpodobností 1 bude absorbován ve stavu AA.

ad e) $\mathbf{t} = \mathbf{Me} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Interpretace: Řetězec vycházející ze stavu aa bude v průměru za 3 kroky absorbován. Řetězec vycházející ze stavu aA bude v průměru za 2 kroky absorbován.

Příklad 4.: (30 bodů) Nechť homogenní markovský řetězec $\{X_n; n \in \mathbb{N}_0\}$ s množinou stavů $J = \{1,2\}$ popisuje chování výrobní linky, která se v n-tém období nachází buď v provozu (stav 1) nebo v opravě (stav 2). Dlouhodobým sledováním byla zjištěna matice přechodu: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}$. Pomocí vytvořujících funkcí najděte matici přechodu po n krocích $\mathbf{P}^n$.

Řešení: $G_{\mathbf{P}}(z) = (\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}75 \end{pmatrix}, \mathbf{I} - z\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{z}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{4} & \frac{3z}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{z}{2} & -\frac{z}{2} \\ -\frac{z}{4} & 1-\frac{3z}{4} \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathbf{I}\text{-}z\mathbf{P}) = \left(1-\frac{z}{2}\right)\left(1-\frac{3z}{2}\right) - \frac{z^2}{9} = \ldots = (1-z)\cdot\left(1-\frac{z}{4}\right)$$

$$(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{(1-z)\left(1-\frac{z}{4}\right)}\begin{pmatrix} 1-\frac{3z}{4} & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & 1-\frac{z}{2} \end{pmatrix} = \cdots = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\frac{z}{4}}\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(Upozornění: Prvky matice $(\mathbf{I} - z\mathbf{P})^{-1}$ byly získány rozkladem na parciální zlomky. Např. prvek $a_{11} = \dfrac{1-\frac{3z}{4}}{(1-z)\left(1-\frac{z}{4}\right)} = \dfrac{A}{1-z} + \dfrac{B}{1-\frac{z}{4}} = \ldots = \dfrac{\frac{1}{3}}{1-z} + \dfrac{\frac{2}{3}}{1-\frac{z}{4}}$. Podobně získáme další prvky.)

$\dfrac{1}{1-z}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\dfrac{1}{1-\frac{z}{4}}$ je vytvořující funkce posloupnosti $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Matici $\mathbf{P}^n$ lze tedy psát ve tvaru: $\mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Hodnocení:

(90, 100] … A, (80, 90] … B, (70, 80] … C, (60, 70] … D, (50, 60] … E, [0, 50] … F