10. Pravděpodobnostní vytvořující funkce

10.1. Definice: Nechť X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí $P(X=k)=\begin{cases} p_k & \text{pro } k=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$. Pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X je dána vztahem: $g_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, kde $|z|<1$. (Je zřejmé, že pravděpodobnostní vytvořující funkce je speciálním případem vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. V tomto případě totiž posloupnost $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ splňuje podmínku $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Dále je okamžitě vidět, že $g_X(z) = E(z^X)$.)

10.2. Příklad: Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X, která má rozložení: a) Po(λ), b) Bi(n, ϑ), c) G(ϑ).

Řešení:

ad a) $p_k=\begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \text{pro } k=0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$,

$$g_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}z^k=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda z)^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda z}=e^{\lambda(z-1)}$$

ad b) $p_k=\begin{cases} \binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k} & \text{pro } k=0,1,\dots,n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$,

$$g_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k}z^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\vartheta z)^k(1-\vartheta)^{n-k}=(\vartheta z+1-\vartheta)^n$$

ad c) $p_k=\begin{cases} \vartheta(1-\vartheta)^k & \text{pro } k=0,1,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$,

$$g_X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k=\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta(1-\vartheta)^k z^k=\vartheta\sum_{k=0}^{\infty}\left(z(1-\vartheta)\right)^k=\frac{\vartheta}{1-z(1-\vartheta)}.$$

10.3. Věta: Nechť $g_X(z)$ je pravděpodobnostní vytvořující funkce celočíselné nezáporné náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$. Pak pro k = 0, 1, 2, ... platí:

$$p_k=\left.\frac{g_X^{(k)}(z)}{k!}\right|_{z=0}.$$

Důkaz: Plyne z věty 9.4., protože pravděpodobnostní vytvořující funkce je speciálním případem vytvořující funkce.

10.4. Věta: Pro střední hodnotu a rozptyl celočíselné nezáporné náhodné veličiny X s pravděpodobnostní vytvořující funkcí $g_X(z)$ platí: $E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z)\big|_{z=1}$,

$$D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z)\Big|_{z=1} + E(X) - (E(X))^2.$$

Důkaz: $\frac{d}{dz} g_X(z)\big|_{z=1} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k z^{k-1} \Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = E(X)$

$\frac{d^2}{dz^2} g_X(z)\big|_{z=1} = \frac{d^2}{dz^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k z^{k-2} \Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k =$
$= E(X^2) - E(X)$

Znamená to, že $D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) + E(X) - (E(X))^2$.

10.5. Příklad: Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X ~ Po(λ).

Řešení: Podle příkladu 10.2. (a) $g_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

$$E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z)\Big|_{z=1} = \lambda e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda$$

$$D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) + E(X) - (E(X))^2 = \frac{d^2}{dz^2} e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)}\Big|_{z=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

10.6. Věta: Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny. Pak pro pravděpodobnostní vytvořující funkci transformované náhodné veličiny $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ platí: $g_Y(z) = g_{X_1}(z) \cdots g_{X_n}(z)$.

Důkaz: $g_Y(z) = E(z^Y) = E(z^{X_1 + \dots + X_n}) = E(z^{X_1}) \cdots E(z^{X_n}) = g_{X_1}(z) \cdots g_{X_n}(z)$.

10.7 Příklad: Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, 2, .., n. Najděte pro pravděpodobnostní vytvořující funkci transformované náhodné veličiny $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Řešení: $X_i \sim A(\vartheta) \Rightarrow p_k = \begin{cases} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} & \text{pro } k = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$,

$g_{X_i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{1} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} z^k = \sum_{k=0}^{1} (\vartheta z)^k (1-\vartheta)^{1-k} = 1 - \vartheta + \vartheta z$. Podle věty 10.7.

$g_Y(z) = g_{X_1}(z) \cdots g_{X_n}(z) = (1 - \vartheta + \vartheta z)^n \Rightarrow Y \sim Bi(n, \vartheta)$

10.8. Věta: Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci

$P(X_i = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$, i = 1, 2, ..., n. Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ má pravděpodobnostní funkci $P(Y = k) = \begin{cases} p_k^{n*} & \text{pro } k = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Důkaz: Nechť $g_X(z)$ je pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X_i, i = 1, 2, ..., n. Pak podle věty 10.6. $g_Y(z) = (g_X(z))^n$, tedy posloupnost $\{P(Y=k)\}_{k=0}^{\infty}$ je n-tou konvoluční mocninou posloupnosti $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$.

10.9. Příklad: Nechť X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim Bi(n, \vartheta)$, i = 1, 2. Pomocí věty 10.8. určete rozložení transformované náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

Řešení: $p_k = \begin{cases} \binom{n}{k}\vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} & \text{pro } k = 0,1,\dots,n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$,

$$p_k^{2*} = p_0 p_k + p_1 p_{k-1} + \dots + p_k p_0 = \binom{n}{0}\vartheta^0(1-\vartheta)^{n}\binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k} + \binom{n}{1}\vartheta^1(1-\vartheta)^{n-1}\binom{n}{k-1}\vartheta^{k-1}(1-\vartheta)^{n-k+1} +$$

$$+ \dots + \binom{n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{n-k}\binom{n}{0}\vartheta^0(1-\vartheta)^{n} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}\vartheta^k(1-\vartheta)^{2n-k} = \vartheta^k(1-\vartheta)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}\vartheta^k(1-\vartheta)^{2n-k},$$

k = 0, 1, ..., 2n. Znamená to, $Y \sim Bi(2n, \vartheta)$.

10.10. Věta: Nechť X_1, X_2, ... je posloupnost stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$, i = 1, 2, ... Nechť N je celočíselná nezáporná náhodná veličina nezávislá na X_1, X_2, ... s pravděpodobnostní funkcí $P(N = n) = \begin{cases} q_n & \text{pro } n = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Pak náhodná veličina $S = X_1 + \dots + X_N$ (tj. součet náhodného počtu náhodných veličin) má pravděpodobnostní funkci $P(S = k) = h_k = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} q_n p_k^{n*} & \text{pro } k = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Důkaz: Použijeme vzorec pro výpočet úplné pravděpodobnosti. Označme A = {S = k}, H_n = {N = n}. Pak $P(H_n) = q_n$, $P(A/H_n) = P(S = k/N = n) = P(X_1 + \dots + X_N = k/N = n) =$
$= P(X_1 + \dots + X_n = k) = \{p_k\}^{n*}$. Dále $P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(H_n)P(A/H_n) \Rightarrow P(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n p_k^{n*}$.

10.11. Definice: Rozložení náhodné veličiny S se nazývá složené rozložení.

10.12. Příklad: Nechť X_1, X_2, ... jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, 2, ... Nechť N je na nich nezávislá náhodná veličina, $N \sim Po(\lambda)$. Najděte rozložení náhodné veličiny $S = X_1 + \dots + X_N$.

Řešení: $p_k = \begin{cases} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} & \text{pro } k = 0,1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$, $p_k^{n*} = \begin{cases} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} & \text{pro } k = 0,1,\dots,n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$$q_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} & \text{pro } n = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$h_k = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} = e^{-\lambda} \vartheta^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda^n (1-\vartheta)^{n-k} =$$

$$= e^{-\lambda} \vartheta^k \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda^{n-k} (1-\vartheta)^{n-k} = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (\lambda\vartheta)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} (\lambda(1-\vartheta))^{n-k} = \left| j = n-k \right| =$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (\lambda\vartheta)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\lambda(1-\vartheta))^j = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (\lambda\vartheta)^k e^{\lambda(1-\vartheta)} = \frac{(\lambda\vartheta)^k}{k!} e^{-\lambda\vartheta} \Rightarrow$$

$S \sim Po(\lambda\vartheta)$.

10.13. Věta: Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny $S = X_1 + \dots + X_N$ platí: $g_S(z) = g_N(g_X(z))$.
Důkaz:

$$g_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_n p_k^{n*} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{n*} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (g_X(z))^n = g_N(g_X(z)).$$

10.14. Příklad: Pro náhodnou veličinu S z příkladu 10.12. odvoďte pravděpodobnostní vytvořující funkci.

Řešení: $X_i \sim A(\vartheta) \Rightarrow g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{1} \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} z^k = 1 - \vartheta + \vartheta z$,

$N \sim Po(\lambda) \Rightarrow g_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$, $g_S(z) = g_N(g_X(z)) = e^{\lambda(1-\vartheta+\vartheta z-1)} = e^{\lambda\vartheta(z-1)} \Rightarrow S \sim Po(\lambda\vartheta)$.

10.15. Věta: Nechť $X_1, X_2, \dots$ jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny totéž rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Nechť N je celočíselná nezáporná náhodná veličiny, která je nezávislá na veličinách $X_1, X_2, \dots$ Pak náhodná veličina $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ má střední hodnotu $E(S) = E(N)\mu$ a rozptyl

$$D(S) = E(N)\sigma^2 + D(N)\mu^2.$$

Důkaz: $E(S) = \frac{d}{dz} g_S(z)\Big|_{z=1} = \frac{d}{dz} g_N(g_X(z))\Big|_{z=1} = g_N'(g_X(z)) g_X'(z)\Big|_{z=1} = E(N)\mu$.

$$D(S) = \frac{d^2}{dz^2} g_S(z)\Big|_{z=1} + E(S) - (E(S))^2$$

$$\frac{d^2}{dz^2} g_S(z)\Big|_{z=} = \ "(g_X(z)\, g_X'(z))^2\Big|_{z=} + \ '(g_X(z)\, g_X''(z))\Big|_{z=} = \ "(1)\, g_X'(1)^2 + \ '(1)\, g_X''(1) =$$

$$= \ "(1)\, \mu \ \ N g_X''(1)$$

Ovšem $D(N) = \ "(1) + N - N^2 \Rightarrow \ "(1) = N - N + N^2$. Analogicky

$$D(X) = \ "(1) + X - X^2 \rightarrow \ "(1) = X - X + X^2 =$$

Celkem:

$$D(S) = N \mu - N \mu + (N^2) \mu + (N \sigma \ \ (N \mu \ \ (N \mu + (N \mu \ (N^2) \mu =$$

$$= N \mu + N \sigma$$