Obsah

Následující text je zápisem části přednášky předmětu M5858 Diferenciální rovnice a jejich užití. Má sloužit především k tomu, aby studentky/studenti nebyly/i nuceny/i si během přednášky dělat podrobné písemné poznámky, ale raději se soustředily/i na pochopení výkladu. Dále může být pomůckou k rychlému připomenutí toho, co člověk již zná. V žádném případě nemůže být považován za základní zdroj nahrazující standardní učební texty, z něhož by bylo možné se problematice diferenciálních rovnic naučit; sám o sobě bez komentářů během přednášky je málo srozumitelný až nesrozumitelný (aby byl s komentáři srozumitelný, je mým přáním a bude mou snahou).

V současné chvíli se stále jedná o polotovar; určitě obsahuje i nějaké nedůslednosti, formulační nedostatky, překlepy nebo dokonce chyby. Budu vděčný každému, kdo mě na ně upozorní.

Zdeněk Pospíšil
prosinec 2009

Za základní učební texty k předmětu M5858 lze považovat:

1. J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001 (druhé vydání), 212 stran.
   Teorie obyčejných diferenciálních rovnic probraná důkladněji, než je v sylabu předmětu M5858.

2. J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii.* MU, Brno 2001, 265 stran.
   Doplňky k teorii autonomních systémů, aplikace diferenciálních rovnic především v populační dynamice a teorii šíření epidemií.

3. M. Ráb: *Metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* MU, Brno 1998, 96 stran.
   Popis základních elementárních metod řešení explicitních obyčejných diferenciálních rovnic.

4. R. Plch: *Příklady z matematické analýzy. Diferenciální rovnice.* MU, Brno 1995, 29 stran.
   Sbírka úloh z elementárních metod řešení explicitních i implicitních obyčejných diferenciálních rovnic. Je doplněna stručným popisem potřebných metod.

Jako doplňující literaturu lze doporučit

- P. Hartman: *Ordinary Differential Equations.* John Willey&Sons, New York-London-Sydney, 1964.
  Klasická monografie o teorii obyčejných diferenciálních rovnic.

- E. Kamke: *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Band I, Gewöhliche Differentialgleichungen.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1951.
  Důkladná příručka všech rovnic řešitelných elementárními metodami.

- J. Kaucký: *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic.* Nakladatelství ČSAV, Praha 1952.
  Popis elementárních metod řešení obyčejných diferenciálních rovnic obsáhlejší než skripta 3

- N. F. Britton: *Essential Mathematical Biology.* Springer, London-Berlin-Heidelberg-New York-Hong Kong-Milan-Paris-Tokio, 2003 (second printing).
  Učebnice deterministických modelů v biologii; první tři kapitoly obsahují aplikace probírané v rámci předmětu M5858.

- R. J. Barro, X. Sala-i-Martin: *Economic growth.* The MIT Press, Cambridge, Massachusetts-London, England, 1999.
  Obsahuje aplikace obyčejných diferenciálních rovnic v ekonomii.

Kapitola 1

Základní pojmy

1.0.1 Definice

Buď $G \subseteq \mathbb{R}^2$ množina s neprázdným vnitřkem, $f : G \to \mathbb{R}$. Rovnice

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu rozřešená vzhledem k derivaci.*
Řešením této rovnice se rozumí diferencovatelná funkce $x : J \to \mathbb{R}$, kde $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, která splňuje podmínky

$$\big(t, x(t)\big) \in G,\ \ x'(t) = f\big(t, x(t)\big) \text{ pro každé } t \in J.$$

Graf řešení rovnice (1.1) se nazývá *integrální křivka.*

1.0.2 Příklad

$G = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\},\ \ f(t, x) = \dfrac{x}{t}.$
Funkce $x(t) = kt$, kde $k \in \mathbb{R}$ je řešením rovnice $x' = \dfrac{x}{t}$ na intervalu $J = (0, \infty)$.

Diferenciální rovnice může mít více řešení.

1.0.3 Definice

Nechť G, f mají stejný význam jako v 1.0.1 a nechť $(t_0, x_0) \in G$ je libovolný bod. Úloha najít řešení rovnice (1.1), které splňuje podmínku

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

se nazývá *počáteční* nebo *Cauchyova úloha*, podmínka (1.2) se nazývá *počáteční* nebo *Cauchyova podmínka.*

1.0.4 Příklad

Nechť $t_0 > 0,\ x_0 \in \mathbb{R}$. Funkce $x(t) = \dfrac{x_0}{t_0} t$ je řešením úlohy

$$x' = \frac{x}{t},\ \ x(t_0) = x_0$$

na intervalu $J = (0, \infty)$.

1.0.5 Definice

Nechť $x = x(t)$ je řešením úlohy (1.1), (1.2) na intervalu J a $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ je řešením úlohy (1.1), (1.2) na intervalu $\tilde{J}$, $t_0 \in J \cap \tilde{J}$. Jestliže $\tilde{J} \subseteq J$ a pro každé $t \in \tilde{J}$ je $x(t) = \tilde{x}(t)$, řekneme, že řešení $x = x(t)$ je *prodloužením řešení* $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ a že řešení $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ je *zúžením řešení* $x = x(t)$. Jestliže řešení $x = x(t)$ úlohy (1.1), (1.2) není zúžením žádného jiného řešení této úlohy, řekneme, že $x = x(t)$ je *úplným (neprodlužitelným) řešením* úlohy (1.1), (1.2).

V dalším budeme pod pojmem „řešení" rozumět úplné řešení.

1.0.6 Příklad

$$x(t) \equiv 0,\ x(t) = t^3,\ x(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ (t-a)^3, & t \geq a \end{cases},$$

kde $a \geq 0$ je libovolné číslo, jsou tři různá úplná řešení počáteční úlohy

$$x' = 3\sqrt[3]{x^2},\ x(0) = 0.$$

1.0.7 Definice

Buď g funkce dvou proměnných. Řekneme, že g je *obecným řešením rovnice* (1.1), jestliže ke každému $(t_0, x_0) \in G$ existuje $C_0 \in \mathbb{R}$ takové, že $x = x(t) = g(t, C_0)$ je řešením úlohy (1.1), (1.2). Řešení úlohy (1.1) (1.2) se nazývá *partikulární řešení rovnice* (1.1).

1.0.8 Příklad

$x = Ct$ je obecným řešením rovnice z příkladu 1.0.2.
Rovnice z příkladu 1.0.2 nemá obecné řešení.

1.0.9 Geometrická interpretace

Rovnice (1.1) přiřazuje každému bodu z G právě jednu hodnotu $x' = f(t, x)$, tedy každému bodu $(t_0, x_0) \in G$ lze přiřadit směrový vektor tečny k integrální křivce v bodě (t_0, x_0), tj. přímky $x - x_0 = f(t_0, x_0)(t - t_0)$. Tento vektor má souřadnice $\big(1, f(t_0, x_0)\big)$. To znamená, že rovnice (1.1) definuje na G vektorové pole. Toto pole se nazývá *směrové pole rovnice* (1.1).

Každá integrální křivka rovnice (1.1) je *vektorovou čárou* směrového pole. Směrové pole tedy poskytuje představu o průběhu řešení rovnice (1.1).

Vrstevnice funkce f, (tj. křivky zadané rovnicí $f(t, x) = c$) se nazývají *izokliny rovnice* (1.1). Jsou to křivky, na nichž mají vektory ze směrového pole stejný směr.

1.0.10 Definice

Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ množina s neprázdným vnitřkem, $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$. Rovnice

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),\ \text{kde}\ \boldsymbol{x}' = (x_1', x_2', \ldots, x_n') \tag{1.3}$$

se nazývá *systém n obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu* nebo *n-vektorová obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu.*

Počáteční podmínku k rovnici (1.3) lze zadat:

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0). \tag{1.4}$$

Pojmy řešení, obecné řešení, partikulární řešení, úplné řešení rovnice (1.3) jsou analogiemi těchto pojmů z jednorozměrného případu. Obecné řešení závisí na n parametrech.

1.0.11 Definice

Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ množina s neprázdným vnitřkem, $f : G \to \mathbb{R}$. Rovnice

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right) \tag{1.5}$$

se nazývá *obyčejná diferenciální rovnice n-tého řádu rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci.* *Řešením* této rovnice se rozumí n-krát diferencovatelná funkce $x : J \to \mathbb{R}$, kde $J \subseteq \mathbb{R}$ je interval, která splňuje podmínky

$$\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right) \in G,\ x^{(n)}(t) = f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)\right)$$

pro každé $t \in J$.

Počáteční (Cauchyovu) podmínku pro rovnici (1.5) zadáváme ve tvaru

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0^1,\ x''(t_0) = x_0^2, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}, \tag{1.6}$$

kde $(t_0, x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^{n-1}) \in G$.
Úplné řešení, obecné řešení, partikulární řešení rovnice (1.5) definujeme analogicky jako u rovnic prvního řádu. Obecné řešení závisí na n parametrech.

1.0.12 Poznámka

Řešení počáteční úlohy (1.5), (1.6) je ekvivalentní s řešením počátečního problému pro systém n diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\begin{array}{rcl} x_1' & = & x_2 \\ x_2' & = & x_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}' & = & x_n \\ x_n' & = & f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array} \tag{1.7}$$

$$x_1(t_0) = x_0,\ x_2(t_0) = x_0^2,\ \ldots,\ x_n(t_0) = x_0^{n-1}, \tag{1.8}$$

v tomto smyslu: Je-li $x = x(t)$ řešením úlohy (1.5), (1.6), pak n-tice funkcí $x_1 = x, x_2 = x', x_3 = x'', \ldots, x_n = x^{(n-1)}$ je řešením úlohy (1.7), (1.8) a je-li n-tice funkcí $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t)$ řešením úlohy (1.7), (1.8), pak je funkce $x = x(t) = x_1(t)$ řešením úlohy (1.5), (1.6).

Kapitola 2

Elementární metody řešení

2.1 Rovnice typu $x' = f(t)$

Jedná se v podstatě o rovnost, jíž je definována primitivní funkce k dané funkci f. Obecné řešení této rovnice tedy je

$$x(t) = \int f(t)\mathrm{d}t$$

a partikulární řešení splňující počáteční podmínku (1.2) je

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau;$$

samozřejmě za předpokladu, že příslušná primitivní funkce nebo určitý integrál existují.

Příklady na užití rovnice tohoto typu jsou 6.1.1 a 6.1.2.

2.2 Exaktní rovnice

$$x' = \frac{f(t,x)}{g(t,x)}\,, \qquad \text{přičemž} \quad \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = -\frac{\partial g(t,x)}{\partial t}$$

Tuto rovnici lze přepsat na tvar $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{f(t,x)}{g(t,x)}$, neboli

$$0 = f(t,x)\mathrm{d}t - g(t,x)\mathrm{d}x\,.$$

Za uvedených podmínek je $f(t,x)\mathrm{d}t - g(t,x)\mathrm{d}x$ totálním diferenciálem nějaké funkce F dvou proměnných (sr. např. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, kap. 4), přičemž platí $\mathrm{d}F(t,x) = 0$. Obecné řešení dané rovnice je tedy implicitně zadáno rovností $F(t,x) = C$, kde C je reálná konstanta.

2.3 Rovnice se separovanými proměnnými $x' = f(t)g(x)$

Rovností $g(x) = 0$ je implicitně zadáno *singulární* (konstantní) řešení. Poznamenejme, že singulární řešení může, ale nemusí, být zahrnuto v řešení obecném pro nějakou volbu integrační konstanty. Rovností

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{g(x)} = \int f(t)\mathrm{d}t$$

je implicitně zadáno obecné řešení dané rovnice.
Rovností

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$$

je implicitně zadáno partikulární řešení této rovnice, které splňuje počáteční podmínku (1.2) takovou, že $g(x_0) \neq 0$. Pokud $g(x_0) = 0$, pak řešením dané rovnice s počáteční podmínkou (1.2) je konstantní funkce $x(t) \equiv x_0$.

Poznamenejme, že rovnici typu 2.1 lze považovat za zvláštní případ rovnice se separovanými proměnnými pro $g(x) \equiv 1$.

2.4 Homogenní rovnice $x' = f\left(\frac{x}{t}\right)$

Zavedeme funkci $u = u(t) = \frac{x(t)}{t}$. Pak $x(t) = tu(t),\ x' = u + tu'$. Dosazením do původní rovnice dostaneme

$$u' = \frac{f(u) - u}{t},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci u.

2.5 Rovnice typu $x' = f\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right)$

1. $c = \gamma = 0$. Pak $f\left(\frac{at + bx}{\alpha t + \beta x}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{x}{t}}{\alpha + \beta\frac{x}{t}}\right)$ a daná rovnice je homogenní.

2. $c^2 + \gamma^2 \neq 0,\ \frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = k$.
   Zavedeme funkci $u = u(t) = at + bx$. Pak $u' = a + bx'$ a tedy $x' = \frac{u' - a}{b}$. Dosazením do původní rovnice dostaneme

   $$u' = a + bf\left(\frac{u + c}{ku + \gamma}\right),$$

   což je rovnice se separovanými proměnnými pro neznámou funkci u.

3. $c^2 + \gamma^2 \neq 0,\ a\beta \neq b\alpha$.
   Nechť m a n jsou řešením soustavy lineárních algebraických rovnic

   $$\begin{aligned} am + bn &= -c \\ \alpha m + \beta n &= -\gamma\,. \end{aligned}$$

   Zavedeme funkce $u = u(t) = t - m$
   $v = v(t) = x - n.$
   Pak $dt = du,\ dx = dv$,
   $at + bx + c = a(u + m) + b(v + n) + c = au + bv + (am + bn) + c = au + bv,$
   $\alpha t + \beta x + \gamma = \alpha(u + m) + \beta(v + n) + \gamma = \alpha u + \beta v + (\alpha m + bn) + \gamma = \alpha u + \beta v$
   Daná rovnice přejde na tvar

   $$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}\right),$$

   což je rovnice typu 1. pro neznámou funkci $v = v(u)$.

2.6 Lineární rovnice $x' = a(t)x + b(t)$

1. $b(t) \equiv 0$ (homogenní rovnice)
   Je to rovnice se separovanými proměnnými. Partikulární řešení počátečního problému (s podmínkou (1.2)) je:

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\
\ln x - \ln x_0 &= \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\
x &= x_0 \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

   Obecné řešení homogenní lineární rovnice lze tedy zapsat

$$x = C \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \,.$$

2. $b(t) \not\equiv 0$ (nehomogenní rovnice)
   Řešení hledáme ve tvaru

$$x(t) = C(t) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau$$

   (*metoda variace konstanty*). Pak $x' = (C'(t) + a(t)C(t)) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau$. Dosazením do dané rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
\big(C'(t) + a(t)C(t)\big) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau &= a(t)C(t) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau + b(t) \\
C'(t) &= b(t) \exp \int_{t}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \\
C(t) - C(t_0) &= \int_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

   Obecné řešení nehomogenní rovnice tedy je

$$x(t) = \left[const + \int_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma \right] \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \,.$$

   Partikulární řešení splňující počáteční podmínku (1.2) je

$$x(t) = \left[x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(b(\sigma) \exp \int_{\sigma}^{t_0} a(\tau)\mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\sigma \right] \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\mathrm{d}\tau \,.$$

Jsou-li koeficienty konstantní, $a(t) \equiv A$, $b(t) \equiv B$, pak

$$x(t) \;=\; \left(x_0 + \frac{B}{A}\right) \mathrm{e}^{A(t-t_0)} - \frac{B}{A}\,.$$

Jiný postup při řešení nehomogenní rovnice:

$$\begin{aligned}
x' - a(t)x &= b(t) && / \ \mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
x'\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} - a(t)x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} &= b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t}\right) &= b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} \\
x\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t} &= \int b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
x &= \mathrm{e}^{\int a(t)\mathrm{d}t} \int b(t)\mathrm{e}^{-\int a(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

2.7 Bernoulliova rovnice $x' = a(t)x + b(t)x^r$, $r \in \mathbb{R}$

Zavedeme funkci $u = u(t) = x(t)^{1-r}$. Pak $x = u^{\frac{1}{1-r}}$, $x' = \dfrac{1}{1-r} u^{\frac{1}{1-r}-1} u'$. Dosadíme do dané rovnice:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-r} u^{\frac{r}{1-r}} u' &= a(t)u^{\frac{1}{1-r}} + b(t)u^{\frac{r}{1-r}} \quad / \ (1-r)u^{\frac{r}{r-1}} \\
u' &= (1-r)a(t)u + (1-r)b(t)\,.
\end{aligned}$$

To je lineární rovnice pro neznámou funkci u.

Jsou-li koeficienty konstantní, $a(t) \equiv A$, $b(t) \equiv B$, lze použít substituci

$$x = \left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}}.$$

pak

$$x' = -\frac{1}{r-1}\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}-1} y'$$

a tedy

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{r-1}\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}-1} y' &= \left(A + B\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-1}\right)\left(y - \frac{B}{A}\right)^{-\frac{1}{r-1}} \\
-\frac{1}{r-1} y' &= \left(A + B\frac{A}{Ay - B}\right)\frac{Ay - B}{A} \\
\frac{1}{1-r} y' &= \frac{A^2y - AB + AB}{Ay - B}\,\frac{Ay - B}{A} \\
y' &= (1-r)Ay,
\end{aligned}$$

což je lineární homogenní rovnice.

Příklad na užití Bernoulliovy rovnice je 6.1.5.

2.8 Rovnice nerozřešená vzhledem k derivaci $F(t, x, x') = 0$ (implicitní rovnice)

Zavedeme funkci $p = p(t) = x'(t)$.

1. Rovnice autonomní $\quad F(x,x')=0$
   Rovnicí $F(x,p)=0$ může být implicitně zadána funkce $p=p(x)$. Rovnici $F(x,p(x))=0$ derivujeme podle proměnné x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x,p)+\frac{\partial F}{\partial p}(x,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,p)}{\dfrac{\partial F}{\partial p}(x,p)}, \end{aligned}$$

   což je rovnice pro neznámou funkci p nezávisle proměnné x rozřešená vzhledem k derivaci. Je-li $p=p(x)$ řešením poslední rovnice, pak rovnice se separovanými proměnnými $x'=p(x)$ je řešením původní rovnice; její obecné řešení je tedy implicitně zadáno rovnicí

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{p(x)} = t+const\,.$$

2. Rovnice nezávisející na neznámé funkci $\quad F(t,x')=0$.
   Rovnici $F(t,p)=0$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t,p)+\frac{\partial F}{\partial p}(t,p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial t}(t,p)}{\dfrac{\partial F}{\partial p}(t,p)}, \end{aligned}$$

   což je rovnice pro neznámou funkci $p=p(t)$ rozřešená vzhledem k derivaci. Je-li $p=p(t)$ řešením poslední rovnice, je funkce $x=x(t)=\int p(t)\mathrm{d}t$ obecným řešením dané rovnice.

3. Clairautova rovnice $\quad x=tx'+g(x')$.
   Rovnici $x=tp+g(p)$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned} p &= p+t\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= \big(t+g'(p)\big)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

   Musí tedy být $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=0$ nebo $t=-g'(p)$.
   Z první rovnosti a dané rovnice dostaneme obecné řešení

$$x(t) = ct+g(c),$$

   kde $c\in\mathbb{R}$ je libovolná konstanta; z druhé rovnice dostaneme parametrické vyjádření singulárního řešení

$$\begin{aligned} t &= -g'(p) \\ x &= -pg'(p)+g(p)\,, \end{aligned}$$

   kde p je parametr.

4. Lagrangeova rovnice $\quad x=tf(x')+g(x')$.
   Rovnici $x=tf(p)+g(p)$ derivujeme podle proměnné t:

$$\begin{aligned} p &= f(p)+tf'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+g'(p)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \\ p-f(p) &= \big(tf'(p)+g'(p)\big)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Má-li rovnice $p - f(p) = 0$ řešení $p \equiv c$, pak $x(t) = ct + c_1$ je singulárním řešením dané rovnice. Konstantu c_1 určíme dosazením do dané rovnice:

$$\begin{aligned} ct + c_1 &= tf(c) + g(c) \\ c_1 &= t\big(f(c) - c\big) + g(c) \end{aligned}$$

a poněvadž $f(c) = c$, je $c_1 = g(c)$. Singulární řešení Lagrangeovy rovnice tedy je

$$x(t) = ct + g(c)\,,$$

kde c je řešením rovnice $c = f(c)$ (je pevným bodem funkce f).
Pro $p \neq f(p)$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}p} = \frac{tf'(p) + g'(p)}{p - f(p)}\,,$$

což je lineární rovnice pro neznámou funkci t nezávisle proměnné p. Označíme-li její řešení $t = t(p) = \Phi(p)$, pak

$$\begin{aligned} t &= \Phi(p) \\ x &= f(p)\Phi(p) + g(p) \end{aligned}$$

je parametrickým vyjádřením obecného řešení Lagrangeovy rovnice.

2.9 Rovnice druhého řádu typu $x'' = f(x)$

Rovnici vynásobíme $2x'$:

$$\begin{aligned} 2x'x'' &= 2x'f(x) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x'^2\right) &= 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}f(x) \end{aligned}$$

Položíme-li $p = x'$, máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p^2 &= 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}f(x) \\ \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2f(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\ \frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}x} &= 2f(x) \\ p^2 &= 2\int f(x)\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Položíme dále $F(x) = 2\int f(x)\mathrm{d}x$ a dostaneme

$$\begin{aligned} p &= \pm\sqrt{F(x)} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \pm\sqrt{F(x)}\,, \end{aligned}$$

což je rovnice prvního řádu se separovanými proměnnými.

2.10 Rovnice typu $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}) = 0,\ k \in \{1, \ldots, n-1\}$

Položíme $y = y(t) = x^{(k)}(t)$ a dostaneme rovnici

$$F\big(t, y, y', y'', \ldots, y^{(n-k)}\big) = 0\,,$$

což je rovnice řádu o k nižšího, než daná rovnice.

2.11 Autonomní rovnice typu $F\left(x, x', x'', \ldots, x^{(n)}\right) = 0$

Položíme $p = p(t) = x'(t)$. Pak

$$\begin{aligned}
x'' &= \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \\
x''' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \left(\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)^2 + p\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}\right)p\,.
\end{aligned}$$

Postupujeme-li tak dále, vidíme, že

$$x^{(k)} = f_k\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{k-1}p}{\mathrm{d}x^{k-1}}\right)$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$. (f_k je nějaká funkce k proměnných.) Dosazením do původní rovnice tedy dostaneme

$$F\left(x, p, p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, f_3\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}x^2}\right), \ldots, f_n\left(p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right)\right) = 0\,,$$

neboli

$$G\left(x, p, \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^{n-1}p}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right) = 0\,,$$

což je rovnice řádu o jedna nižšího, než daná rovnice.

2.12 Rovnice homogenní v $x, x', x'', \ldots, x^{(n)}$

Nechť F je funkce $n+1$ proměnných splňující podmínku

$$F(z_0, cz_1, cz_2, \ldots, cz_n) = cF(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n) \qquad (*)$$

pro každé $c \in \mathbb{R}$ a každé $(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \operatorname{Dom} F$.
Řešení rovnice

$$F\big(t, x, x', x'' \ldots, x^{(n)}\big) = 0$$

lze hledat ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}$, kde $y = y(t)$ je nová neznámá funkce. Je totiž

$$\begin{aligned}
x' &= y\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} \\
x'' &= y'\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} + y^2\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = (y' + y^2)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} \\
x''' &= (y'' + 2yy')\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} + (y' + y^2)y\,\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} = (y'' + 3yy' + y^3)\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dosadíme-li z těchto rovnic do dané rovnice, vypadne vzhledem k podmínce (*) faktor $\mathrm{e}^{\int y(t)\mathrm{d}t}$ a dostaneme rovnici řádu o 1 nižšího, než byla daná rovnice.

2.13 Ekvidimensionální rovnice

Řekneme, že rovnice

$$F\big(t, x, x', \ldots, x^{(n)}\big) = 0$$

je *ekvidimensionální v nezávisle proměnné*, jestliže změna měřítka nezávisle proměnné $t \mapsto at$ pro každé $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nezmění její tvar. Transformace $t = \mathrm{e}^\tau$ převede danou rovnici na rovnici autonomní (typ 2.11).

2.14 Cvičení

Řešte rovnice (Cauchyovy úlohy)

1) $2t(2x-3)\mathrm{d}t+(t^2+1)\mathrm{d}x=0$

2) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{t-x}$

3) $t\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+\dfrac{t^2+1}{x}\mathrm{d}t=0$

4) $\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}x+\sqrt{x^2-1}\,\mathrm{d}t=0$

5) $t^2\mathrm{d}x+(x^2-tx)\mathrm{d}t=0$

6) $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{t+x}{x-t}$

7) $\left(t\sin\dfrac{x}{t}-x\cos\dfrac{x}{t}\right)\mathrm{d}t+t\cos\dfrac{x}{t}\,\mathrm{d}x=0$

8) $2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-x=\mathrm{e}^{t/2}$

9) $t\mathrm{d}x+x\mathrm{d}t=\sin t\mathrm{d}t$

10) $(t-1)^3x'+4(t-1)^2x=t+1$

11) $\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}t+2(t\mathrm{e}^{2x}-x)\mathrm{d}x=0$

12) $(x^2+1)\mathrm{d}t+(2tx+1)\mathrm{d}x=0$

13) $(t+x)\mathrm{d}t+(t+x^2)\mathrm{d}x=0$

14) $t\mathrm{d}x-x\mathrm{d}t+t^3\mathrm{d}t=0$

15) $(t^2+t-x)\mathrm{d}t+t\mathrm{d}x=0$

16) $(\cos t+x\cos t)\mathrm{d}t+\mathrm{d}x=0;\ x(\pi/2)=0$

17) $x'+2x=t;\ x(0)=2$

18) $(t+2x)\mathrm{d}t+(x+2t)\mathrm{d}x=0;\ x(1)=1$

19) Určete konstanty a, b, c tak, aby rovnice $(at^2+bx^2)\mathrm{d}t+ctx\,\mathrm{d}x=0$ byla exaktní a vyřešte ji.

20) Řešte počáteční úlohu pro implicitní rovnici druhého řádu

$$x\,x''=t\,(x')^2\,,\quad x(1)=1,\ x'(1)=-1.$$

Výsledky:

1)$x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{C}{(t^2+1)^2}$ **2)**$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^t+C$ **3)**$\mathrm{e}^x(x-1)+\dfrac{t^2}{2}+\ln|t|=C$ **4)**$(x+\sqrt{x^2-1}\,)(t+\sqrt{t^2+1}\,)=C$
5)$x=\dfrac{t}{\ln|t|+C}$ **6)**$\dfrac{1}{2}\ln(t^2+x^2)+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{t}=C$ **7)**$x=t\arcsin\dfrac{C}{t}$ **8)**$x=\dfrac{t+C}{2}\mathrm{e}^{t/2}$ **9)**$x=\dfrac{C-\cos t}{t}$
10)$x=\dfrac{t^3-3t+C}{3(t-1)^4}$ **11)**$t=\dfrac{x^2+C}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ **12)**$t=\dfrac{C-x}{x^2+1}$ **13)**$\dfrac{t^2}{2}+tx+\dfrac{x^3}{3}=C$ **14)**$x=Ct-\dfrac{t^3}{2}$
15)$x=Ct-t^2-t\ln|t|$ **16)**$x=\mathrm{e}^{1-\sin t}-1$ **17)**$x=\dfrac{t}{2}+\dfrac{9}{4}\mathrm{e}^{-2t}-\dfrac{1}{4}$ **18)**$t^2+4tx+x^2=6$
19)$c=2b;\ \dfrac{at^3}{3}+btx^2=C$ **20)**$x=\exp\left(\sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}\right)$

Kapitola 3

Obecné vlastnosti obyčejných diferenciálních rovnic

3.1 Vektorové a maticové funkce

3.1.1 Normy vektorů a matic

Normu vektoru $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ definujeme předpisem $|\boldsymbol{x}| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

Normu matice $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ definujeme předpisem $|\mathsf{A}| = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Na množině vektorů zavádíme metriku $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$, na množině matic zavádíme metriku $\rho(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = |\mathsf{A} - \mathsf{B}|$. Jedná se o součtovou neboli taxíkářskou metrikou, sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, I.1.1.2.iii.

• Platí: $|\mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x}| \le |\mathsf{A}|\,|\boldsymbol{x}|$. Této vlastnosti se říká, že *maticová norma je souhlasná s vektorovou normou.*

D.: Pro libovolné $i, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $|a_{ik}| \le \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Odtud plyne

$$|\mathsf{A}\boldsymbol{x}| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right) \right| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \right| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|\,|x_k| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \right) \le \sum_{k=1}^{n} \left(|x_k| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k| \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right).$$

□

3.1.2 Spojitost, derivace a integrál vektorových a maticových funkcí

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots\\ x_n(t)\end{pmatrix}=\big(x_i(t)\big),\qquad \mathsf{A}(t)=\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}=\big(a_{ij}(t)\big)$$

Vektorová funkce $\boldsymbol{x}$ (resp. maticová funkce A) je spojitá v bodě t_0 svého definičního oboru, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že pro všechna t z definičního oboru funkce $\boldsymbol{x}$ z nerovnosti $|t-t_0|<\delta$ plyne nerovnost $|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t_0)|<\varepsilon$ (resp. $|\mathsf{A}(t)-\mathsf{A}(t_0)|<\varepsilon$). Vektorová (resp. maticová) funkce je spojitá právě tehdy, když všechny její složky jsou spojité.

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{x}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}x_i(t)\right),\quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}(t)=\boldsymbol{x}'(t)=\big(x_i'(t)\big),\quad \int_{t_0}^{t}\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s=\left(\int_{t_0}^{t}x_i(s)\mathrm{d}s\right)$$

$$\lim_{t\to t_0}\mathsf{A}(t)=\left(\lim_{t\to t_0}a_{ij}(t)\right),\quad \frac{\mathrm{d}\mathsf{A}}{\mathrm{d}t}(t)=\mathsf{A}'(t)=\big(a_{ij}'(t)\big),\quad \int_{t_0}^{t}\mathsf{A}(s)\mathrm{d}s=\left(\int_{t_0}^{t}a_{ij}(s)\mathrm{d}s\right)$$

3.2 Existence a jednoznačnost řešení systému ODR

Budeme se zabývat úlohou (1.3), (1.4).

3.2.1 Lemma

Buď $\boldsymbol{f}$ spojitá na $G\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$. Funkce $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ je řešením úlohy (1.3), (1.4) na intervalu J právě tehdy, když pro každé $t\in J$ je $\big(t,\boldsymbol{x}(t)\big)\in G$ a

$$\boldsymbol{x}(t)\;=\;\boldsymbol{x}^0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}\big(s,\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s\,. \tag{3.1}$$

D.: „⇒“ Nechť $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ je řešením úlohy (1.3), (1.4) na J. Pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{x}(s)\;=\;\boldsymbol{f}\big(s,\boldsymbol{x}(s)\big)$$

na J. Integrací této rovnosti podle s v mezích $[t_0,t]$ dostaneme:

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{x}(s)]_{t_0}^{t}\;&=\;\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}\big(s,\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s\\ \boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(t_0)\;&=\;\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}\big(s,\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

a vzhledem k (1.4) funkce $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ splňuje (3.1).

„⇐“ Nechť funkce $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ splňuje (3.1). Pak $\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}^0+\int_{t_0}^{t_0}\boldsymbol{f}\big(s,\boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s=\boldsymbol{x}^0$, tedy je splněna podmínka (1.4). Derivováním (3.1) podle t dostaneme (1.3). □

Nechť $C^1(J)$ je množina (vektorových) funkcí $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ diferencovatelných na uzavřeném intervalu J takových, že $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Na této množině zavedeme metriku

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| : t \in J\}$$

(metrika stejnoměrné konvergence). Prostor $\big(C^1(J), \rho\big)$ je úplný (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, I.1.1.2.iv a III.1.3.6.i). Dále definujme zobrazení $F : C^1(J) \to C^1(J)$ předpisem:

$$F(\boldsymbol{x})(t) \;=\; \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s\,.$$

Řešení úlohy (1.3), (1.4), tedy funkce, která splňuje (3.1), je zřejmě pevným bodem zobrazení F. Podaří-li se tedy ukázat, že F je kontrakce úplného metrického prostoru $\big(C^1(J), \rho\big)$, z Banachovy věty vyplyne, že existuje jediný pevný bod tohoto zobrazení, tedy že existuje jediné diferencovatelné řešení úlohy (1.3), (1.4) (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, IV.2. a V.1.).

3.2.2 Věta (Picard [1856–1941]–Lindelöf [1870–1946])

Buďte $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0,\ t_0 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Označme $\tilde{J} = [t_0, t_0 + a],\ D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| \leq b\}$, $m = \max\{|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| : (t, \boldsymbol{x}) \in \tilde{J} \times D\}$, $\delta = \min\left\{a, \dfrac{b}{m}\right\}$. Nechť funkce $\boldsymbol{f} : \tilde{J} \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a vzhledem k $\boldsymbol{x}$ Lipschitzovská (tj. existuje $L \in \mathbb{R}$ tak, že platí $|f(t, \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})| \leq L|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ pro všechna $t \in \tilde{J},\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$). Pak existuje právě jedno řešení počátečního problému (1.3), (1.4) definované na intervalu $J = [t_0, t_0 + \delta]$.
Toto řešení je (stejnoměrnou) limitou posloupnosti funkcí $\{\boldsymbol{x}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$; tato posloupnost je definována rekurentně vztahy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_1 \;&=\; \boldsymbol{x}^0 \\
\boldsymbol{x}_{k+1} \;&=\; \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}_k(s)\big)\mathrm{d}s, \quad k = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

D.: Funkce $\boldsymbol{y}(t) = F(\boldsymbol{x})(t)$ je diferencovatelná, $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}(t)\big)$ (sr. V Novák: *Integrální počet v* $\mathbb{R}$., MU, Brno 2001, 2.4, věta 4.2). To znamená, že zobrazení F definované před větou zobrazuje $C^1(J)$ do sebe. Buď $K > L$. Na $C^1(J)$ zavedeme metriku ρ^* vztahem

$$\rho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \;=\; \max\left\{\mathrm{e}^{-K(t-t_0)}|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)| : t \in J\right\}.$$

Tato metrika je na $C^1(J)$ ekvivalentní s metrikou stejnoměrné konvergence ρ, neboť

$$\mathrm{e}^{-K\delta}\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \rho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,.$$

Prostor $\big(C^1(J), \rho^*\big)$ je tedy úplný.
Položme $P = \{\boldsymbol{x} \in C^1(J) : |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}^0| \leq b$ pro každé $t \in J\}$. Poněvadž $\overline{P}$ je uzavřená podmnožina $C^1(J)$, je prostor $(\overline{P}, \rho^*)$ úplný (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, III.1.3.3). Zobrazení F zobrazuje množinu $\overline{P}$ do sebe, neboť pro každou funkci $\boldsymbol{x} \in P$ platí

$$|F(\boldsymbol{x})(t) - \boldsymbol{x}^0| \;=\; \left|\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\right| \;\leq\; \int_{t_0}^{t} \big|\boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\big|\,\mathrm{d}s \;\leq\; (t - t_0)m \leq \delta m \;\leq b\,.$$

Ukážeme, že F je kontrakcí prostoru $(\overline{P}, \rho^*)$: Pro každé $t \in J$ platí

$$\begin{aligned}
\rho^*\big(F(\boldsymbol{x}), F(\boldsymbol{y})\big) \quad &\leq \quad \mathrm{e}^{-K(t-t_0)}|F(\boldsymbol{x})(t) - F(\boldsymbol{y})(t)| \ = \\
&= \quad \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \left| \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{y}(s)\big)\mathrm{d}s \right| \ \leq \\
&\leq \quad \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big) - \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{y}(s)\big)\right| \mathrm{d}s \ \leq \\
&\leq \quad \mathrm{e}^{-K(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} L|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)|\mathrm{d}s \ = \\
&= \quad L \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-K(t-s)}\mathrm{e}^{-K(s-t_0)}|\boldsymbol{x}(s) - \boldsymbol{y}(s)|\mathrm{d}s \ \leq \\
&\leq \quad L \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-K(t-s)}\rho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\mathrm{d}s \ = \\
&= \quad L\rho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \left[\frac{1}{K}\mathrm{e}^{-K(t-s)}\right]_{s=t_0}^{t} \ = \\
&= \quad \frac{L}{K}\rho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \left(1 - \mathrm{e}^{-K(t-t_0)}\right) \ \leq \\
&\leq \quad \frac{L}{K}\rho^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\,.
\end{aligned}$$

Poněvadž $L < K$, je $\dfrac{L}{K} < 1$, což znamená, že F je kontrakce. □

3.2.3 Poznámky

1. Posloupnost funkcí zavedená v 3.2.2 se nazývá *Picardova posloupnost postupných aproximací.*

2. Analogické tvrzení platí, nahradíme-li v 3.2.2 interval $\tilde{J} = [t_0, t_0 + a]$ intervalem $[t_0 - a, t_0]$ nebo intervalem $[t_0 - a, t_0 + a]$.

3. Má-li funkce $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ ohraničené parciální derivace všech složek podle každé z proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ na množině $\tilde{J} \times D$ (zavedené v 3.2.2), pak jsou předpoklady Picardovy-Lindelöfovy věty splněny.

   D.: Množina $\tilde{J} \times D$ jakožto uzavřená a ohraničená podmnožina prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$ je kompaktní (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Metrické prostory.* MU, Brno 1996, III.3.3.16). Z ohraničenosti parciálních derivací funkce $\boldsymbol{f}$ plyne existence čísla

$$M = \max\left\{\frac{\partial f_i(t, \boldsymbol{x})}{\partial x_j} : i = 1, 2, \dots, n,\ j = 1, 2, \dots, n,\ (t, \boldsymbol{x}) \in \tilde{J} \times D\right\}.$$

   Podle věty o střední hodnotě pro funkce více proměnných (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, 3.4) pro všechna $t \in \tilde{J}$

a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$ existují čísla ξ_k ležící mezi x_k a y_k, $k = 1, 2, \dots, n$ taková, že

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})| &= \sum_{i=1}^{n} |f_i(t,\boldsymbol{x}) - f_i(t,\boldsymbol{y})| = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \xi_k, y_{k+1}, \dots, y_n)(x_k - y_k) \right| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(t, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, \xi_k, y_{k+1}, \dots, y_n) \right| |x_k - y_k| \leq \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} M|x_k - y_k| = \sum_{i=1}^{n} M|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| = nM|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|,
\end{aligned}$$

takže funkce $\boldsymbol{f}$ je vzhledem k $\boldsymbol{x}$ Lipschitzovská s konstantou nM. □

3.2.4 Důsledky

1. Má-li (vektorová) funkce $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$ ohraničené parciální derivace všech složek podle každé z proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ v jistém okolí bodu $(t_0, \boldsymbol{x}^0)$, pak počáteční problém (1.3), (1.4) má v okolí t_0 jediné řešení.
2. Má-li (skalární) funkce $f(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ v jistém okolí bodu $(t_0, x_0, x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ ohraničené parciální derivace podle každé z proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$, pak počáteční problém (1.5), (1.6) má v okolí t_0 jediné řešení.

3.2.5 Věta (Peano [1890])

Buďte $a, b \in \mathbb{R},\ a, b > 0,\ t_0 \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Označme $\tilde{J} = [t_0, t_0 + a],\ D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| \leq b\}$, $m = \max\{|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})| : (t,\boldsymbol{x}) \in \tilde{J} \times D\}$, $\delta = \min\left\{a, \dfrac{b}{m}\right\}$. Nechť funkce $\boldsymbol{f} : \tilde{J} \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Pak existuje alespoň jedno řešení počátečního problému (1.3), (1.4) definované na intervalu $J = [t_0, t_0 + \delta]$.

D.: Viz Kalas, Ráb: Obyčejné diferenciální rovnice, str. 67–70. □

3.3 Globální vlastnosti řešení systému ODR

3.3.1 Věta (o existenci úplného řešení)

Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Je-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ řešení rovnice (1.3), pak je toto řešení buď úplné, nebo existuje úplné řešení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$, které je prodloužením řešení $\boldsymbol{x}$.

D.: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 73–76. Důkaz využívá věty 3.2.5.□

3.3.2 Definice

Buď $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Řekneme, že funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je *lokálně lipschitzovská v G vzhledem k $\boldsymbol{x}$*, jestliže ke každému $(\tau, \boldsymbol{a}) \in G$ existuje okolí $\mathcal{O}_{\tau,\boldsymbol{a}} \subseteq G$ a číslo $L_{\tau,\boldsymbol{a}} \in \mathbb{R}$ tak, že pro všechna $(t,\boldsymbol{x}), (t,\boldsymbol{y}) \in \mathcal{O}_{\tau,\boldsymbol{a}}$ platí $|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})| \leq L_{\tau,\boldsymbol{a}}|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$.

3.3.3 Věta (o globální jednoznačnosti)

Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a lokálně lipschitzovská v G vzhledem k $\boldsymbol{x}$ a nechť funkce $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ jsou dvě řešení rovnice (1.3). Jestliže existuje t_0 takové, že $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{y}(t_0)$, pak $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$ pro všechna t, v nichž jsou řešení $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ definována.

D.: Připusťme, že existuje $b > t_0$ takové, že $\boldsymbol{x}(b) \neq \boldsymbol{y}(b)$. Označme $c = \inf\{t : \boldsymbol{x}(t) \neq \boldsymbol{y}(t)\}$.
Funkce $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou spojité (poněvadž jsou diferencovatelné).
Ukážeme, že $\boldsymbol{x}(c) = \boldsymbol{y}(c)$:
Připusťme, že $\boldsymbol{x}(c) \neq \boldsymbol{y}(c)$. Položme $\varepsilon = |\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{y}(c)|$.
K $\dfrac{\varepsilon}{4} > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t \in (c-\delta, c)$ je $|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(c)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ a $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(c)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$.
Poněvadž pro $t \in (c-\delta, c)$ je $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$, platí pro $t \in (c-\delta, c)$ nerovnost

$$\varepsilon = |\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{y}(c)| = |\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(c)| \leq |\boldsymbol{x}(c) - \boldsymbol{x}(t)| + |\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}(c)| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2},$$

což je spor, neboť $\varepsilon > 0$, a tedy $\boldsymbol{x}(c) = \boldsymbol{y}(c)$.
Podle 3.2.2 nyní existuje α takové, že pro $t \in [c, c+\alpha]$ je $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{y}(t)$, což je spor.
Analogicky vyloučíme možnost existence $b < t_0$ takového, že $\boldsymbol{x}(b) \neq \boldsymbol{y}(b)$. $\square$

3.3.4 Definice

Buď $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplné řešení rovnice (1.3) definované na intervalu (S, T), kde $-\infty \leq S < T \leq \infty$.
Řekneme, že $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ je *ω-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$*, jestliže existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $t_k < T$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = T$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{\xi}$.
Řekneme, že $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ je *α-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$*, jestliže existuje posloupnost $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $t_k > S$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = S$ a $\lim\limits_{k\to\infty} \boldsymbol{x}(t_k) = \boldsymbol{\xi}$.
Řekneme, že $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ je *limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$*, jestliže je ω-limitním bodem nebo α-limitním bodem.
Množina všech ω-limitních bodů řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá *ω-limitní množina řešení $\boldsymbol{x}$*, množina všech α-limitních bodů řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá *α-limitní množina řešení $\boldsymbol{x}$*, množina všech limitních bodů řešení $\boldsymbol{x}$ se nazývá *limitní množina řešení $\boldsymbol{x}$*.

3.3.5 Příklady

1. $x = \mathrm{e}^{at}$ je úplné řešení rovnice $x' = ax$ definované na intervalu $(-\infty, \infty)$. Je-li $a > 0$, je 0 α-limitním bodem tohoto řešení a ω-limitní body toto řešení nemá. Je-li $a < 0$, je 0 ω-limitním bodem tohoto řešení a α-limitní body toto řešení nemá. Je-li $a = 0$, je 1 α- i ω-limitním bodem tohoto řešení.

2. $x = \sin\dfrac{1}{t}$ je úplné řešení rovnice $x' = -\dfrac{\cos\frac{1}{t}}{t^2}$ definované na intervalu $(-\infty, 0)$. Interval $[-1, 1]$ je ω-limitní množinou tohoto řešení.

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \operatorname{tg} t \\ \sin \operatorname{tg} t \end{pmatrix}$ je úplné řešení soustavy rovnic $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\dfrac{y}{\cos^2 t} \\ \dfrac{x}{\cos^2 t} \end{pmatrix}$ definované na intervalu $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Limitní množina tohoto řešení je $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

3.3.6 Věta

Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ a $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ je úplné řešení rovnice (1.3) definované na intervalu (S, T). Pak platí:
$T = \infty$ nebo každý ω-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$ leží na hranici G.
$S = -\infty$ nebo každý α-limitní bod řešení $\boldsymbol{x}$ leží na hranici G.

D.: Buď $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplné řešení rovnice (1.3) definované na intervalu (S, T), $T < \infty$ a buď $\boldsymbol{\xi}$ jeho ω-limitní bod. Kdyby $(T, \boldsymbol{\xi}) \in G$, pak by existovalo okolí $\mathcal{O}_{T,\boldsymbol{\xi}}$ bodu $(T, \boldsymbol{\xi})$ takové, že $\mathcal{O}_{T,\boldsymbol{\xi}} \subseteq G$, neboť G je otevřená. Podle 3.2.5 by existovalo řešení $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ rovnice (1.3) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(T) = \boldsymbol{\xi}$ definované na $[T, T+\delta]$, kde δ je vhodné (malé) číslo. Funkce

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{x}(t), & S < t < T \\ \boldsymbol{y}(t), & T + \delta \end{cases}$$

by byla řešením rovnice (1.3), které by bylo prodloužením řešení $\boldsymbol{x}$, což by byl spor s úplností řešení $\boldsymbol{x}$.

Pro α-limitní bod se důkaz provede analogicky s využitím „levostranné varianty“ věty 3.2.5. □

3.3.7 Důsledek

Nechť $J = [t_0, \infty)$, $D = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| < a\}$, kde $t_0 \in \mathbb{R}$ a $0 < a \leq \infty$ a nechť funkce $\boldsymbol{f} : J \times D \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Jestliže existuje spojitá funkce $g : J \to \mathbb{R}$ taková, že úplné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ rovnice (1.3) definované na (S, T) splňuje pro každé $t \in [t_0, T)$ podmínku $|\boldsymbol{x}(t)| \leq g(t) < a$, pak $T = \infty$.

3.3.8 Důsledek

Nechť $J = [t_0, \infty)$ a funkce $\boldsymbol{f} : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitá. Jestliže existuje $m \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $(t, \boldsymbol{x}) \in J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ platí $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \leq m$, pak každé úplné řešení rovnice (1.3) je definováno pro všechna $t \geq t_0$.

D.: Buď $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ úplné řešení rovnice (1.3). Podle 3.2.1 je

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s\,.$$

Pro každé t, pro něž je $\boldsymbol{x}(t)$ definováno, platí

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x}(t)| \;&=\; \left| \boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\mathrm{d}s \right| \;\leq\; |\boldsymbol{x}(t_0)| + \int_{t_0}^{t} \big|\boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{x}(s)\big)\big|\,\mathrm{d}s \;\leq \\ &\leq\; |\boldsymbol{x}(t_0)| + m(t - t_0)\,. \end{aligned}$$

Tvrzení tedy plyne z 3.3.7, položíme-li $g(t) = |\boldsymbol{x}(t_0)| + m(t - t_0)$. □

Toto tvrzení umožňuje rozhodnout, zda lze každé řešení rovnice (1.3) prodloužit do nekonečna, aniž bychom toto řešení znali.

3.3.9 Věta (o spojité závislosti řešení na počátečních podmínkách a parametrech)

Buď Ω otevřená množina v $\mathbb{R}^{1+n+m}$ a nechť funkce $\boldsymbol{g} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je taková, že pro všechna $\tau \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ splňující podmínku $(\tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) \in \Omega$, má počáteční problém

$$\boldsymbol{x}' \;=\; \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \boldsymbol{x}(\tau) \;=\; \boldsymbol{\xi}$$

právě jedno úplné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}(t; \tau, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda})$. Pak toto řešení, chápané jako zobrazení

$$\mathbb{R}^{1+1+n+m} \to \mathbb{R}^n,$$

je spojité.

D.: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 82–83. □

Tato věta říká, že změní-li se málo funkce $\boldsymbol{f}$ v rovnici (1.3) a málo se změní počáteční podmínka (1.4), pak se řešení nového — změněného — problému liší na konečném intervalu málo od řešení původního problému.

3.4 Odhady řešení

3.4.1 Definice

Řešení $x^* = x^*(t)$ úlohy (1.1), (1.2) se nazývá *maximální řešení*, jestliže pro každé řešení $x = x(t)$ této úlohy platí $x(t) \le x^*(t)$ pro všechna t, v nichž jsou obě řešení definována.
Řešení $x_* = x_*(t)$ úlohy (1.1), (1.2) se nazývá *minimální řešení*, jestliže pro každé řešení $x = x(t)$ této úlohy platí $x_*(t) \le x(t)$ pro všechna t, v nichž jsou obě řešení definována.

3.4.2 Věta (srovnávací)

Nechť $t_0 \in \mathbb{R}$, $0 < a \le \infty$, $J = [t_0, \infty)$, $G = \{(t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in J, |\boldsymbol{x}| < a\}$. Nechť dále $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá funkce a $g : J \times [0, a) \to [0, \infty)$ je spojitá funkce taková, že $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \le g(t, |\boldsymbol{x}|)$ pro $(t, \boldsymbol{x}) \in G$. Buď $u_0 \ge |\boldsymbol{x}^0|$ a $u^* = u^*(t)$ maximální řešení úlohy

$$u' = g(t, u), \quad u(t_0) = u_0$$

na intervalu J. Pak každé úplné řešení úlohy (1.3), (1.4) je definováno pro všechna $t \in J$ a platí

$$|\boldsymbol{x}(t)| \le u^*(t) \quad \text{pro } t \in J\,.$$

D.: Viz J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 91. □

3.4.3 Důsledek

Nechť symboly t_0, a, J, G mají stejný význam jako v 3.4.2. Nechť funkce $\boldsymbol{f} : G \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a nechť existuje spojitá funkce $\varphi : J \to [0, \infty)$ taková, že

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \le \varphi(t)|\boldsymbol{x}| \quad \text{pro } (t, \boldsymbol{x}) \in G.$$

Pak pro každé $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$|\boldsymbol{x}^0| \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau < a \quad \text{pro všechna } t \in J,$$

jsou úplná řešení úlohy (1.3), (1.4) definována na celém intervalu J a platí

$$|\boldsymbol{x}(t)| \le |\boldsymbol{x}^0| \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau \quad \text{pro } t \in J\,.$$

D.: Plyne z 3.4.2 volbou $g(t, u) = \varphi(t)u$, $u_0 = |\boldsymbol{x}^0|$.
Jediné úplné (tedy maximální) řešení úlohy $u' = \varphi(t)u$, $u(t_0) = u_0$ je podle 2.6

$$u(t) = u_0 \exp \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\mathrm{d}\tau\,.$$

□

Kapitola 4

Lineární rovnice

4.1 Systémy lineárních ODR

Systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic je tvaru

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1'(t) & = & a_{11}(t)x_1 & + & a_{12}(t)x_2 & + & \dots & + & a_{1n}(t)x_n & + & b_1(t) \\
x_2'(t) & = & a_{21}(t)x_1 & + & a_{22}(t)x_2 & + & \dots & + & a_{2n}(t)x_n & + & b_2(t) \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \\
x_n'(t) & = & a_{n1}(t)x_1 & + & a_{n2}(t)x_2 & + & \dots & + & a_{nn}(t)x_n & + & b_n(t)
\end{array}$$

Při označení

$$\mathsf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

lze tento systém zapsat v maticovém tvaru

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}(t) \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)\,. \tag{4.1}$$

Tuto rovnici nazýváme *nehomogenní lineární rovnice*. Spolu s rovnicí (4.1) budeme uvažovat počáteční podmínku

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0\,. \tag{4.2}$$

Rovnici

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}(t) \cdot \boldsymbol{x} \tag{4.3}$$

nazýváme *lineární homogenní rovnicí přidruženou k rovnici* (4.1).

4.1.1 Věta o existenci a jednoznačnosti řešení

Nechť maticová funkce $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t)$ a vektorová funkce $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(t)$ jsou spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$. Pak má počáteční problém (4.1), (4.2) právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu J.

D.: Vzhledem k 3.2.2 a 3.3.3 stačí ukázat, že ke každému $\tau \in J$ existuje okolí $\mathcal{O}_\tau \subseteq J$ takové, že funkce $\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t)$ je Lipschitzovská vzhledem k $\boldsymbol{x}$ na $\mathbb{R}^n \times \mathcal{O}_\tau$.
Je-li τ vnitřní bod intervalu J, existuje $a \in \mathbb{R},\ a > 0$ takové, že $[\tau - a, \tau + a] \subseteq J$.

Položme $L_\tau = \max\{|\mathsf{A}(t)| : t \in [\tau - a, \tau + a]\}$ (toto maximum existuje podle druhé Weierstrassovy věty), $\mathcal{O}_\tau = (\tau - a, \tau + a)$. Pak pro každé $t \in \mathcal{O}_\tau$ a každé dva vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ platí podle tvrzení v 3.1.1

$$\left|\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t) - \big(\mathsf{A}(t)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t)\big)\right| = |\mathsf{A}(t)\boldsymbol{x} - \mathsf{A}(t)\boldsymbol{y}| = |\mathsf{A}(t)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})| \le |\mathsf{A}(t)|\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| \le L_\tau |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\,.$$

Je-li τ pravý krajní bod intervalu J, položíme

$$L_\tau = \max\{|\mathsf{A}(t)| : \tau - a \le t \le \tau\}, \quad \mathcal{O}_\tau = (\tau - a, \tau]$$

a provedeme analogickou úvahu.
Pro levý krajní bod intervalu J provedeme důkaz podobně. □

4.1.2 Poznámka

Řešení problému (4.1), (4.2) lze hledat jako limitu Picardovy posloupnosti postupných aproximací. Zejména pro $\mathsf{A}(t) = \mathsf{A} = (a_{ij})$ (konstantní matice) a $\boldsymbol{b}(t) \equiv 0$ je (označíme-li E jednotkovou matici):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^0(t) &= \boldsymbol{x}^0 = (x_i^0)\\
\boldsymbol{x}^1(t) &= \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathsf{A}\cdot\boldsymbol{x}^0 \mathrm{d}s = \left(x_i^0 + \int_{t_0}^{t}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0\right)\mathrm{d}s\right) = \left(x_i^0 + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0(t-t_0)\right)\\
\boldsymbol{x}^2(t) &= \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(x_k^0 + \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j^0(s-t_0)\right)\right)\mathrm{d}s =\\
&= \boldsymbol{x}^0 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k^0(t-t_0) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}a_{kj}x_j^0\frac{(t-t_0)^2}{2}\right) =\\
&= \boldsymbol{x}^0 + \mathsf{A}\cdot\boldsymbol{x}^0(t-t_0) + (\mathsf{A}\cdot\mathsf{A})\cdot\boldsymbol{x}^0\frac{(t-t_0)^2}{2} = \left(\mathsf{E} + \mathsf{A}(t-t_0) + \frac{\mathsf{A}^2}{2}(t-t_0)^2\right)\cdot\boldsymbol{x}^0\\
&\ \vdots\\
\boldsymbol{x}^k(t) &= \left(\mathsf{E} + \mathsf{A}(t-t_0) + \frac{\mathsf{A}^2}{2!}(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{\mathsf{A}^k}{k!}(t-t_0)^k\right)\cdot\boldsymbol{x}^0\\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Pokud bychom A považovali za konstantu a E za jedničku (tj. pro $n = 1$), je výraz v závorce k-tým částečným součtem Taylorovy řady funkce $\mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}$. Řešení úlohy

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\cdot\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$$

lze proto zapsat ve tvaru $\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}\cdot\boldsymbol{x}^0$. Matice $\mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)}$ je dána nekonečnou řadou

$$\mathrm{e}^{\mathsf{A}(t-t_0)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^k}{k!}\mathsf{A}^k.$$

Lze ukázat, že tato řada konverguje pro každé $t \in \mathbb{R}$ a tato konvergence je stejnoměrná.

4.1.3 Věta (princip superpozice)

Jsou-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ řešení rovnice (4.3), pak také $c_1\boldsymbol{x}(t) + c_2\boldsymbol{y}(t)$, kde c_1, c_2 jsou konstanty, je řešením rovnice (4.3).

D.: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c_1\boldsymbol{x}+c_2\boldsymbol{y}) = c_1\boldsymbol{x}'+c_2\boldsymbol{y}' = c_1\mathsf{A}(t)\cdot\boldsymbol{x}+c_2\mathsf{A}(t)\cdot\boldsymbol{y} = \mathsf{A}(t)\cdot(c_1\boldsymbol{x})+\mathsf{A}(t)\cdot(c_2\boldsymbol{y}) = \mathsf{A}(t)\cdot(c_1\boldsymbol{x}+c_2\boldsymbol{y})$
□

4.1.4 Věta

Je-li maticová funkce $\mathsf{A} = \mathsf{A}(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j=1}^{n}$ spojitá na intervalu J, pak množina všech řešení rovnice (4.3) tvoří n-rozměrný vektorový prostor.

D.: $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ je řešením rovnice (4.3).
Podle 4.1.3 je libovolná lineární kombinace řešení rovnice (4.3) také řešením této rovnice.
Buďte $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ báze n-rozměrného vektorového prostoru a $\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{y}^k(t)$ řešení rovnice (4.3) s počátečními podmínkami $\boldsymbol{y}^k(t_0) = \boldsymbol{x}^k,\ k = 1, 2, \ldots, n$.
Vektory $\boldsymbol{y}^1(t), \boldsymbol{y}^2(t), \ldots, \boldsymbol{y}^n(t)$ jsou lineárně nezávislé pro každé $t \in J$:

Kdyby existovalo $t_1 \in J$ a konstanty $c_1, c_2, \ldots, c_n$, ne všechny rovny nule, takové, že $c_1\boldsymbol{y}^1(t_1) + c_2\boldsymbol{y}^2(t_1) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}^n(t_1) = \boldsymbol{o}$, pak by podle 4.1.3 také funkce

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t) = c_1\boldsymbol{y}^1(t) + c_2\boldsymbol{y}^2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}^n(t)$$

byla řešením rovnice (4.3) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{z}(t_1) = \boldsymbol{o}$. Poněvadž ale $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{o}$ je řešením rovnice (4.3), vzhledem k jednoznačnosti řešení (sr. 4.1.1) by $\boldsymbol{z}(t) \equiv \boldsymbol{o}$. Zejména tedy

$$c_1\boldsymbol{y}^1(t_0) + c_2\boldsymbol{y}^2(t_0) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}^n(t_0) = c_1\boldsymbol{x}^1 + c_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{z}(t_0) = \boldsymbol{o},$$

což by byl spor s lineární nezávislostí vektorů $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^n$.

Dimense prostoru všech řešení je tedy alespoň n.
Buď $\tilde{\boldsymbol{y}} = \tilde{\boldsymbol{y}}(t)$ libovolné řešení rovnice (4.3). Pak

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t_0) = \kappa_1\boldsymbol{x}^1 + \kappa_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + \kappa_n\boldsymbol{x}^n$$

pro vhodné konstanty $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$, neboť $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^n$ je báze. To znamená, že

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t_0) = \kappa_1\boldsymbol{y}^1(t_0) + \kappa_2\boldsymbol{y}^2(t_0) + \cdots + \kappa_n\boldsymbol{y}^n(t_0).$$

Podle principu superpozice je

$$\boldsymbol{w}(t) = \tilde{\boldsymbol{y}}(t) - \kappa_1\boldsymbol{y}^1(t) - \kappa_2\boldsymbol{y}^2(t) - \cdots - \kappa_n\boldsymbol{y}^n(t)$$

také řešením rovnice (4.3); přitom $\boldsymbol{w}(t_0) = \boldsymbol{o}$. Vzhledem k jednoznačnosti řešení rovnice (4.3) je $\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{o}$ pro všechna $t \in J$ a tedy

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t) = \kappa_1\boldsymbol{y}^1(t) + \kappa_2\boldsymbol{y}^2(t) + \cdots + \kappa_n\boldsymbol{y}^n(t)$$

pro všechna $t \in J$. To znamená, že funkce

$$\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{y}^1(t), \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{y}^2(t), \ldots, \boldsymbol{y}^n = \boldsymbol{y}^n(t)$$

tvoří bázi prostoru všech řešení rovnice (4.3). $\square$

4.1.5 Definice

Libovolná báze prostoru všech řešení rovnice (4.3) se nazývá *fundamentální systém řešení rovnice* (4.3).

Nechť $\boldsymbol{y}^1 = \boldsymbol{y}^1(t), \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{y}^2(t), \ldots, \boldsymbol{y}^n = \boldsymbol{y}^n(t)$ je fundamentální systém řešení rovnice (4.3). Obecné řešení této rovnice je

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = c_1\boldsymbol{y}^1(t) + c_2\boldsymbol{y}^2(t) + \cdots + c_n\boldsymbol{y}^n(t)\,.$$

Označme

$$\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & y_1^2(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & y_2^2(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & y_n^2(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Matice $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t)$ se nazývá *fundamentální matice řešení systému* (4.3). Tato matice je v důsledku lineární nezávislosti sloupců regulární, $\det \mathsf{Y}(t) \neq 0$ pro každé $t \in J$. Obecné řešení rovnice (4.3) lze zapsat

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \mathsf{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c}\,.$$

Partikulární řešení počátečního problému (4.1), (4.2) je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \mathsf{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c}^0$, kde $\boldsymbol{c}^0 = \mathsf{Y}(t_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{x}^0$. Tedy

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \mathsf{Y}(t) \cdot \mathsf{Y}(t_0)^{-1} \cdot \boldsymbol{x}^0\,.$$

Pro fundamentální matici řešení systému (4.3) $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t)$ zřejmě platí $\mathsf{Y}'(t) = \mathsf{A}(t) \cdot \mathsf{Y}(t)$.

4.1.6 Věta

Obecné řešení rovnice (systému) (4.1) je součtem obecného řešení přidružené homogenní rovnice (4.3) a nějakého partikulárního řešení rovnice (4.1):

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}(t)\,,$$

kde $\mathsf{Y}(t)$ je fundamentální matice řešení rovnice (4.3) a $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ je libovolné řešení rovnice (4.1).

D.: $\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ je řešením rovnice (4.1), neboť $\boldsymbol{x}' = \mathsf{Y}' \cdot \boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}' = \mathsf{A} \cdot \mathsf{Y} \cdot \boldsymbol{c} + \mathsf{A} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b} = \mathsf{A} \cdot (\mathsf{Y} \cdot \boldsymbol{c} + \tilde{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{b}$.
Přímým výpočtem ověříme, že $\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c}^0 + \tilde{\boldsymbol{x}}(t)$, kde $\boldsymbol{c}^0 = \mathsf{Y}(t_0)^{-1}\big(\boldsymbol{x}^0 - \tilde{\boldsymbol{x}}(t_0)\big)$ je řešením problému (4.1), (4.2). $\square$

4.1.7 Nalezení partikulárního řešení rovnice (4.1) — metoda variace konstant

Řešení rovnice (4.1) hledáme ve tvaru $\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \mathsf{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c}(t)$, kde $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}(t)$ je nějaká vektorová funkce. Pak

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{x}}' &= \mathsf{Y}' \cdot \boldsymbol{c} + \mathsf{Y} \cdot \boldsymbol{c}' = \mathsf{A} \cdot \mathsf{Y} \cdot \boldsymbol{c} + \mathsf{Y} \cdot \boldsymbol{c}' \\ \tilde{\boldsymbol{x}}' &= \mathsf{A} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b} = \mathsf{A} \cdot \mathsf{Y} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Odtud

$$\begin{aligned} \mathsf{Y}(t) \cdot \boldsymbol{c}'(t) &= \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{c}'(t) &= \mathsf{Y}(t)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{c}(t) &= \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(s)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s\,, \end{aligned}$$

kde $\boldsymbol{\eta}$ je konstantní vektor.

Obecným řešením rovnice (4.1) je tedy

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{Y}(t) \cdot \boldsymbol{\eta} + \int_{t_0}^{t} \mathsf{Y}(t) \cdot \mathsf{Y}(s)^{-1} \cdot \boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s\,.$$

Aby toto řešení splňovalo počáteční podmínku (4.2), musí platit $\boldsymbol{x}^0 = \mathsf{Y}(t_0)\cdot\boldsymbol{\eta}$, tj. $\boldsymbol{\eta} = \mathsf{Y}(t_0)^{-1}\cdot\boldsymbol{x}^0$. Řešení počátečního problému (4.1), (4.2) je tedy

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; \mathsf{Y}(t)\cdot\mathsf{Y}(t_0)^{-1}\cdot\boldsymbol{x}^0 + \int\limits_{t_0}^{t}\mathsf{Y}(t)\cdot\mathsf{Y}(s)^{-1}\cdot\boldsymbol{b}(s)\mathrm{d}s\,.$$

4.1.8 Řešení lineární homogenní rovnice s konstantní maticí

Řešení rovnice

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A}\cdot\boldsymbol{x} \tag{4.4}$$

budeme hledat ve tvaru $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\xi}\mathrm{e}^{\lambda t}$, kde $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^n$ je konstantní vektor. Hodnota λ musí splňovat rovnosti

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{\xi}\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}, \quad \mathsf{A}\cdot\boldsymbol{x} = \mathsf{A}\cdot\boldsymbol{\xi}\mathrm{e}^{\lambda t},$$

takže vzhledem k tomu, že $\mathrm{e}^{\lambda t}\neq 0$, musí platit

$$\mathsf{A}\cdot\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}.$$

To znamená, že λ je vlastní hodnotou matice A a $\boldsymbol{\xi}$ je příslušný vlastní vektor.

- Jsou-li λ_1, λ_2 různé vlastní hodnoty matice A a $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ jsou příslušné vlastní vektory, pak $\boldsymbol{\xi}_1\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$, $\boldsymbol{\xi}_2\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (4.4).

  D.: Tvrzení plyne z předchozího výpočtu a faktu, že vlastní vektory příslušné k různým vlastním hodnotám jsou lineárně nezávislé.□

- Má-li rovnice (4.4) komplexní řešení $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\alpha}(t) + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}(t)$, kde $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou reálné vektorové funkce, a řešení $\boldsymbol{x}$ je lineárně nezávislé na libovolném nenulovém reálném řešení této rovnice, pak $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou lineárně nezávislými reálnými řešeními rovnice (4.4).

  D.: Platí

  $$\boldsymbol{\alpha}'(t) + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}'(t) = \big(\boldsymbol{\alpha}(t) + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}(t)\big)' = \mathsf{A}\cdot\big(\boldsymbol{\alpha}(t) + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta}(t)\big) = \mathsf{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}(t) + \mathrm{i}\mathsf{A}\cdot\boldsymbol{\beta}(t).$$

  Porovnáním reálných a imaginárních částí této rovnosti dostaneme, že funkce $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ jsou řešeními rovnice (4.4).
  Kdyby vektorové funkce $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ byly lineárně závislé, tj. $\boldsymbol{\alpha} = c\boldsymbol{\beta}$, pak by $\boldsymbol{\alpha} + \mathrm{i}\boldsymbol{\beta} = (c+\mathrm{i})\boldsymbol{\beta}$ a řešení $\boldsymbol{\alpha}+\mathrm{i}\boldsymbol{\beta}$ by bylo násobkem reálného nenulového řešení $\boldsymbol{\beta}$. To by byl spor s předpokladem tvrzení. □

- Je-li λ vlastní hodnota matice A, $\boldsymbol{\xi}$ příslušný vlastní vektor, přičemž λ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu $\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E})$, pak funkce

  $$\boldsymbol{\xi}\mathrm{e}^{\lambda t}, \boldsymbol{\eta}_{1,0}\mathrm{e}^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta}_{1,1}t\mathrm{e}^{\lambda t}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{k-1,0}\mathrm{e}^{\lambda t} + \boldsymbol{\eta}_{k-1,1}t\mathrm{e}^{\lambda t} + \cdots + \boldsymbol{\eta}_{k-1,k-1}t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

  jsou pro vhodné vektory $\boldsymbol{\eta}_{1,0}, \boldsymbol{\eta}_{1,1}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{k-1,0}, \boldsymbol{\eta}_{k-1,1}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{k-1,k-1}$ řešením rovnice (4.4).

  D.: Důkaz ukážeme pro $k = 2$. V případě vyšší násobnosti kořene charakteristické rovnice lze postupovat analogicky.
  Nechť λ je dvojnásobný kořen charakteristického polynomu. Buď $\mathsf{B} = \mathsf{B}(s)$ diferencovatelná (a tedy spojitá) maticová funkce definovaná na okolí nuly taková, že $\mathsf{B}(0) = \mathsf{A}$, λ je pro každé s z definičního oboru funkce B jednoduchým kořenem charakteristického polynomu matice $\mathsf{B}(s)$ a existuje jednoduchý kořen $\mu(s)$ charakteristického polynomu, pro nějž platí $\lim\limits_{s\to 0}\mu(s) = \lambda$. (Matici A nepatrně porušíme tak, aby se dvojnásobný kořen rozdělil na dva různé jednoduché.)
  Označme $\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)$ (resp. $\boldsymbol{\zeta}_\lambda(s)$) vlastní vektor matice $\mathsf{B}(s)$ příslušný k vlastní hodnotě $\mu(s)$

(resp. λ). Z diferencovatelnosti funkce B plyne podle věty o diferencovatelnosti implicitně zadané funkce (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, 8.1) diferencovatelnost funkcí $\boldsymbol{\zeta}_\mu$ a $\boldsymbol{\zeta}_\lambda$, zejména tedy existence limit

$$\lim_{s\to 0}\boldsymbol{\zeta}'_\lambda(s)=\boldsymbol{\zeta}_{\lambda,0},\quad \lim_{s\to 0}\boldsymbol{\zeta}'_\mu(s)=\boldsymbol{\zeta}_{\mu,0}.$$

Rovnice $\boldsymbol{x}'=\mathsf{B}(s)\cdot\boldsymbol{x}$ má podle předchozí úvahy řešení $\boldsymbol{\zeta}_\lambda(s)\mathrm{e}^{\lambda t}$ a $\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}$ a podle principu superpozice 4.1.3 také řešení

$$\frac{\boldsymbol{\zeta}_\lambda(s)\mathrm{e}^{\lambda t}-\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}}{\lambda-\mu(s)}.$$

Poněvadž $\lim\limits_{s\to 0}\mathsf{B}(s)=\mathsf{A}$, plyne z věty o spojité závislosti řešení na parametrech 3.3.9, že rovnice (4.4) má řešení

$$\lim_{s\to 0}\frac{\boldsymbol{\zeta}_\lambda(s)\mathrm{e}^{\lambda t}-\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}}{\lambda-\mu(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{\boldsymbol{\zeta}'_\lambda(s)\mathrm{e}^{\lambda t}-\boldsymbol{\zeta}'_\mu(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}-\boldsymbol{\zeta}_\mu(s)t\mu'(s)\mathrm{e}^{\mu(s)t}}{-\mu'(s)}=$$
$$=\left(\frac{\boldsymbol{\zeta}_{\lambda,0}-\boldsymbol{\zeta}_{\mu,0}}{-\mu'(0)}+\boldsymbol{\zeta}_\mu(0)t\right)\mathrm{e}^{\lambda t};$$

při výpočtu limity bylo využito de l'Hospitalovo pravidlo. Označíme-li nyní

$$\boldsymbol{\eta}_{1,0}=\frac{\boldsymbol{\zeta}_{\mu,0}-\boldsymbol{\zeta}_{\lambda,0}}{\mu'(0)},\quad \boldsymbol{\eta}_{1,1}=\boldsymbol{\zeta}_\mu(0),$$

dostaneme tvrzení. □

4.1.9 Převedení systému lineárních diferenciálních rovnic na rovnici vyššího řádu

Uvažujme systém dvou rovnic

$$\begin{aligned} x' &= a(t)x+b(t)y+c(t),\\ y' &= \alpha(t)x+\beta(t)y+\gamma(t); \end{aligned}\tag{4.5}$$

o funkcích $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ předpokládáme, že jsou definovány na nějakém intervalu J a jsou na něm diferencovatelné. V případě, že existuje $t_0\in J$ takové, že $b(t_0)\neq 0$, je funkce b na nějakém podintervalu I intervalu J nenulová. Pro $t\in I$ z první rovnice vyjádříme druhou složku

$$y=\frac{1}{b}\left(x'-ax-c\right)\tag{4.6}$$

a dosadíme ji do druhé rovnice:

$$y'=\alpha x+\frac{\beta}{b}\left(x'-ax-c\right)+\gamma.\tag{4.7}$$

První z rovnic (4.5) zderivujeme

$$x''=a'x+ax'+b'y+by'+c',$$

za y dosadíme (4.6) a za y' dosadíme (4.7). Dostaneme

$$x''=a'x+ax'+\frac{b'}{b}\left(x'-ax-c\right)+b\alpha x+\beta\left(x'-ax-c\right)+b\gamma+c'=$$
$$=\left(a+\beta+\frac{b'}{b}\right)x'-\left(a\beta-b\alpha+\frac{ab'-a'b}{b}\right)x+b\gamma+c'-c\beta-\frac{cb'}{b}.$$

První složka řešení systému (4.5) je tedy na intervalu I řešením rovnice druhého řádu

$$x'' - \left(a + \beta + \frac{b'}{b}\right)x' - \left(a\beta - b\alpha + \frac{ab' - a'b}{b}\right)x = b\gamma + c' - c\beta - \frac{cb'}{b},$$

jeho druhá složka je pak dána rovností (4.6).

V případě konstantních funkcí a, b, α, β a funkcí c, γ identicky rovných nule (homogenního systému s konstantní maticí), dostaneme rovnici

$$x'' - (a + \beta)x' + (a\beta - b\alpha)x = 0. \tag{4.8}$$

Povšimněme si, že charakteristický polynom konstantní matice $\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ je

$$\det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ \alpha & \beta - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + \beta)\lambda + a\beta - b\alpha.$$

jeho koeficienty jsou tedy shodné s koeficienty na levé straně rovnice (4.8).

Analogicky lze postupovat u systémů n rovnic.

4.2 Lineární diferenciální rovnice vyššího řádu

Jedná se o rovnici tvaru

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x \quad = \quad f(t)\,, \tag{4.9}$$

kde funkce $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0, f$ jsou definované na nějakém intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$.

Je-li $f(t) \equiv 0$, rovnice se nazývá *homogenní*, v opačném případě *nehomogenní*.

Rovnice

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{n-1} + a_{n-2}(t)x^{n-2} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x \quad = \quad 0 \tag{4.10}$$

se nazývá *přidružená homogenní rovnice k rovnici* (4.9).

Spolu s rovnicí (4.9) uvažujeme počáteční podmínky

$$x(t_0) = x_0,\ x'(t_0) = x_0^1,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}\,. \tag{4.11}$$

Podle 1.0.12 je rovnice (4.9) ekvivalentní s vektorovou rovnicí (se systémem rovnic)

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= x_3 \\
&\vdots \\
x_{n-1}' &= x_n \\
x_n' &= -a_{n-1}(t)x_n - a_{n-2}(t)x_{n-1} - \cdots - a_1(t)x_2 - a_0(t)x_1 + f(t)
\end{aligned}$$

Odtud a z 4.1.1, 4.1.3 a 4.1.4 plynou následující tři tvrzení:

4.2.1 Věta (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Jsou-li všechny funkce $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, f$ spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$ a $t_0 \in J$, pak má počáteční problém (4.9), (4.11) právě jedno řešení, které existuje na celém intervalu J.

4.2.2 Věta (princip superpozice)

Jsou-li $x = x(t)$, $y = y(t)$ řešením homogenní lineární rovnice (4.10) a c_1, c_2 jsou libovolné konstanty, pak také $z = z(t) = c_1x(t) + c_2y(t)$ je řešením této rovnice.

4.2.3 Věta

Jsou-li všechny funkce $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ spojité na intervalu $J \subseteq \mathbb{R}$, pak množina všech řešení rovnice (4.10) tvoří n-rozměrný vektorový prostor.

4.2.4 Definice

Báze $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ vektorového prostoru všech řešení rovnice (4.10) se nazývá *fundamentální systém řešení rovnice* (4.10).

Řešení $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_k = x_k(t)$ rovnice (4.9) jsou lineárně nezávislá na intervalu J, jsou-li vektory

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_2^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} x_k(t) \\ x_k'(t) \\ \vdots \\ x_k^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

lineárně nezávislé pro každé $t \in J$.

Tvoří-li funkce $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ fundamentální systém řešení rovnice (4.10), pak obecné řešení této rovnice je $x = x(t) = c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\cdots+c_nx_n(t)$, kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou konstanty.

4.2.5 Definice

Buďte $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ funkce. Funkce

$$W = W(t) = W(t; \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \dots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \dots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \varphi_2^{(m-1)}(t) & \dots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

se nazývá *wronskián* funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$.

4.2.6 Věta

Funkce $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (4.10) právě tehdy, když každé z nich je řešením této rovnice a jejich wronskián je v nějakém bodě intervalu J nenulový.

D.: plyne z poznámek za 4.1.5. □

Z jednoznačnosti řešení rovnice (4.10) také plyne, že je-li wronskián řešení rovnice 4.10 nenulový v jednom bodě intervalu J, pak je nenulový ve všech bodech intervalu J.

4.2.7 Věta

Buď $x_1, x_2, \dots, x_n$ fundamentální systém řešení rovnice (4.10). Obecné řešení rovnice (4.9) je

$$x = x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) + \tilde{x}(t),$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou konstanty a $\tilde{x}_n$ je libovolné partikulární řešení rovnice (4.9).

D.: plyne z 4.1.6. □

4.2.8 Metoda variace konstant

Řešení rovnice (4.9) hledáme ve tvaru

$$\tilde{x} = \tilde{x}(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) + \cdots + c_n(t)x_n(t)\,,$$

kde $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ jsou funkce a $x_1(t), x_2(t) \ldots, x_n(t)$ je fundamentální systém řešení rovnice (4.10).

O funkcích $c_1, c_2, \ldots, c_n$ budeme předpokládat, že splňují systém rovnic

$$\begin{aligned} c_1'x_1 + c_2'x_2 + \cdots + c_n'x_n &= 0 \\ c_1'x_1' + c_2'x_2' + \cdots + c_n'x_n' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1'x_1^{(n-2)} + c_2'x_2^{(n-2)} + \cdots + c_n'x_n^{(n-2)} &= 0 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Pak

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= c_1'x_1 + c_1x_1' + \cdots + c_n'x_n + c_nx_n' = c_1x_1' + \cdots + c_nx_n' \\ \tilde{x}'' &= c_1'x_1' + c_1x_1'' + \cdots + c_n'x_n' + c_nx_n'' = c_1x_1'' + \cdots + c_nx_n'' \\ &\vdots \\ \tilde{x}^{(n-1)} &= c_1x_1^{(n-1)} + \cdots + c_nx_n^{(n-1)} \\ \tilde{x}^{(n)} &= c_1'x_1^{(n-1)} + c_1x_1^{(n)} \cdots + c_n'x_n^{(n-1)} + c_nx^{(n)} \end{aligned}$$

Současně ale platí

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{(n)} &= -a_{n-1}(t)\tilde{x}^{(n-1)} - a_{n-2}(t)\tilde{x}^{(n-2)} - \cdots - a_1(t)\tilde{x}' - a_0(t)\tilde{x} + f(t) = \\ &= -a_{n-1}(c_1x_1^{(n-1)} + \cdots \\ &\quad \cdots + c_nx_n^{(n-1)}) - \cdots - a_1(c_1x_1' + \cdots + c_nx_n') - a_0(c_1x_1^{+} \cdots + c_nx_n) + f = \\ &= c_1(-a_{n-1}x_1^{(n-1)} - \cdots \\ &\quad \cdots - a_1x_1' - a_0x_1) + \cdots + c_n(-a_{n-1}x_n^{(n-1)} - \cdots - a_1x_n' - a_0x_n) + f = \\ &= c_1x_1^{(n)} + \cdots + c_nx_n^{(n)} + f\,. \end{aligned}$$

(Poslední rovnost plyne z toho, že $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou řešeními přidružené homogenní rovnice.)

Celkem tedy dostaneme

$$c_1'x_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'x_n^{(n-1)} = f \tag{4.13}$$

Systém rovnic (4.12) a (4.13) je soustava n lineárních rovnic pro n neznámých $c_1', c_2', \ldots, c_n'$. Determinant této soustavy je wronskián fundamentálního systému řešení rovnice (4.10), je tedy podle 4.2.6 různý od 0 a systém rovnic (4.12), (4.13) má jediné řešení $c_1'(t) = \varphi_1(t), c_2'(t) = \varphi_2(t), \ldots, c_n'(t) = \varphi_n(t)$. Integrací těchto rovnic určíme $c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$.

4.2.9 Homogenní lineární rovnice s konstatntními koeficienty

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1x' + a_0x = 0\,. \tag{4.14}$$

Řešení předpokládáme ve tvaru $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}$. Pak

$$x'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t},\ x''(t) = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda t},\ \ldots,\ x^{(n)}(t) = \lambda^n\mathrm{e}^{\lambda t}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \lambda^n\mathrm{e}^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1}\mathrm{e}^{\lambda t} + a_{n-2}\lambda^{n-2}\mathrm{e}^{\lambda t} + \cdots + a_1\lambda\mathrm{e}^{\lambda t} + a_0\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 &= 0\,. \end{aligned}$$

Poslední rovnice se nazývá *charakteristická rovnice* lineární diferenciální rovnice (4.14)

(i) Jsou-li $\lambda_1,\ \lambda_2$ dva různé kořeny charakteristické rovnice, pak $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t},\ x_2(t) = \mathrm{e}^{\lambda_2 t}$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (4.14).

D.: Že to jsou řešení, je vidět z předchozí úvahy, lineárně nezávislé jsou proto, že vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_2^2 \\ \vdots \\ \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}$ jsou pro $\lambda_1 \neq \lambda_2$ lineárně nezávislé. $\square$

(ii) Je-li λ_0 k-násobný kořen charakteristické rovnice, pak funkce

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t},\ x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_0 t},\ x_3(t) = t^2\mathrm{e}^{\lambda_0 t},\ \ldots,\ x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (4.14).

D.: Z ekvivalence rovnice (4.14) s vektorovou lineární rovnicí s konstantní maticí a z úvah provedených v 4.1.8 plyne, že uvedené funkce jsou vskutku řešeními rovnice (4.14).
Dále je

$$\begin{aligned}
&W(0; \mathrm{e}^{\lambda_0 t}, t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}, t^2\mathrm{e}^{\lambda_0 t}, \ldots, t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}) = \\
&= \det \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
\lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
\lambda_0^2 & 2\lambda_0 & 2 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\lambda_0^{k-1} & (k-1)\lambda_0^{k-2} & 2\binom{k-1}{2} & \ldots & \ell!\binom{k-1}{\ell}\lambda_0^{k-\ell-1} & \ldots & (k-1)!
\end{pmatrix} = \\
&= 2 \cdot 6 \cdot 24 \cdots (k-1)! \neq 0\,,
\end{aligned}$$

takže funkce $x_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t},\ x_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_0 t},\ x_3(t) = t^2\mathrm{e}^{\lambda_0 t},\ \ldots,\ x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$ jsou lineárně nezávislé. $\square$

(iii) Jsou-li $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta,\ \lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ k-násobné komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice, pak

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,\ x_2(t) = t\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,\ x_3(t) = t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t, \ldots,\ x_k(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t,$$

$$x_{k+1}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,\ x_{k+2}(t) = t\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t,\ x_{k+3}(t) = t^2\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t, \ldots,\ x_{2k}(t) = t^{k-1}\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t$$

jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (4.14).

D.: $t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t},\ t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t},\ 0 \leq \ell < k$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (4.14) podle (ii). Tedy také

$$\begin{aligned}
x_{\ell+1}(t) &= \frac{1}{2}\left(t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} + t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}\right) = t^\ell\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t \\
x_{k+\ell+1}(t) &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)t} - t^\ell\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)t}\right) = t^\ell\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t
\end{aligned}$$

jsou řešení rovnice (4.14) a tato řešní jsou lineárně nezávislá, neboť funkce cos a sin jsou nezávislé. $\square$

4.2.10 Partikulární řešení nehomogenní lineární rovnice s konstantními koeficienty a se speciální pravou stranou

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1x' + a_0x = f(t)\,. \tag{4.15}$$

- $f(t) = P_m(t)$, kde P_m je polynom stupně m.
  Je-li nula k-násobným kořenem charakteristické rovnice (samozřejmě připouštíme i $k = 0$), lze partikulární řešení hledat ve tvaru $\tilde{x}(t) = t^k Q_m(t)$, kde Q_m je polynom stejného stupně jako P_m.

- $f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} P_m(t)$.
  Substituce $x(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} y(t)$ převede rovnici na lineární rovnici n-tého řádu s pravou stranou P_m (předchozí případ).

- $f(t) = \cos(\alpha t) P_m(t)$ nebo $f(t) = \sin(\alpha t) P_m(t)$.
  Najdeme partikulární řešení rovnice

  $$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + a_{n-2}x^{(n-2)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha t} P_m(t).$$

  Jeho reálná část je partikulárním řešením uvažované rovnice v prvním případě, imaginární část ve druhém.

- $f(t) = g(t) + h(t)$.
  Partikulární řešení je součtem partikulárních řešení rovnic

  $$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = g(t) \quad \text{a} \quad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = h(t).$$

4.2.11 Nalezení fundamentálního systému řešení rovnice $$x'' + P(t)x' + Q(t)x = 0$$ v případě, že jedno řešení je známé

Předpokládejme, že známe jedno nekonstantní řešení $x_1 = x_1(t)$ dané rovnice. Zavedeme substituci

$$x(t) = x_1(t)y(t).$$

Pak $x' = x_1'y + x_1y'$, $x'' = x_1''y + 2x_1'y' + x_1y''$, tedy

$$\begin{aligned} x_1''y + 2x_1'y' + x_1y'' + Px_1'y + Px_1y' + Qx_1y &= 0 \\ x_1y'' + (2x_1' + Px_1)y' + (x_1'' + Px_1' + Qx_1)\, y &= 0 \\ y'' + \left(P + 2\frac{x_1'}{x_1}\right) y' &= 0\,, \end{aligned}$$

což je rovnice typu 2.10 pro neznámou funkci $y = y(t)$.

Položíme $z(t) = y'(t)$. Pak

$$\begin{aligned} z' &= -\left(P(t) + 2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)}\right) z \\ \ln z = \int \frac{\mathrm{d}z}{z} &= -\int \left(P(t) + 2\frac{x_1'(t)}{x_1(t)}\right) \mathrm{d}t = -\int P(t)\mathrm{d}t - \ln(x_1(t))^2 \\ z(t) &= \frac{1}{(x_1(t))^2}\mathrm{e}^{-\int P(t)\mathrm{d}t}\,. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$y(t) = \int \frac{1}{(x_1(t))^2}\mathrm{e}^{-\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$

a tedy druhé řešení dané rovnice je

$$x_2(t) = x_1(t)\int \frac{1}{(x_1(t))^2}\mathrm{e}^{-\int P(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\,.$$

Poněvadž platí

$$W(t,x_1,x_2) \;=\; \begin{vmatrix} x_1 & x_1\int \frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int P} \\ x_1' & x_1'\int \frac{1}{x_1^2}\mathrm{e}^{-\int P} + \frac{1}{x_1}\mathrm{e}^{-\int P} \end{vmatrix} \;=\; \mathrm{e}^{-\int P(t)\mathrm{d}t} \;>\; 0\,,$$

tak $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$ tvoří fundamentální systém řešení dané rovnice.

4.3 Eulerova a Riccatiho diferenciální rovnice

4.3.1 Eulerova rovnice

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 t x' + a_0 x = f(t)$$

Zavedeme substituci $t = \mathrm{e}^\tau$, tj. $\tau = \ln t$. Pak

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\\
x'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{1}{t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)\\
x''' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)\right) = -\frac{2}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) + \frac{1}{t^2}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2}\right)\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} =\\
&= \frac{1}{t^3}\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}\tau^3} - 3\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dosadíme-li do dané rovnice, vypadnou faktory $t,\ t^2,\ \ldots,\ t^n$, takže dostaneme rovnici s konstantními koeficienty.

4.3.2 Riccatiho rovnice

$$x' = P(t)x^2 + Q(t)x + R(t)$$

Zavedeme substituci $x(t) = -\dfrac{y'(t)}{P(t)y(t)}$. Pak $x' = -\dfrac{Pyy'' - (P'y + Py')y'}{P^2y^2} = -\dfrac{y''}{Py} + \dfrac{P'y'}{P^2y} + \dfrac{{y'}^2}{Py^2}$ a tedy

$$\begin{aligned}
-\frac{y''}{Py} + \frac{P'y'}{P^2y} + \frac{{y'}^2}{Py^2} &= \frac{P{y'}^2}{P^2y^2} - \frac{Qy'}{Py} + R\\
-\frac{y''}{Py} + \frac{1}{Py}\left(\frac{P'}{P} + Q\right)y' - R &= 0\\
y'' - \left(\frac{P'}{P} + Q\right)y' + PRy &= 0\,,
\end{aligned}$$

což je lineární homogenní rovnice druhého řádu.

4.4 Cvičení

Řešte rovnice

1) $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$ **2)** $x'' + tx' = 0$ **3)** $tx''' - 2x'' = 0$

Ukažte, že $x = u(t)$ je řešením dané rovnice a rovnici vyřešte.

4) $u = t^2;\ t^2x'' - 2x = 0$ **5)** $u = \sqrt{t};\ x'' + \dfrac{x}{4t^2} = 0\ (t > 0)$

Řešte rovnice (Cauchyovy úlohy)

6) $x'' + 2x = 0$ **7)** $x'' + 6x' + 5x = 0$

8) $x'' + 6x' + 9x = 0$ **9)** $x'' - 2x' + 4x = 0$

10) $x'' - x = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = -2$ **11)** $x'' + 4x = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$

12) $x'' + x' = t$ **13)** $x'' + x = \sin t$

14) $x'' - x = \mathrm{e}^t$ **15)** $x'' - 3x' - 10x = -3$

16) $x'' - x' = \sin t$ **17)** $x'' - 3x' = \mathrm{e}^{3t} - 12t$

18) $x'' + x = \operatorname{cotg} t$ **19)** $x'' - 8x' = \mathrm{e}^{8t}$

20) $x'' + 2x' = t^2 - \mathrm{e}^t$ **21)** $t^2x'' - tx' + x = t$

22) $t^2x'' - tx' + 2x = (\ln t)^2$ **23)** $t^3x' - t^4x^2 - t^2x = 2$

Řešte systémy rovnic

24) $\begin{aligned} x' &= -2x + y \\ y' &= 3x - 4y \end{aligned}$ **25)** $\begin{aligned} x' &= -x - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}\mathrm{e}^t \\ y' &= \tfrac{4}{3}x + y - t \end{aligned}$

26) $\begin{aligned} x' + 3x + 2y &= 5\sin t \\ y' - 2x + 7y &= 8\cos t \end{aligned}$ **27)** $\begin{aligned} 4x' + 9y' + 2x + 31y &= \mathrm{e}^t \\ 3x' + 7y' + x + 24y &= 3 \end{aligned}$

Výsledky:

1) $x = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2$ **2)** $x = C_1\int \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t + C_2$ **3)** $x = C_1t^4 + C_2t + C_3$ **4)** $x = \dfrac{C_1}{t} + C_2t^2$

5) $x = \sqrt{t}\,(C_1 \ln|t| + C_2)$ **6)** $x = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-2t}$ **7)** $x = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{-5t}$ **8)** $x = (C_1 + C_2t)\mathrm{e}^{-3t}$

9) $x = \mathrm{e}^t(C_1\cos\sqrt{3}\,t + C_2\sin\sqrt{3}\,t)$ **10)** $x = \dfrac{3\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^t}{2}$ **11** $x = \sin 2t$ **12)** $x = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t^2}{2} - t$

13) $x = C_1\cos t + C_2\sin t - \dfrac{t\cos t}{2}$ **14)** $x = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{t\mathrm{e}^t}{2}$ **15)** $x = C_1\mathrm{e}^{5t} + C_2\mathrm{e}^{-2t} + \frac{3}{10}$

16) $x = C_1 + C_2\mathrm{e}^t + \dfrac{\cos t - \sin t}{2}$ **17)** $x = C_1 + C_2\mathrm{e}^{3t} + 2t^2 + \dfrac{t\mathrm{e}^{3t} + 4t}{3}$

18) $x = C_1\cos t + C_2\sin t - \sin t \ln\left|\dfrac{1 + \cos t}{\sin t}\right|$ **19)** $x = C_1 + \left(C_2 + \dfrac{t}{8}\right)\mathrm{e}^{8t}$

20) $x = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-2t} + \dfrac{t^3}{6} - \dfrac{t^2}{4} + \dfrac{t}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^t}{3}$ **21)** $x = t\left(A\ln t + B + \frac{1}{2}(\ln t)^2\right)$

22) $At\sin(B + \ln t) + (1 + \ln t)^2$ **23)** $x = \dfrac{2Ct - 1}{t^2(1 - Ct)}$ **24)** $x = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{-5t}, y = A\mathrm{e}^{-t} - 3B\mathrm{e}^{-5t}$

25) $x = A\mathrm{e}^{t/3} + B\mathrm{e}^{-t/3} - 6t, y = -2A\mathrm{e}^{t/3} - B\mathrm{e}^{-t/3} + 9t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + 9$

26) $x = A\mathrm{e}^{-5t} + Bt\mathrm{e}^{-5t} + \frac{365}{338}\sin t - \frac{307}{338}\cos t, y = \frac{2A-B}{2}\mathrm{e}^{-5t} + Bt\mathrm{e}^{-5t} + \frac{144}{338}\sin t + \frac{278}{338}\cos t$

27) $x = \mathrm{e}^{-4t}(A\cos t + B\sin t) + \frac{31}{26}\mathrm{e}^t - \frac{93}{17}, y = \mathrm{e}^{-4t}((B - A)\cos t - (B + A)\sin t) - \frac{2}{13}\mathrm{e}^t + \frac{6}{17}$

Kapitola 5

Autonomní systémy

Budeme uvažovat systém rovnic

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{5.1}$$

kde $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Systém (5.1) se nazývá *autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic*, definiční obor pravých stran Ω se nazývá *fázový prostor*. V celé kapitole budeme předpokládat, že $\boldsymbol{f}$ je spojitá funkce taková, že počáteční problém: (5.1) s podmínkou

$$\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0 \tag{5.2}$$

má jediné řešení pro každé $t_0 \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}^0 \in \Omega$.

5.1 Fázový prostor, trajektorie, stacionární body

5.1.1 Věta

Je-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ řešením úlohy (5.1), (5.2), pak pro každé $\tau \in \mathbb{R}$ je $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t+\tau)$ řešením rovnice (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(t_0 - \tau) = \boldsymbol{x}^0$. Je-li $\boldsymbol{x}$ definováno na intervalu (t_1, t_2), je $\boldsymbol{y}$ definováno na intervalu $(t_1 - \tau, t_2 - \tau)$.

D.: $\boldsymbol{y}'(t) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t+\tau) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t+\tau)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t)).$ □

Tato věta ukazuje, že autonomní systémy popisují děje invariantní vzhledem k posunutí v čase.

Bez újmy na obecnosti se tedy u autonomních systémů můžeme omezit na počátečními problémy s počáteční podmínkou

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0 \in \Omega. \tag{5.3}$$

Řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ problému (5.1), (5.3) lze interpretovat buďto jako graf zobrazení $\boldsymbol{x} : \mathbb{R} \to \Omega$, nebo jako křivku $C = \{\boldsymbol{x}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ ve fázovém prostoru Ω zadanou parametricky. Tuto křivku nazveme *trajektorií řešení* $\boldsymbol{x}$.

Křivku $C^+ = \{\boldsymbol{x}(t) : t \geq 0\}$, resp. $C^- = \{\boldsymbol{x}(t) : t \leq 0\}$, nazveme *pozitivní*, resp. *negativní, polotrajektorií* systému 5.1.

Příklad: Systém

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x \end{aligned}$$

má řešení

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos(t-\varphi) \\ y(t) &= -r\sin(t-\varphi) \end{aligned}, \quad \text{kde } r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_0}{x_0} \text{ nebo } \operatorname{cotg}\varphi = \frac{x_0}{y_0}.$$

Poněvadž $x(t)^2 + y(t)^2 = r^2$, jsou trajektorie řešení kružnice se středem v počátku.

5.1.2 Věta

Jsou-li $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t)$ řešení systému (5.1), pak jejich trajektorie buďto splývají, nebo nemají žádný společný bod.

D.: Nechť $\boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{y}(t_2)$ pro nějaká $t_1, t_2 \geq 0$. Podle 5.1.1 je $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{x}(t + (t_1 - t_2))$ řešením rovnice (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{z}(t_2) = \boldsymbol{x}(t_1)$. Trajektorie řešení $\boldsymbol{z}$ a $\boldsymbol{x}$ zřejmě splývají. Současně ale $\boldsymbol{z}$ je řešením rovnice (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{z}(t_2) = \boldsymbol{y}(t_2)$ a z předpokládané jednoznačné řešitelnosti problému (5.1) s libovolnou počáteční podmínkou plyne $\boldsymbol{z} \equiv \boldsymbol{y}$. □

5.1.3 Definice

Bod $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ se nazývá *stacionární bod* (*rovnovážný bod, ekvilibrium, kritický bod, singulární bod, degenerovaná trajektorie*) *rovnice* (5.1), jestliže $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = 0$.
Trajektorie rovnice (5.1) se nazývá *cyklus*, je-li uzavřenou křivkou.
Trajektorie $\{\boldsymbol{x}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ rovnice (5.1) se nazývá *homoklinická*, jestliže existuje stacionární bod $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ takový, že $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \lim\limits_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$.
Trajektorie $\{\boldsymbol{x}(t) : t \in \mathbb{R}\}$ rovnice (5.1) se nazývá *heteroklinická*, jestliže existují stacionární body $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$, $\boldsymbol{x}^\diamondsuit \in \Omega$ takové, že $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*$ a $\lim\limits_{t\to-\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^\diamondsuit$.

5.1.4 Věta

Trajektorie řešení autonomního systému (5.1) jsou jednoho z typů:
– Stacionární body (odpovídají konstantním řešením);
– Cykly (odpovídají nekonstantním periodickým řešením);
– Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

D.: Plyne z 5.1.2. □

5.1.5 Definice

Neprázdná podmnožina A fázového prostoru Ω systému (5.1) se nazývá

- *pozitivně invariantní* (*invariantní vpřed, forward invariant*), jestliže pro každé řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in A$ platí, že $\boldsymbol{x}(t) \in A$ pro všechna $t \geq 0$;

- *negativně invariantní* (*invariantní vzad, backward invariant*), jestliže pro každé řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in A$ platí, že $\boldsymbol{x}(t) \in A$ pro všechna $t \leq 0$;

- *invariantní*, je-li současně pozitivně i negativně invariantní.

5.1.6 Poznámky

1. Jsou-li množiny $A, B \in \Omega$ pozitivně (resp. negativně) invariantní, pak také množiny $A \cap B$ a $A \cup B$ jsou pozitivně (resp. negativně) invariantní.

2. Libovolná trajektorie C systému (5.1) je invariantní množinou tohoto systému.

5.1.7 Definice

Nechť $A, B \subseteq \Omega$, $B \neq \emptyset$ a ϱ je nějaká metrika na Ω ekvivalentní s euklidovskou. Řekneme, že

- *množina A atrahuje (přitahuje) množinu B* (*množina A je atraktorem množiny B*), jestliže pro každé řešení systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in B$ platí, že $\lim\limits_{t\to\infty} \varrho\big(\boldsymbol{x}(t), A\big) = 0$;

- *množina A je (globální) atraktor*, jestliže A přitahuje Ω;

– *množina A absorbuje množinu B*, jestliže A je pozitivně invariantní a ke každému řešení $\boldsymbol{x}$ systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in B$ existuje $T \geq 0$ takové, že $\boldsymbol{x}(T) \in A$;

– *množina A je globálně absorbující*, jestliže absorbuje množinu Ω.

5.1.8 Poznámky

1. Nechť $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ je řešením systému (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0 \in \Omega$. Pokud množina A je ω-limitní množinou řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$, pak je pozitivně invariantním atraktorem množiny $\{\boldsymbol{x}_0\}$.

2. Trajektorii C systému (5.1) nazveme *limitní trajektorií*, jestliže existuje množina $B \subseteq \Omega$ taková, že $B \cap (\Omega \setminus C) \neq \emptyset$ a C atrahuje množinu B. Je-li C navíc cyklem, nazveme ho *limitním cyklem*.

3. Buď $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jestliže existují kladné konstanty K, δ takové, že pro každý bod $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ splňující podmínku $|x_i| \geq K$ platí

$$\operatorname{sgn} x_i f_i(\boldsymbol{x}) \leq \delta |x_i|,$$

pak množina $A_i = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega : |x_i| \leq K\}$ je globálně absorbující množinou systému (5.1).

D.: Nejprve ukážeme, že každá trajektorie protíná množinu A_i. Připusťme, že existuje řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,) = \big(x_1(\,\cdot\,), x_2(\,\cdot\,), \ldots, x_n(\,\cdot\,)\big)$ systému (5.1) takové, že pro všechna $t \geq 0$ je $|x_i(t)| > K$. Položme $u(t) = |x_i(t)|$. Pak pro všechna $t \geq 0$ je

$$u'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x_i(t)| = \operatorname{sgn} x_i(t) f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) \leq \delta |x_i(t)| = -\delta u(t),$$

neboli

$$\frac{u'(t)}{u(t)} \leq -\delta.$$

Integrací této nerovnosti v mezích od 0 po t dostaneme $\ln u(t) - \ln u(0) \leq -\delta t$, tj.

$$|x_i(t)| = u(t) = u(0)\mathrm{e}^{-\delta t} = |x_i(0)|\mathrm{e}^{-\delta t}$$

pro libovolné $t \geq 0$. Odtud plyne, že $\lim\limits_{t \to \infty} |x_i(t)| = 0$, což je ve sporu s předpokladem $|x_i(t)| > K > 0$.

Množina A_i má neprázdný průnik s libovolnou trajektorií, je tedy neprázdná. Ukážeme, že je navíc pozitivně invariantní. Připusťme, že existuje řešení

$$\boldsymbol{x}(\,\cdot\,) = \big(x_1(\,\cdot\,), x_2(\,\cdot\,), \ldots, x_n(\,\cdot\,)\big)$$

systému (5.1) s počáteční hodnotou $\boldsymbol{x}(0) \in A_i$ takové, že pro jisté $t_1 > 0$ je $\boldsymbol{x}(t_1) \notin A_i$, tj. $|x_i(t_1)| > K$. Položme

$$M = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t < t_1, |x_i(t)| \leq K\}.$$

Pak $0 \in M$, takže M je neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Existuje tedy $T = \sup M$. Ze spojitosti funkce $x_i(\,\cdot\,)$ a z vlastností suprema plyne, že $T < t_1$, $x_i(T) = K$ a funkce $x_i(\,\cdot\,)$ je v bodě T rostoucí. Avšak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x_i(t)|\bigg|_{t=T} = \operatorname{sgn} x_i(T) f_i\big(\boldsymbol{x}(T)\big) \leq -\delta |x_i(t)| = -\delta K < 0,$$

což je spor s faktem, že funkce $x_i(\,\cdot\,)$ je v T rostoucí.$\square$

5.1.9 Definice

Systém (5.1) se nazývá *dissipativní*, jestliže existuje ohraničená globálně atrahující množina.

5.1.10 Poznámky

1. Je-li systém (5.1) dissipativní, pak každé jeho řešení je ohraničené.

2. Jestliže existují kladné konstanty K, δ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a všechna $\boldsymbol{x} \in \Omega$ taková, že $|\boldsymbol{x}| \geq K$ platí
$$\operatorname{sgn} x_i f_i(\boldsymbol{x}) \leq -\delta,$$
pak je systém (5.1) dissipativní a globálně absorbující je množina $A = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : |\boldsymbol{x}| \leq K\}$.

   D.: Nejprve ukážeme, že každá trajektorie protíná množinu A. Připusťme, že existuje řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ systému (5.1) takové, že $\boldsymbol{x}(t) \notin A$ pro všechna $t \geq 0$. Pak $|\boldsymbol{x}(t)| > K$ pro všechna $t > 0$, a tedy pro libovolné $t > 0$ platí
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{x}(t)| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|x_i(t)| = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} x_i(t) x_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} x_i(t) f_i\big(\boldsymbol{x}(t)\big) \leq \sum_{i=1}^{n} (-\delta) = -n\delta.$$
Integrací této nerovnosti dostaneme $|\boldsymbol{x}(t)| \leq |\boldsymbol{x}(0)| - n\delta t$, takže pro $t \geq \dfrac{|\boldsymbol{x}(0)| - K}{n\delta}$ je $|\boldsymbol{x}(t)| \leq K$, což je spor. Každá trajektorie má tedy s množinou A neprázdný průnik, což také znamená, že množina A je neprázdná.
Ukážeme, že množina A je navíc pozitivně invariantní. Nechť $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)$ je řešením systému (5.1) s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(0) \in A$. Připusťme, že existuje $t_1 > 0$, pro něž $\boldsymbol{x}(t_1) \notin A$. Pak $|\boldsymbol{x}(t_1)| > K$. Položme
$$M = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t < t_1, |\boldsymbol{x}(t)| \leq K\}.$$
Pak $0 \in M$, takže M je neprázdná shora ohraničená množina reálných čísel. Existuje tedy $T = \sup M$. Ze spojitosti funkce $|\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)|$ a z vlastností suprema plyne, že $|\boldsymbol{x}(T)| = K$ a funkce $|\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)|$ je v bodě T rostoucí. Avšak
$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{x}(t)|\right|_{t=T} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} x_i(T) x_i'(T) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{sgn} x_i(T) f_i\big(\boldsymbol{x}(T)\big) \leq -n\delta < 0,$$
což je spor s tím, že funkce $|\boldsymbol{x}(\,\cdot\,)|$ je v bodě T rostoucí. Pro všechna $t > 0$ je tedy $\boldsymbol{x} \in A$ a množina A je invariantní. □

3. Nechť ke každému $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ existují kladné konstanty K_i, δ_i takové, že pro všechna $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$ z nerovnosti $|x_i| \geq K$ plyne nerovnost
$$\operatorname{sgn} x_i f_i(\boldsymbol{x}) \leq -\delta_i |x_i|.$$
Pak je systém (5.1) dissipativní s globálně absorbující množinou
$$A = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega : |x_1| \leq K_1, |x_2| \leq K_2, \ldots, |x_n| \leq K_n\}.$$

   D.: Položme $A_i = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : |x_i| \leq K_i\}$. Pak každá z množin A_i je podle třetího z tvrzení 5.1.8 globálně absorbující množinou a $A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$. Podle 5.1.6 je množina A pozitivně invariantní. Ukážeme, že je také globálně absorbující.
Buď $\boldsymbol{x}(t)$ libovolné řešení systému (5.1). Podle třetího z tvrzení 5.1.8 existuje $t_1 \geq 0$ takové, že $|x_1(t_1)| \leq K_1$ pro všechna $t \geq t_1$. Dále existuje $t_2 \geq t_1$ takové, že pro všechna $t \geq t_2$ je $|x_2(t_2)| \leq K_2$ atd. Nakonec existuje $t_n \geq t_{n-1}$ takové, že $|x_n(t)| \leq K_n$ pro všechna $t \geq t_n$. Takže pro všechna $t \geq t_n$ je $|x_1(t)| \leq K_1, |x_2(t)| \leq K_2, \ldots, |x_n(t)| \leq K_n$, tj. $\boldsymbol{x}(t) \in A$. □

5.1.11 Věta (Poincaré [1854–1912]-Bendixson [1861-1935])

Jestliže rovnice (5.1) má trajektorii $C^+ = \{\boldsymbol{x}(t) : t \geq 0\}$, která je ohraničená a její uzávěr neobsahuje stacionární body rovnice (5.1), pak existuje cyklus rovnice (5.1), který leží v $\overline{C^+}$.

D.: P. Hartman: *Ordinary Differential Equations.* John Willey&Sons, New York-London-Sydney, 1964, kap. VII. □

5.2 Autonomní systémy v rovině

V tomto oddílu se budeme zabývat systémem (5.1) pro $n = 2$, tedy systémem

$$\begin{aligned} x' &= f(x,y) \\ y' &= g(x,y). \end{aligned} \tag{5.4}$$

5.2.1 Definice

Křivka zadaná implicitně rovnicí $f(x,y) = 0$ (resp. $g(x,y) = 0$) se nazývá *x-nulklina* (resp. *y-nulklina*) *rovnice* (5.4).

Průsečík nulklin je stacionární bod, tečna k trajektorii v jejím průsečíku s x-nulklinou (resp. y-nulklinou) je rovnoběžná s osou y (resp. x).

5.2.2 Definice (typy stacionárních bodů v rovině)

Stacionární bod (x^*, y^*) systému (5.4) se nazývá

bod rotace, jestliže v jeho libovolném okolí leží cyklus, obsahující (x^*, y^*) ve svém vnitřku;

střed, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že každá trajektorie s $\big(x(0), y(0)\big) \in U$ je cyklem obsahujícím (x^*, y^*) ve svém vnitřku (střed je speciálním případem bodu rotace);

ohnisko, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $\big(x(0), y(0)\big) \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)$$

a pro orientovaný úhel $\psi(t)$, který svírá vektor $\big(x(t), y(t)\big) - (x^*, y^*)$ s nějakým pevným vektorem platí

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty \text{ nebo } \lim_{t\to\infty} \psi(t) = -\infty \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = \infty \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \psi(t) = -\infty$$

(trajektorie se přibližuje ke stacionárnímu bodu (nebo se od něho vzdaluje) po spirále);

uzel, jestliže existuje jeho ryzí okolí U takové, že pro každou trajektorii s $\big(x(0), y(0)\big) \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)$$

a pro orientovaný úhel $\psi(t)$, který svírá vektor $\big(x(t), y(t)\big) - (x^*, y^*)$ s nějakým pevným vektorem existuje vlastní $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t)$ nebo $\lim\limits_{t\to-\infty} \psi(t)$;

sedlo, jestliže existuje jen konečný počet trajektorií $(x,y) = \big(x(t), y(t)\big)$ takových, že

$$\lim_{t\to\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*) \text{ nebo } \lim_{t\to-\infty} \big(x(t), y(t)\big) = (x^*, y^*)\,.$$

5.2.3 Stacionární body lineárního homogenního autonomního systému

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Označme

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Pokud $\det \mathsf{A} = ad - bc \neq 0$, má systém (5.5) jediný stacionární bod $(0,0)$. Vlastní čísla matice A jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb = \lambda^2 - (\operatorname{tr} \mathsf{A})\lambda + \det \mathsf{A} = 0, \tag{5.6}$$

tedy při označení $D = (\operatorname{tr} \mathsf{A})^2 - 4 \det \mathsf{A}$ je $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} \mathsf{A} \pm \sqrt{D}\right)$.

(i) $\det \mathsf{A} < 0$

V tomto případě je $D > (\operatorname{tr} \mathsf{A})^2 > 0$, což znamená, že rovnice (5.6) má dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2. Poněvadž $\sqrt{D} > |\operatorname{tr} \mathsf{A}|$, mají tyto kořeny opačná znaménka. Nechť pro určitost $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Označme $\boldsymbol{v}_1$, resp. $\boldsymbol{v}_2$, vlastní vektor matice A příslušný k vlastní hodnotě λ_1, resp. λ_2. Obecné řešení systému (5.5) je podle 4.1.8

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \boldsymbol{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta \boldsymbol{v}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t},$$

kde α, β jsou nějaké konstanty. Pro $\alpha = 0 \neq \beta$ je

$$\lim_{t\to-\infty} \left| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right| = |\beta \boldsymbol{v}_2| \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = 0,$$

pro $\alpha \neq 0 = \beta$ je

$$\lim_{t\to\infty} \left| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right| = |\alpha \boldsymbol{v}_1| \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} = 0$$

a pro $\alpha \neq 0 \neq \beta$ je

$$\lim_{t\to-\infty} \left| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right| = |\alpha \boldsymbol{v}_1| \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + |\beta \boldsymbol{v}_2| \lim_{t\to-\infty} \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = \infty + 0 = \infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} \left| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right| = |\alpha \boldsymbol{v}_1| \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + |\beta \boldsymbol{v}_2| \lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = 0 + \infty = \infty.$$

To znamená, že stacionární bod $(0,0)$ je sedlo.

(ii) $\det \mathsf{A} > 0$

(ii.1) $\operatorname{tr} \mathsf{A} \neq 0$

Nechť $\big(x(t), y(t)\big)$ je řešením systému (5.5) a označme $\varphi(t)$ úhel, který svírá přímka procházející body $(0,0)$, $\big(x(t), y(t)\big)$ s vodorovnou osou. Platí

$$\operatorname{tg} \psi(t) = \frac{y(t)}{x(t)}, \text{ pokud } x(t) \neq 0, \qquad \operatorname{cotg} \psi(t) = \frac{x(t)}{y(t)}, \text{ pokud } y(t) \neq 0.$$

(ii.1.a) $\det \mathsf{A} < \frac{1}{4} (\operatorname{tr} \mathsf{A})^2$.

V tomto případě je $D > 0$ a $\sqrt{D} < |\operatorname{tr} \mathsf{A}|$. Charakteristická rovnice (5.6) má dva reálné různé kořeny λ_1, λ_2 takové, že oba mají stejné znaménko jako $\operatorname{tr} \mathsf{A}$. Nechť pro určitost $\lambda_1 < \lambda_2$ a

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \text{ resp. } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},$$

je vlastní vektor příslušný k vlastní hodnotě λ_1, resp. λ_2. Alespoň jedna ze souřadnic každého z vlastních vektorů je nenulová. Obecné řešení systému (5.5) s počáteční podmínkou $\big(x(0), y(0)\big) \neq (0,0)$ je

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 t};$$

přitom alespoň jedna z konstant α, β je nenulová.

Je-li $\operatorname{tr} \mathsf{A} > 0$, pak $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ a

$$\lim_{t\to-\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to-\infty} \left(\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \right) = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} 0 + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

je-li $\operatorname{tr} \mathsf{A} < 0$, pak $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ a

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \lim_{t\to\infty} \left(\alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \right) = \alpha \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} 0 + \beta \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pokud $\alpha \neq 0 \neq u_1$, pak

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\alpha u_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta v_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\alpha u_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta v_1 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\alpha u_2 + \beta v_2 \mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t}}{\alpha u_1 + \beta v_1 \mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)t}} = \frac{u_2}{u_1}$$

a pokud $\alpha \neq 0 \neq v_1$, pak

$$\lim_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha u_2 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta v_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}}{\alpha u_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \beta v_1 \mathrm{e}^{\lambda_2 t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{\alpha u_2 \mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + \beta v_2}{\alpha u_1 \mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t} + \beta v_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Analogicky, pokud $\alpha \neq 0$, pak

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{u_1}{u_2} \quad \text{když } u_2 \neq 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{když } v_2 \neq 0.$$

Pokud $\alpha = 0$, pak

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{když } v_1 \neq 0, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{když } v_2 \neq 0.$$

Stacionární bod $(0,0)$ je v tomto případě uzel. Směrový vektor polotečny k trajektorii ve stacionárním bodě je vlastním vektorem matice A.

(ii.1.b) $\det \mathsf{A} = \frac{1}{4} (\operatorname{tr} \mathsf{A})^2$

V tomto případě je $\operatorname{tr} \mathsf{A} \neq 0$, neboť $\det \mathsf{A} \neq 0$, charakteristická rovnice (5.6) má dvojnásobný kořen $\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}$ a systém (5.5) s počáteční podmínkou $\big(x(0), y(0)\big) \neq (0,0)$ má řešení

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \gamma + \delta t \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}\right) t},$$

kde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou nějaké konstnty, z nichž aspoň dvě jsou nenulové. Proto platí

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\delta}{\beta} \quad \text{pro } \beta \neq 0, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\beta}{\delta} \quad \text{pro } \delta \neq 0, \qquad \lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{pro } \beta = 0 = \delta.$$

Je-li $\operatorname{tr} \mathsf{A} < 0$, pak

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}\right) t} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} t\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}\right) t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}\right) t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\left(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}\right) \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathsf{A}\right) t}} = 0$$

a tedy $\lim\limits_{t\to\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Je-li $\operatorname{tr} \mathsf{A} > 0$ pak analogicky $\lim\limits_{t\to-\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Stacionární bod $(0,0)$ je v tomto případě uzel. Nyní však již obecně neplatí, že směrový vektor polotečny k trajektorii ve stacionárním bodě je vlastním vektorem matice A; v případě $\beta = 0 = \delta$ (tj. pokud vlastní hodnotě λ matice A přísluší dva lineárně nezávislé vlastní vektory) je každá přímka procházející bodem $(0,0)$ polotečnou nějaké trajektorie.

(ii.1.c) $\det \mathsf{A} > \frac{1}{4}\left(\operatorname{tr} \mathsf{A}\right)^2$

V tomto případě je $D < 0$, charakteristická rovnice (5.6) má dva různé komplexně sdružené kořeny $\frac{1}{2}\left(\operatorname{tr} \mathsf{A} \pm \mathrm{i}\sqrt{-D}\right)$ a systém (5.5) s počáteční podmínkou $\big(x(0), y(0)\big) \neq (0,0)$ má řešení

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\sqrt{-D}}{2}t - \varphi\right) \\ -\sqrt{-\dfrac{c}{b}}\,\sin\left(\dfrac{\sqrt{-D}}{2}t - \varphi - \tilde{\varphi}\right) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\left(\frac{1}{2}\operatorname{tr} \mathsf{A}\right)t},$$

kde ϱ, φ, $\tilde{\varphi}$ jsou vhodné konstanty, přičemž

$$\varrho \neq 0, \qquad \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = \frac{d-a}{\sqrt{-D}}, \quad \tilde{\varphi} \notin \left\{\frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Jedná se o parametrické vyjádření spirály, která se „navíjí“ na stacionární bod $(0,0)$ nebo se z něho „odvíjí“.

Pokud $\operatorname{tr} \mathsf{A} > 0$, pak $\lim\limits_{t\to-\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, pokud $\operatorname{tr} \mathsf{A} < 0$, pak $\lim\limits_{t\to\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii.2) $\operatorname{tr} \mathsf{A} = 0$

V tomto případě je $D = -4\det \mathsf{A} < 0$ a kořeny charakteristické rovnice (5.6) jsou ryze imaginární, $\lambda_1 = \mathrm{i}\sqrt{\det \mathsf{A}}$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}\sqrt{\det \mathsf{A}}$, takže řešení systému (5.5) s počáteční podmínkou $\big(x(0), y(0)\big) \neq (0,0)$ je

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \varrho \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{\det \mathsf{A}}\, t - \varphi\right) \\ -\sqrt{-\dfrac{c}{b}}\,\sin\left(\sqrt{\det \mathsf{A}}\, t - \varphi + \tilde{\varphi}\right) \end{pmatrix}$$

pro vhodné konstanty ϱ, φ, přičemž

$$\varrho \neq 0, \qquad \operatorname{tg} \tilde{\varphi} = \frac{a}{\sqrt{\det \mathsf{A}}}, \quad \tilde{\varphi} \notin \left\{\frac{2k+1}{2}\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Jedná se o parametrické vyjádření elips se středem $(0,0)$, každá trajektorie je tedy cyklem se stacionárním bodem $(0,0)$ ve svém vnitřku. To znamená, že stacionární bod $(0,0)$ je střed.

5.2.4 Věta

Uvažujme autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + P(x,y) \\ y' &= cx + dy + Q(x,y)\,, \end{aligned} \tag{5.7}$$

kde P, Q jsou funkce dvou proměnných spojité v okolí počátku. Nechť $ad - bc \neq 0$ a nechť existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|P(x,y)| + |Q(x,y)|}{(|x| + |y|)^{1+\varepsilon}} = 0\,.$$

Je-li bod $(0,0)$ uzlem nebo ohniskem pro systém (5.5), pak je stejného typu i pro systém (5.7). Je-li bod $(0,0)$ středem pro systém (5.5), pak je bodem rotace nebo ohniskem pro systém (5.7). Je-li bod $(0,0)$ sedlem pro systém (5.5) a funkce P, Q mají spojité parciální derivace podle obou proměnných v okolí počátku, pak je $(0,0)$ sedlem i pro systém (5.7).

D.: P. Hartman: *Ordinary Differential Equations.* John Willey&Sons, New York-London-Sydney, 1964, kap. VIII. □

5.2.5 Důsledek

Nechť (x^*, y^*) je stacionárním bodem systému (5.4) (tj. $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$) a funkce f, g mají spojité druhé parciální derivace podle obou proměnných v okolí bodu (x^*, y^*). Označme

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*),\ f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*),\ g_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*),\ g_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)$$

a nechť $f_1 g_2 - f_2 g_1 \neq 0$.
Pak je bod (x^*, y^*) uzlem, ohniskem nebo sedlem pro systém (5.4), je-li počátek stacionárním bodem stejného typu pro lineární homogenní systém

$$\begin{aligned} x' &= f_1 x + f_2 y \\ y' &= g_1 x + g_2 y\,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Je-li počátek středem pro systém (5.8), je bod (x^*, y^*) buďto ohniskem nebo bodem rotace pro systém (5.4).

D.: Plyne z 5.2.4 a z Taylorovy věty pro funkce více proměnných (sr. Z. Došlá, O. Došlý: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* MU, Brno 1999, 5.2) □

5.2.6 Věta (Dulacovo kritérium)

Nechť funkce f, g jsou spojitě diferencovatelné a existuje funkce $q : \Omega \to \mathbb{R}$, která je rovněž spojitě diferencovatelná a taková, že výraz

$$\frac{\partial\big(q(x,y)f(x,y)\big)}{\partial x} + \frac{\partial\big(q(x,y)g(x,y)\big)}{\partial y}$$

je v nějaké jednoduše souvislé oblasti $B \subseteq \Omega$ stále nezáporný nebo nekladný, přičemž není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny B, pak v množině B neexistuje cyklus systému (5.4).

D.: J. Kalas, Z. Pospíšil: *Spojité modely v biologii.* MU, Brno 2001, str. 9–10. □

5.3 Stabilita

5.3.1 Definice (Persidskij [1903–1970])

Nechť $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t)$ je řešení systému (5.1) definované na intervalu $[0, \infty)$. Řešení $\boldsymbol{x}_0$ se nazývá *stejnoměrně stabilní*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_0 \geq 0$ všechna řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ systému (5.1) splňující podmínku $|\boldsymbol{x}(t_0) - \boldsymbol{x}_0(t_0)| < \delta$ existují pro všechna $t \geq t_0$ a splňují pro ně nerovnost $|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0(t)| < \varepsilon$.

Není-li řešení $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t)$ systému (5.1) stejnoměrně stabilní, nazývá se *nestabilní.*

5.3.2 Definice (Ljapunov [1857–1918])

Nechť $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t)$ je řešení systému (5.1) definované na intervalu $[0, \infty)$. Řešení $\boldsymbol{x}_0$ se nazývá *stejnoměrně asymptoticky stabilní*, je-li stejnoměrně stabilní a existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $t_1 \geq 0$ a všechna řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ systému (5.1) splňující podmínku $|\boldsymbol{x}(t_1) - \boldsymbol{x}_0(t_1)| < \delta$ platí $\lim\limits_{t\to\infty} |\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_0(t)| = 0$.

Ze struktury prostoru řešení lineárního homogenního systému s konstantními koeficienty (sr. 4.1.8) plynou následující tři věty.

5.3.3 Věta

Buď A konstantní matice. Jestliže všechny kořeny její charakteristické rovnice $\det(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{E}) = 0$ (vlastní čísla matice A) mají nekladnou reálnou část a ty s nulovou reálnou částí jsou jednoduché, pak řešení $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t) \equiv 0$ lineárního autonomního systému

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x} \tag{5.9}$$

je stejnoměrně stabilní.

5.3.4 Věta

Jestliže alespoň jedno vlastní číslo matice A má kladnou reálnou část, pak řešení $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t) \equiv 0$ lineárního autonomního systému (5.9) je nestabilní.

5.3.5 Věta

Řešení $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t) \equiv 0$ lineárního autonomního systému (5.9) je stejnoměrně asymptoticky stabilní právě tehdy, když každé vlastní číslo matice A má zápornou reálnou část.

Uvažujme nyní *perturbovaný lineární systém s konstantními koeficienty*

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,. \tag{5.10}$$

5.3.6 Věta

Buď $\mathsf{Y} = \mathsf{Y}(t)$ fundamentální matice řešení systému (5.9). Jestliže existují konstanty $K > 0$ a $\gamma < \dfrac{1}{K}$ takové, že

$$\int\limits_0^t |\mathsf{Y}(t)\mathsf{Y}(s)^{-1}| \mathrm{d}s \;\le\; K \qquad \text{pro } t \ge 0 \tag{5.11}$$

a $|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})| \le \gamma|\boldsymbol{x}|$ pro $\boldsymbol{x} \in \Omega$, pak řešení $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0(t) \equiv 0$ systému (5.10) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

D.: J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 130–131. □

Poznámka: Podmínka (5.11) zaručí stejnoměrnou asymptotickou stabilitu nulového řešení systému (5.9). Věta říká, že je-li perturbace $\boldsymbol{g}$ v jistém smyslu dostatečně malá, zůstává zachována stejnoměrná asymptotická stabilita nulového řešení rovnice (5.10).

Z hlediska aplikací je důležité vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability konstantních řešení (stacionárních bodů) rovnice (5.1).

Je-li funkce $\boldsymbol{f}$ dvakrát spojitě diferencovatelná a $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{o}$, pak podle Taylorovy věty pro funkce více proměnných platí

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{A} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^*)\,,$$

kde $\mathsf{A} = (a_{ij}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}^*)\right)$ a $\boldsymbol{r}_1$ je příslušný Taylorův zbytek. Vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability konstantních řešení rovnice (5.1) lze transformací $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$ převést na vyšetřování stejnoměrné asymptotické stability nulového řešení rovnice

$$\boldsymbol{y}' \;=\; \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}),$$

kde $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}^*)$ a tu vyšetřit podle věty 5.3.6.

5.3.7 Definice

Buď $\boldsymbol{x}^*$ stacionární bod systému (5.1). Jacobiho matice zobrazení $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ v bodě $\boldsymbol{x}^*$

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}^*) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}^*) \end{pmatrix}$$

se nazývá *variační matice systému* (5.1) *ve stacionárním bodě* $\boldsymbol{x}^*$ a homogenní lineární autonomní systém

$$\boldsymbol{z}' = \mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*) \cdot \boldsymbol{z}$$

se nazývá *variační rovnice systému* (5.1).

5.3.8 Věta

Buď $\boldsymbol{x}^*$ stacionární bod systému (5.1) a nechť zobrazení $\boldsymbol{f}$ je spojitě diferencovatelné.

Mají-li všechna vlastní čísla variační matice $\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ záporné reálné části, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Pokud existuje vlastní číslo variační matice $\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*)$ s kladnou reálnou částí, pak je konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) nestabilní.

D.: J. Kalas, M. Ráb: *Obyčejné diferenciální rovnice.* MU, Brno 2001, str. 137–138. □

5.3.9 Kvalitativní vlastnosti řešení dvourozměrného autonomního systému (5.4)

Nechť (x^*, y^*) je stacionární bod systému (5.4), funkce f, g jsou dvakrát spojitě diferencovatelné a $\mathsf{J}(x^*, y^*)$ je variační matice tohoto systému v bodě (x^*, y^*). Spojením výsledků z 5.2.2, 5.2.5 a 5.3.8 dostaneme dostatečné podmínky pro to, aby stacionární bod (x^*, y^*) byl sedlem, stabilním nebo nestabilním uzlem a ohniskem; tyto podmínky jsou shrnuty v tabulce 5.1.

$\det \mathsf{J}(x^*, y^*) < 0$			sedlo
$\det \mathsf{J}(x^*, y^*) > 0$	$\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*) > 0$	$\big(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\big)^2 \geq 4 \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$	nestabilní uzel
		$\big(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\big)^2 < 4 \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$	nestabilní ohnisko
	$\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*) < 0$	$\big(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\big)^2 \geq 4 \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$	stabilní uzel
		$\big(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*, y^*)\big)^2 < 4 \det \mathsf{J}(x^*, y^*)$	stabilní ohnisko

Tabulka 5.1: Klasifikace stacionárních bodů systému (5.4). Uvedené podmínky jsou dostatečné pro to, aby stacionární bod (x^*, y^*) byl typu uvedeného v posledním sloupci tabulky; $\mathsf{J}(x^*, y^*)$ označuje variační matici systému (5.4) ve stacionárním bodě (x^*, y^*).

Do konce tohoto odstavce budeme symbolem $\boldsymbol{\varphi}(t; \boldsymbol{x}^0) = \big(\varphi_1(t; \boldsymbol{x}^0), \dots, \varphi_n(t; \boldsymbol{x}^0)\big)$ označovat řešení počáteční úlohy (5.1), (5.2).

5.3.10 Definice

Buď $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ a G okolí bodu $\boldsymbol{x}^*$ ve fázovém prostoru Ω. Spojitá funkce $V : G \to \mathbb{R}$ se nazývá *ljapunovská funkce systému* (5.1) *v bodě* $\boldsymbol{x}^*$, jestliže

(i) $V(\boldsymbol{x}^*) = 0$ a $V(\boldsymbol{x}) > 0$ pro každé $\boldsymbol{x} \in G \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$.

(ii) Pro každé $\boldsymbol{\eta} \in G$ je složená funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big)$ (chápaná jako funkce jedné reálné proměnné t) nerostoucí pro všechna $t \geq 0$.

5.3.11 Věta (Přímá Ljapunova metoda)

Existuje-li ljapunovská funkce systému (5.1) v bodě $\boldsymbol{x}^*$, pak $\boldsymbol{x}^*$ je stacionárním bodem systému (5.1) a konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ tohoto systému je stejnoměrně stabilní.

Pokud navíc podmínku (ii) z definice 5.3.10 lze nahradit silnější podmínkou

(ii*) Pro každé $\boldsymbol{\eta} \in G$ je složená funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big)$ (chápaná jako funkce jedné reálné proměnné t) klesající pro všechna $t \geq 0$,

pak je konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (5.1) stejnoměrně asymptoticky stabilní.

D.: Pokud by existovalo $\tau > 0$ takové, že $\boldsymbol{\varphi}(\tau;\boldsymbol{x}^*) \neq \boldsymbol{x}^*$, pak by $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\tau;\boldsymbol{x}^*)\big) > 0 = V\big(\boldsymbol{\varphi}(0;\boldsymbol{x}^*)\big)$ a funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\cdot;\boldsymbol{x}^*)\big)$ by nebyla nerostoucí. Bod $\boldsymbol{x}^*$ je tedy stacionárním bodem systému (5.1).

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$. V opačném případě bychom totiž mohli systém (5.1) substitucí $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*$ transformovat na systém $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}^*)$, pro který je $\boldsymbol{o}$ stacionárním bodem.

Buď $\varepsilon > 0$ libovolné číslo takové, že $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : |\boldsymbol{x}| \leq \varepsilon\} \subseteq G$ a označme

$$\gamma = \min\{V(\boldsymbol{x}) : |\boldsymbol{x}| = \varepsilon\}.$$

Pak $\gamma > 0$ a $V(\boldsymbol{x}) \geq \gamma$ pro každé $\boldsymbol{x}$ takové, že $|\boldsymbol{x}| = \varepsilon$. Ze spojitosti funkce V plyne, že existuje $\delta > 0$ takové, že $|V(\boldsymbol{x}) - 0| = V(\boldsymbol{x}) < \gamma$ pro všechna $\boldsymbol{x}$ taková, že $|\boldsymbol{x}| < \delta$. Zřejmě je $\delta < \varepsilon$.

Buď dále $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ takové, že $|\boldsymbol{\xi}| < \delta$. Pak $V\big(\boldsymbol{\varphi}(0;\boldsymbol{\xi})\big) < \gamma$ a poněvadž funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\big)$ je nerostoucí, platí

$$V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\big) < \gamma \quad \text{pro všechna } t > 0 \text{ z definičního oboru funkce } \boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi}). \tag{5.12}$$

Kdyby nyní existovalo $t_1 > 0$ takové, že $|\boldsymbol{\varphi}(t_1,\boldsymbol{\xi})| \geq \varepsilon$, pak by ze spojitosti funkce $|\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})|$ a z Bolzanovy věty plynula existence $t_0 \in (0,t_1)$ takového, že $|\boldsymbol{\varphi}(t_0;\boldsymbol{\xi})| = \varepsilon$ a platilo by $V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_0;\boldsymbol{\xi})\big) \geq \gamma$, což by byl spor s (5.12).

Pro všechna $t > 0$ z definičního oboru funkce $\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})$ tedy platí $|\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon$. Odtud navíc podle 3.3.7 plyne, že $\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})$ je definována pro všechna $t > 0$. Tvrzení o stejnoměrné stabilitě je tedy dokázáno.

V případě, že $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}^*$, platí: $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$ pro každé $t \geq 0$, takže $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}^*$.

Nechť $\boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{o}$ a funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\big)$ je klesající. Poněvadž funkce $V\big(\boldsymbol{\varphi}(\,\cdot\,;\boldsymbol{\xi})\big)$ je monotonní, existuje

$$\lim_{t\to\infty} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})\big) = \alpha \in \mathbb{R} \tag{5.13}$$

a z nezápornosti funkce V plyne $\alpha \geq 0$. Připusťme $\alpha > 0$. Z toho, že

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^*} V(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x}^*) = 0,$$

plyne existence $t_2 > 0$ a $\beta > 0$ takových, že $|\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})| \geq \beta$ pro všechna $t \geq t_2$. Pro všechna $t \geq t_2$ je tedy

$$\beta \leq |\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi})| \leq \varepsilon.$$

Položme $v(\boldsymbol{z}) = V\big(\boldsymbol{\varphi}(1;\boldsymbol{z})\big) - V\big(\boldsymbol{\varphi}(0;\boldsymbol{z})\big)$. Funkce v je podle 3.3.9 spojitá na kompaktní množině $\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n : \beta \le |\boldsymbol{z}| \le \varepsilon\}$ a je zde záporná. Podle Weierstrassových vět existuje

$$\Delta = \max\{v(\boldsymbol{z}) : \beta \le |\boldsymbol{z}| \le \varepsilon\};$$

je $\Delta < 0$ a pro $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\begin{aligned} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k;\boldsymbol{\xi})\big) &= V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k;\boldsymbol{\xi})\big) - V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) = \\ &= v\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k-1;\boldsymbol{\xi})\big) = \ldots \\ &\cdots = \sum_{i=1}^{k} v\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+i-1;\boldsymbol{\xi})\big) + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{\xi})\big) \le k\Delta + V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2;\boldsymbol{\xi})\big). \end{aligned}$$

Poněvadž $\lim\limits_{k\to\infty} k\Delta = -\infty$, je také $\lim\limits_{k\to\infty} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t_2+k;\boldsymbol{\xi})\big) = -\infty$, což je spor s (5.13). Tento spor dokazuje, že $\alpha = 0$. Ze spojitosti funkce V, z faktu $\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) \ne \boldsymbol{x}^*$ pro $t > 0$ a $\boldsymbol{\xi} \ne \boldsymbol{x}^*$, z podmínky (i) v definici 5.3.10 a ze vztahu (5.13) nyní plyne $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{x}^*$. Tím je dokázáno i tvrzení o stejnoměrné asymptotické stabilitě. □

5.3.12 Důsledek

Buď $V : G \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce, která splňuje podmínku (i) z definice 5.3.10. Jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in G$ platí

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}) \le 0, \tag{5.14}$$

pak funkce V je ljapunovskou funkcí systému (5.1) v bodě $\boldsymbol{x}^*$ a tedy konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ tohoto systému je stejnoměrně stabilní.

Jestliže pro každé $\boldsymbol{x} \in G \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ platí $\dot{V}(\boldsymbol{x}^*) < 0$, pak funkce V splňuje podmínku (ii*) z věty 5.3.11 a tedy konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ tohoto systému je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

D.: Pro každé $\boldsymbol{\eta} \in G$ a každé $t \ge 0$ je $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t,\boldsymbol{\eta}) \in G$ a podle věty o derivaci složené funkce platí

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) \frac{\mathrm{d}\varphi_i(t;\boldsymbol{\eta})}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) f_i\big(\boldsymbol{\varphi}(t;\boldsymbol{\eta})\big) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x}) = \dot{V}(\boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Odtud a ze známých vět o vyšetřování průběhu funkce jedné proměnné pomocí derivace plynou obě tvrzení. □

Je-li U diferencovatelná funkce definovaná na $G \subseteq \Omega$, pak výraz $\dot{U}(\boldsymbol{x})$ definovaný vztahem

$$\dot{U}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(\boldsymbol{x})$$

se nazývá *derivace funkce U vzhledem k systému* (5.1).

Kapitola 6

Aplikace

6.1 Některé klasické elementární úlohy

V tomto oddílu je uvedeno několik úloh vedoucích na obyčejné diferenciální rovnice, které lze vyřešit elementárními metodami z kapitoly 2. Úlohy vychází z různých oborů — kinematiky (6.1.1, 6.1.4), geometrické optiky (6.1.3), dynamiky (6.1.2), makroekonomie (6.1.5).

6.1.1 Traktrisa

Po stole táhneme hodinky na napjatém řetízku délky ℓ tak, že koncem řetízku sledujeme hranu stolu. Na počátku svírá řetízek a hrana stolu úhel $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi]$. Úkolem je určit dráhu hodinek.

Zvolíme orthonormální souřadnou soustavu tak, že svislá osa splývá s hranou stolu a je souhlasně orientovaná se směrem pohybu konce řetízku, viz obr. 6.1. Při této volbě budou hodinky na počátku v bodě $(-\ell \sin\alpha, 0)$. Dráhu hodinek vyjádříme jako graf funkce $y = y(x)$. Hodinky se pohybují ve směru působící síly, síla působí ve směru řetízku. To znamená, že přímka incidentní s řetízkem je tečnou ke grafu funkce y v každém bodě. Směrnice této tečny je tedy rovna

$$y'(x) = \frac{\sqrt{\ell^2 - x^2}}{-x}. \tag{6.1}$$

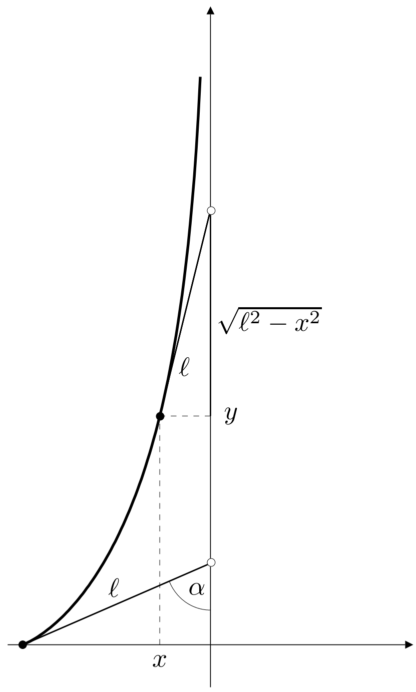
Hledaná funkce je řešením této obyčejné diferenciální rovnice s počáteční podmínkou

$$y(-\ell \sin\alpha) = 0. \tag{6.2}$$

Na pravé straně rovnice (6.1) se nevyskytuje hledaná funkce y, proto můžeme řešení úlohy (6.1), (6.2) bezprostředně psát ve tvaru určitého integrálu

$$y(x) = \int\limits_{-\ell\sin\alpha}^{x} \frac{\sqrt{\ell^2-\xi^2}}{-\xi}\mathrm{d}\xi = \left[\ell \ln \frac{\ell + \sqrt{\ell^2-\xi^2}}{|\xi|} - \sqrt{\ell^2-\xi^2}\right]_{\xi=-\ell\sin\alpha}^{x} =$$
$$= \ell\left[\cos\alpha - \sqrt{1-\frac{x^2}{\ell^2}} + \ln\left(\frac{\ell+\sqrt{\ell^2-x^2}}{-x}\,\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right)\right].$$

Úlohu o dráze hodinek tažených na řetízku po stole jako první řešil Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716). Křivku podrobně studoval v roce 1692 Christiaan Huygens, který jí také dal jméno tractrix (z latinského *trahere*, táhnout).



Obrázek 6.1: Traktrisa

6.1.2 Ciolkovského rovnice

Pohyb rakety budeme popisovat v souřadné soustavě takové, aby na raketu nepůsobily žádné vnější síly (tedy ve stavu beztíže). Nechť v čase $t_0 = 0$ se raketa pohybuje rychlostí v_0. V čase t_0 se zažehne palivo, které rovnoměrně shoří za čas T a v podobě plynů proudí z trysky na zádi rakety rychlostí u vzhledem k raketě. Úlohou je určit rychlost rakety po provedení popsaného manévru, tedy její rychlost v čase T.

Označme M ... hmotnost rakety na počátku (v čase $t_0 = 0$),
μ ... hmotnost paliva vyhořelého za čas T,
$m = m(t)$ ... hmotnost rakety (s dosud nevyhořelým palivem) v čase t,
$v = v(t)$ ... rychlost rakety v čase t.

Předpoklad o rovnoměrném hoření paliva zapíšeme rovností

$$m(t) = M - \frac{\mu}{T}t = \frac{MT - \mu t}{T}. \tag{6.3}$$

Rychlost v neznáme. Budeme však o ní předpokládat, že je spojitě diferencovatelnou funkcí svého argumentu (času). Hybnost rakety se zbývajícím palivem v čase t je

$$p(t) = m(t)v(t). \tag{6.4}$$

Uvažujme krátký časový interval $[t, t + \Delta t] \subseteq [0, T]$. Během něho shoří palivo o hmotnosti

$$\Delta\mu = \frac{\mu}{T}\Delta t. \tag{6.5}$$

Rychlost vytékajících plynů v souřadné soustavě, v níž pohyb popisujeme, je v čase t rovna $v(t)-u$ a v průběhu intervalu se mění v rozmezí od této hodnoty po hodnotu $v(t + \Delta t) - u$. Hybnost vyhořelého paliva vytrysklého v uvažovaném časovém intervalu proto vyjádříme jako

$$p_P(t, \Delta t) = w(t, \Delta t)\Delta\mu, \tag{6.6}$$

kde $w(t,\Delta t)$ je integrální průměr vytékajících plynů v časovém intervalu délky Δt, tj.

$$w(t,\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} \big(v(\tau)-u\big)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} v(\tau)\mathrm{d}\tau - u.$$

Podle první věty o střední hodnotě integrálního počtu existuje číslo $\eta \in (0,1)$ takové, že

$$\int\limits_t^{t+\Delta t} v(\tau)\mathrm{d}\tau = v(t+\eta\Delta t)\Delta t,$$

takže $w(t,\Delta t) = v(t+\eta\Delta t) - u$. S využitím této rovnosti a rovnosti (6.5) vyjádříme hybnost (6.6) vytékajícího plynu výrazem

$$p_P(t,\Delta t) = \big(v(t+\eta\Delta t)-u\big)\frac{\mu}{T}\Delta t. \tag{6.7}$$

Hybnost rakety v čase $t+\Delta t$ je vzhledem k (6.3) rovna

$$p_R(t+\Delta t) = m(t+\Delta t)v(t+\Delta t) = \left(M - \frac{\mu}{T}(t+\Delta t)\right)v(t+\Delta t) = \left(m(t) - \frac{\mu}{T}\Delta t\right)v(t+\Delta t).$$

Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě platí

$$v(t+\Delta t) = v(t) + v'(t+\vartheta\Delta t)\Delta t,$$

kde $\vartheta \in (0,1)$. Dosazením této rovnosti do předchozí dostaneme

$$\begin{aligned} p_R(t+\Delta t) &= \left(m(t) - \frac{\mu}{T}\Delta t\right)\big(v(t) + v'(t+\vartheta\Delta t)\Delta t\big) = \\ &= m(t)v(t) - \left(\frac{\mu}{T}v(t) - m(t)v'(t+\vartheta\Delta t)\right)\Delta(t) - \frac{\mu}{T}v'(t+\vartheta\Delta t)(\Delta t)^2. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Souhrnná hybnost rakety a vyhořelého paliva je v čase $t+\Delta t$ rovna

$$p(t+\Delta t) = p_R(t+\Delta t) + p_P(t,\Delta t).$$

Odtud a z (6.7), (6.8) dostaneme

$$\frac{p(t+\Delta t)-p(t)}{\Delta t} = \big(v(t+\eta\Delta t) - u - v(t)\big)\frac{\mu}{T} + m(t)v'(t+\vartheta\Delta t) - \frac{\mu}{T}v'(t+\vartheta\Delta t)\Delta t.$$

Limitním přechodem $\Delta t \to 0$ a jednoduchou úpravou vyjádříme derivaci hybnosti soustavy rakety s palivem ve tvaru

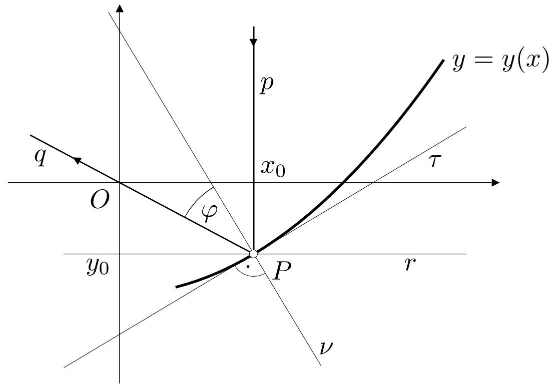
$$p'(t) = m(t)v'(t) - u\frac{\mu}{T}.$$

Podle zákona o zachování hybnosti je $p'(t) = 0$, takže s využitím rovnosti (6.3) dostaneme diferenciální rovnici pro neznámou funkci v ve tvaru

$$v'(t) = \frac{\mu u}{MT - \mu t}.$$

Na její pravé straně se nevyskytuje hledaná funkce v, stačí tedy integrovat obě strany rovnice v mezích od 0 po t. S využitím počáteční podmínky $v(0) = v_0$ dostaneme

$$\begin{aligned} v(t) = v_0 + \int\limits_0^t \frac{\mu u}{MT - \mu\tau}\mathrm{d}\tau = v_0 - u\left[\ln|MT-\mu\tau|\right]_{\tau=0}^t = v_0 + u\ln\frac{MT}{MT-\mu t} = \\ = v_0 + u\ln\left(1 + \frac{\mu t}{MT-\mu t}\right). \end{aligned}$$



Obrázek 6.2: K Archimédově úloze: $y = y(x)$ – zrcadlo, p – přicházející paprsek, q – odražený paprsek, P – bod dopadu a odrazu paprsku, O – ohnisko, τ – tečna k zrcadlu v bodě dopadu přicházejícího paprsku, ν – normála k zrcadlu, φ –úhel odrazu.

Zejména pro $t = T$ máme

$$v(T) = v_0 + u \ln\left(1 + \frac{\mu}{M - \mu}\right). \tag{6.9}$$

Tato formule se nazývá *Ciolkovského rovnice.*

Rovnici (6.9) odvodil William Moore ve výzkumné zprávě *A Treatise on the Motion of Rockets* pro Royal Military Academy, Woolwich, England, v roce 1813. Tato práce byla zapomenuta a nezávisle na ní rovnici objevil roku 1898 Konstantin Eduardovič Ciolkovskij. S její pomocí v článku

> Циолковский, К. Е. Изследование мировых пространств реактивными приборами. *Научное обозрѣние.* 1903, годъ X, No. 5

zdůvodnil, že rakety mohou létat naprosto nezávisle na okolním prostředí, a proto mohou být vhodným prostředkem pro lety do vesmíru.

6.1.3 Archimédova úloha

Určete tvar zrcadla, které odráží rovnoběžné světelné paprsky do jediného bodu (ohniska).

Zvolíme souřadnou soustavu tak, aby ohnisko bylo v jejím počátku O, přicházející paprsky byly rovnoběžné se svislou osou a směřovaly proti její orientaci (kreslete si obrázek 6.2). Uvažujme přicházející paprsek p, který se od zrcadla odráží v libovolném, ale pevně zvoleném bodě $P = (x_0, y_0)$, $x_0 > 0$, $y_0 < 0$. Nechť tvar zrcadla je v okolí tohoto bodu popsán funkcí $y = y(x)$; přitom samozřejmě $y(x_0) = y_0$.

Označme τ, resp. ν, tečnu, resp. normálu, k zrcadlu v bodě P, q přímku incidentní s odraženým paprskem PO, r vodorovnou přímku procházející bodem P. Nechť dále $\varphi = \sphericalangle\nu q$ je úhel, který svírá odražený paprsek s normálou ν. Úhel odrazu se rovná úhlu dopadu a tedy $\sphericalangle p\nu = \varphi$. Odtud plyne, že $\sphericalangle p\tau = \frac{1}{2}\pi - \varphi$. Dále platí $\sphericalangle r\tau = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle p\tau = \varphi$. Poněvadž τ je tečnou ke křivce o rovnici $y = y(x)$, platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = \operatorname{tg}(\sphericalangle r\tau) = \operatorname{tg}\varphi. \tag{6.10}$$

Poněvadž přímky p a r jsou kolmé, je $\sphericalangle qr = \frac{1}{2}\pi - \sphericalangle p\nu - \sphericalangle\nu q = \frac{1}{2}\pi - 2\varphi$ a tedy

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle qr) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = \operatorname{cotg}(2\varphi) = \frac{1 - (\operatorname{tg}\varphi)^2}{2\operatorname{tg}\varphi}. \tag{6.11}$$

Současně

$$\operatorname{tg}(\sphericalangle qr) = \frac{|y_0|}{x_0} = -\frac{y_0}{x_0}. \tag{6.12}$$

Spojením (6.10), (6.11) a (6.12) dostaneme rovnost

$$-\frac{y_0}{x_0}=\frac{1-\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)\right)^2}{2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0)}.$$

Poněvadž bod $P=(x_0,y_0)$ byl libovolný, dostáváme pro tvar zrcadla diferenciální rovnici

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-1=2\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

To je rovnice nerozřešená vzhledem k derivaci. Jedná se však o jednoduchou kvadratickou rovnici pro neznámou derivaci, takže ji můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\pm\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\,.$$

Pro $y<0$ a $x>0$ je $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}>0$, viz obrázek 6.2. Znaménko před odmocninou tedy musí být $+$. Dostáváme tak diferenciální rovnici pro tvar požadovaného zrcadla

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\,.$$

To je rovnice homogenní. Substitucí $u=u(x)=\dfrac{y(x)}{x}$, tedy $y(x)=xu(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ dostaneme rovnici se separovanými proměnnými. Její řešení v implicitním tvaru je

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

tedy $\ln\left|u+\sqrt{u^2+1}\right|=\ln|x|+\mathit{const}$. Odtud

$$u(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{C}-\frac{C}{x}\right),$$

kde C je integrační konstanta. V původních proměnných dostaneme rovnost

$$y(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{C}-C\right),$$

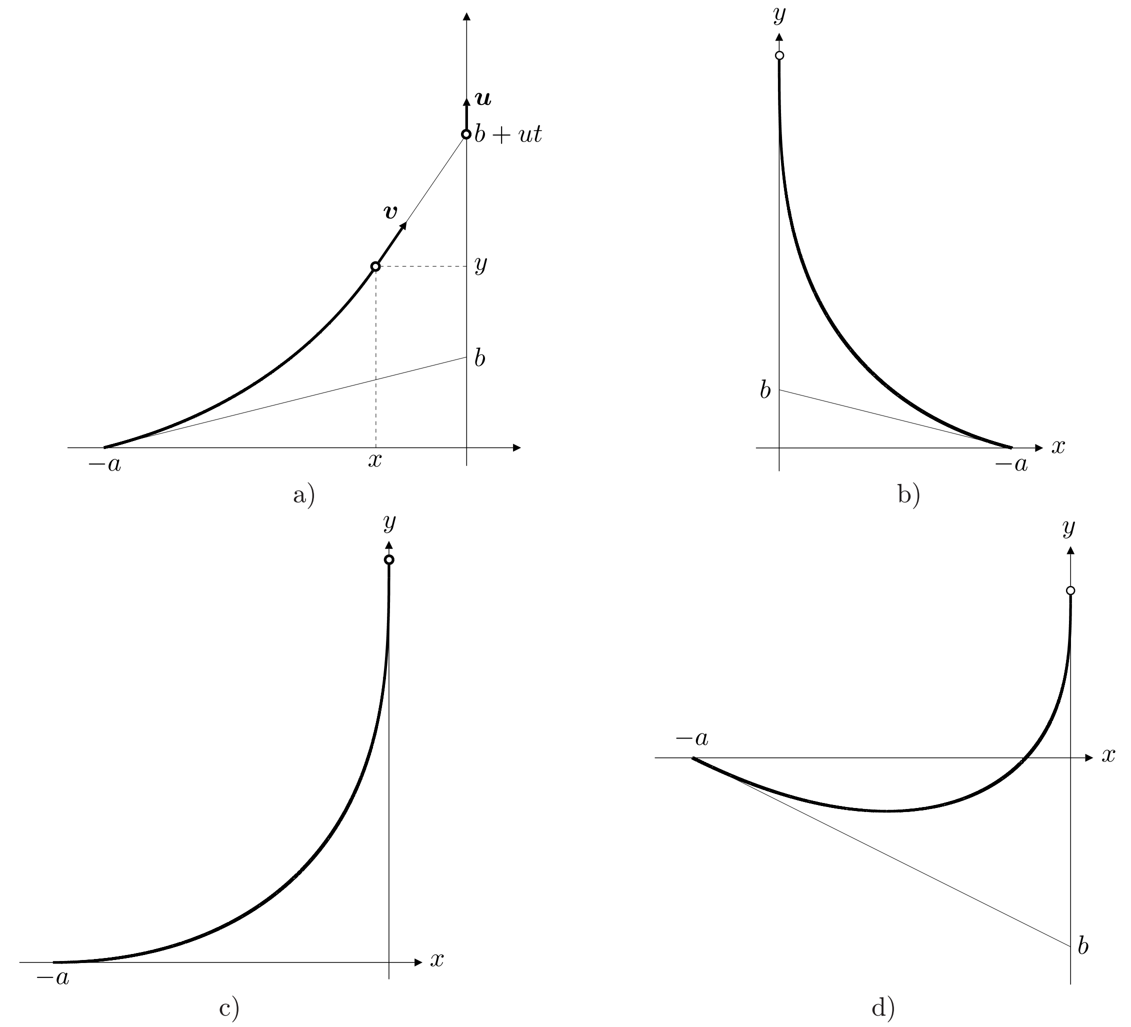
neboli $x^2=C(C+2y)$. To je rovnice paraboly s ohniskem $(0,0)$ a řídící přímkou $x=-C$.

Název „Archimédova úloha“ vychází z tradované historky, podle níž Archimédes při obléhání Syrakus armádou římského vojevůdce Marcella v letech 214–212 př. n. l. z vyleštěných štítů obránců města sestavoval zrcadla, kterými soustředil sluneční paprsky a tak zapaloval prosmolené lodě obléhatelů.

6.1.4 „Psí křivka“

Pes pronásleduje zajíce. Zajíc se pohybuje rovnoměrně přímočaře rychlostí u, pes běží ve směru k zajíci rovnoměrnou rychlostí v, $v>u$. Určete tvar dráhy psa a čas T, za který pes zajíce dohoní.

Zvolíme orthonormální souřadnou soustavu tak, aby se zajíc pohyboval po druhé ose souhlasně s její orientací a na počátku, tj. v čase $t_0=0$, se zajíc nacházel v bodě $(0,b)$ a pes v bodě $(-a,0)$. Nechť pro určitost je $a>0$; případ $a=0$ je triviální a v případě $a<0$ bude tvar dráhy zřejmě obrazem tvaru pro $a>0$ v osové symetrii kolem druhé souřadné osy.



Obrázek 6.3: a) K odvození rovnice „psí křivky“. Vektor rychlosti zajíce $\boldsymbol{u}$ má v každém okamžiku souřadnice $(0, u)$, vektor rychlosti psa $\boldsymbol{v}$ má v každém okamžiku velikost v a v čase t směřuje k zajíci, tj. je rovnoběžný s vektorem o souřadnicích $(|x|, b + ut - y)$.
b) „Psí křivka“ pro $a < 0$, $b > 0$.
c) „Psí křivka“ pro $a > 0$, $b = 0$.
d) „Psí křivka“ pro $a > 0$, $b < 0$.

Situace je znázorněna na obr. 6.3 a). Dráhu psa vyjádříme jako funkci $y = y(x)$. V čase $t = 0$ je $x = -a$ a $y = 0$, tj.

$$y(-a) = 0. \tag{6.13}$$

Pes k zajíci směřuje od začátku, tj.

$$y'(-a) = \frac{b}{a}. \tag{6.14}$$

V jistém čase t, $t < T$, se pes nachází v bodě (x, y), $x \in (-a, 0)$, a pes v bodě $(0, b + ut)$. Poněvadž pes stále směřuje k zajíci, platí

$$y'(x) = \frac{b + ut - y(x)}{|x|} = \frac{y(x) - b - ut}{x},$$

neboli

$$ut = y - xy'(x) - b. \tag{6.15}$$

Za čas t urazí pes dráhu délky vt. Této hodnotě tedy musí být rovna délka křivky (grafu funkce) $y = y(x)$ od bodu $(-a, 0)$ po bod (x, y), tedy

$$vt = \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + \big(y'(\xi)\big)^2}\, \mathrm{d}\xi.$$

Z této rovnosti vyjádříme t a dosadíme do (6.15),

$$\frac{v}{u} \int_{-a}^{x} \sqrt{1 + \big(y'(\xi)\big)^2}\, \mathrm{d}\xi = y(x) - xy'(x) - b. \tag{6.16}$$

Označíme

$$s = \frac{u}{v}. \tag{6.17}$$

Podle předpokladu je $s < 1$. Obě strany rovnosti (6.16) zderivujeme podle x. Dostaneme

$$s\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2} = y'(x) - y'(x) - xy''(x)$$

a po úpravě

$$xy''(x) + s\sqrt{1 + \big(y'(x)\big)^2} = 0. \tag{6.18}$$

Dráha psa je tedy řešením neautonomní nelineární diferenciální rovnice druhého řádu (6.18) s počátečními podmínkami (6.13), (6.14).

Rovnice (6.18) je typu 2.10. Proto zavedeme novou neznámou funkci $p = p(x) = y'(x)$. Dosadíme ji do rovnice (6.18) a počáteční podmínky (6.14). Po snadné úpravě dostaneme počáteční úlohu

$$p' = -\frac{s}{x}\sqrt{1 + p^2}, \qquad p(-a) = \frac{b}{a}.$$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. Řešení úlohy v implicitním tvaru tedy podle 2.3 je

$$\int_{\frac{b}{a}}^{p} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{1 + \eta^2}} = -s \int_{-a}^{x} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}.$$

Integrací dostaneme

$$\ln \frac{a\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right)}{b + \sqrt{a^2 + b^2}} = \ln\left(-\frac{a}{x}\right)^s$$

a odtud

$$p = \frac{1}{2C}\left(C^2\left(-\frac{a}{x}\right)^s - \left(-\frac{x}{a}\right)^s\right),$$

kde

$$C = \frac{b}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \tag{6.19}$$

Poněvadž $p = y'$ a funkce y splňuje podmínku (6.13), dostaneme řešení úlohy integrací poslední rovnosti, tedy

$$y(x) = \frac{1}{2C}\int_{-a}^{x}\left(C^2\left(-\frac{a}{\xi}\right)^s - \left(-\frac{\xi}{a}\right)^s\right)\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{Ca}{2(1-s)}\left(1 - \left(-\frac{x}{a}\right)^{1-s}\right) - \frac{a}{2C(1+s)}\left(1 - \left(-\frac{x}{a}\right)^{1+s}\right).$$

Za konstanty s a C dosadíme z rovností (6.17) a (6.19). Po úpravách dostaneme „psí křivku“ ve tvaru

$$y(x) = \frac{v\left(vb + u\sqrt{a^2+b^2}\right)}{v^2-u^2} - \frac{v}{2}\left(\frac{b-\sqrt{a^2+b^2}}{v+u}\left|\frac{x}{a}\right|^{1+\frac{u}{v}} + \frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{v-u}\left|\frac{x}{a}\right|^{1-\frac{u}{v}}\right).$$

Nalezená funkce y je sudá, vyjadřuje tedy tvar dráhy psa pro $a > 0$ i pro $a < 0$; v prvním případě bychom za definiční obor považovali interval $[-a, 0]$, ve druhém interval $[0, -a]$.

Pes dostihne zajíce v bodě $\big(0, y(0)\big)$, To znamená, že zajíc rychlostí u urazí dráhu délky $y(0) - b$ a čas, za který pes zajíce dohoní, je tedy roven

$$T = \frac{y(0)-b}{u} = \frac{1}{u}\left(\frac{v\left(vb + u\sqrt{a^2+b^2}\right)}{v^2-u^2} - b\right) = \frac{ub + v\sqrt{a^2+b^2}}{v^2-u^2}.$$

„Psí křivku“ („courbe chien“) jako první studoval v roce 1732 francouzský matematik Pierre Bouger (který je známější jako účastník expedice do Peru v roce 1735, která změřila délku jednoho stupně zeměpisné délky na rovníku). Křivka je nejjednodušším případem křivek sledování (pursuit curves, pojem poprvé použil George Boole ve svém spisu „Treatise on Differential equations“ v roce 1859), které jsou definovány takto: jestliže body A a P se pohybují rovnoměrně, bod A po dané křivce a směr pohybu bodu P stále míří k bodu A, pak bod P opisuje křivku sledování.

Úloha bývá někdy formulována tak, že pes sleduje svého pána, nebo že liška honí králíka.

6.1.5 Ekonomický růst (Solowův-Swanův neoklasický model)

Budeme se snažit popsat dynamiku (vývoj v čase) základních makroekonomických ukazatelů v uzavřené ekonomice, tj. v ekonomice, v níž nedochází k žádné výměně s okolními ekonomikami (k exportu nebo importu). Za základní ukazatele budeme považovat:

$Y = Y(t)$ **...** hrubý domácí produkt v čase t.

$K = K(t)$ **...** kapitál v čase t. Kapitálem budeme rozumět nejen kapitál finanční, tj. peníze, ale také kapitál hmotný, tj. budovy, stroje, zařízení ap. Celkové množství kapitálu lze však vyjádřit pomocí peněžní jednotky.

$L = L(t)$ **...** disponibilní pracovní síla v čase t. Lze si ji představit jako množství práceschopného (nebo práceochotného) obyvatelstva.

$I = I(t)$ **...** investice v čase t, tj. peněžní prostředky použité k tvorbě nebo obnově kapitálu.

$S = S(t)$ **...** spotřeba v čase t. Za spotřebu budeme považovat peněžní prostředky k tvorbě nebo obnově kapitálu nevyužité, tj. nejen realizovanou spotřebu ale také např. úspory obyvatelstva.

Vyjdeme z několika jednoduchých a z ekonomického hlediska přijatelných předpokladů:

P1) Jedinými produkčními faktory jsou kapitál a práce.
P2) Kapitál se vytváří investicemi.
P3) Kapitál se amortizuje (znehodnocuje) tak, že poměr znehodnoceného kapitálu za jednotku času ke všemu kapitálu je konstantní.
P4) Relativní přírůstek pracovní síly v čase je konstantní; v podstatě odpovídá přirozenému přírůstku obyvatel.
P5) Sklon ke spotřebě, tj. podíl spotřebovaného produktu, je v čase konstantní.
P6) Veškerý produkt se rozdělí na investice a spotřebu.

P2) a P6) nejsou ve vlastním smyslu předpoklady, je jimi pouze specifikováno, co se rozumí pojmy „investice“ a „spotřeba“.

Základní makroekonomické ukazatele budeme považovat za nezáporné diferencovatelné funkce definované na intervalu $[0, \infty)$, tj. zajímá nás vývoj od jistého okamžiku do budoucnosti. Nyní můžeme předpoklady vyjádřit matematicky:

P1) Produkce je funkcí kapitálu a práce, tj.

$$Y(t) = f\big(K(t), l(t)\big), \tag{6.20}$$

kde $f : [0, \infty)^2 \to [0, \infty)$ je nějaká funkce rostoucí v každé ze svých proměnných. Nazýváme ji *produkční funkce*.

P2) Množství kapitálu vytvořeného za časový interval délky Δt, tj. od času t po čas $t + \Delta t$, je rovno $I(t)\Delta t$.

P3) Označme a množství kapitálu amortizovaného za jednotku času. Pak pro každý čas t platí

$$\frac{a}{K(t)} = \delta,$$

kde δ je nějaká nezáporná konstanta, kterou nazveme *mírou amortizace*. Ta bývá vyjádřena pomocí odpisů. Za časový interval délky Δt se amortizuje $a\Delta t$ kapitálu, takže množství kapitálu znehodnoceného za interval délky Δt je rovno

$$\delta K(t)\Delta t.$$

P4) Relativní přírůstek λ pracovní síly za jednotku času je konstantní, takže relativní přírůstek pracovní síly za časový interval délky Δt je roven $\lambda\Delta t$, tj.

$$\frac{L(t + \Delta t) - L(t)}{L(t)} = \lambda\Delta t.$$

P5) Existuje konstanta s nazývaná *mezní sklon ke spotřebě* taková, že pro každé $t \geq 0$ je

$$\frac{S(t)}{Y(t)} = s.$$

P6) V každém čase t platí

$$Y(t) = I(t) + S(t). \tag{6.21}$$

Dále potřebujeme specifikovat produkční funkci f. Budeme tedy ještě předpokládat:

P7) Ke zdvojnásobení produkce je potřeba dvojnásobného kapitálu i dvojnásobné pracovní síly. Obecněji, ke zvětšení produkce o $q\%$ je potřeba zvětšit kapitál i pracovní sílu také o $q\%$. Matematicky,

$$f(\beta K, \beta L) = \beta f(K, L) \tag{6.22}$$

pro každou konstantu $\beta > 0$; jinak řečeno, produkční funkce f je homogenní prvního řádu.

P8) Není-li v ekonomice žádný kapitál, tak jakékoliv jeho přidání způsobí veliký nárůst produkce; přesněji, mezní produkt kapitálu roste do nekonečna, pokud se množství kapitálu v ekonomice přibližuje k nule. Je-li v ekonomice nadbytek kapitálu, tak jeho zvětšení již nezpůsobí významný nárůst produkce; přesněji, mezní produkt kapitálu klesá k nule, pokud jeho množství v ekonomice neomezeně roste. Analogické vztahy má produkce a práce. Tyto předpoklady zapíšeme ve tvaru

$$\lim_{K\to 0+} \frac{\partial f}{\partial K}(K,L) = \lim_{L\to 0+} \frac{\partial f}{\partial L}(K,L) = \infty, \qquad \lim_{K\to \infty} \frac{\partial f}{\partial K}(K,L) = \lim_{L\to \infty} \frac{\partial f}{\partial L}(K,L) = 0;$$

nazýváme je *Inadovy podmínky.*

Nyní již můžeme sestavit rovnice popisující vývoj makroekonomických ukazatelů. Podle P2) a P3) je kapitál v čase $t+\Delta t$ roven

$$K(t+\Delta t) = K(t) + I(t)\Delta t - \delta K(t)\Delta t.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{K(t+\Delta t) - K(t)}{\Delta t} = I(t) - \delta K(t)$$

a limitním přechodem $\Delta t \to 0$ získáme diferenciální rovnici

$$K' = I - \delta K. \tag{6.23}$$

Tímtéž limitním přechodem dostaneme po snadné úpravě z předpokladu P4) diferenciální rovnici

$$L' = \lambda L. \tag{6.24}$$

Z předpokladu P6) máme $1 = \dfrac{I(t)}{Y(t)} + \dfrac{S(t)}{Y(t)}$ a dále s využitím předpokladu P5) dostaneme

$$I(t) = (1-s)Y(t). \tag{6.25}$$

Systém dvou diferenciálních rovnic (6.23), (6.24) spolu s omezujícími rovnostmi (6.20), (6.25) lze považovat za matematický model dynamiky produkce, kapitálu a práce.

Model (6.23), (6.24), (6.20), (6.25) můžeme ještě dále upravit. Zavedeme veličinu $k = k(t)$ vztahem

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}; \tag{6.26}$$

nazýváme ji *míra vybavenosti práce kapitálem.* Z rovností (6.20) a (6.22) dostaneme

$$Y(t) = f\big(K(t), L(t)\big) = L(t) f\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = L(t) f\big(k(t), 1\big).$$

Výraz $f(k,1)$ se nazývá *intenzivní tvar produkční funkce.* Derivováním vztahu $K = Lk$ definujícího vybavenost práce kapitálem dostaneme $K' = L'k + Lk'$. Po dosazení z rovnic (6.24), (6.23) máme $I - \delta K = \lambda Lk + Lk'$. Za proměnnou I nejprve dosadíme z rovnosti (6.25) a pak za proměnnou Y z rovnosti (6.20). Dostaneme tak $(1-s)Lf(k,1) - \delta K = \lambda Lk + Lk'$. Po vydělení hodnotou L máme $(1-s)f(k,1) - \delta k = \lambda k + k'$. Odtud vyjádříme derivaci k' a dostaneme *základní dynamickou rovnici neoklasického modelu*

$$k' = -(\lambda + \delta)k + (1-s)f(k,1). \tag{6.27}$$

V základní rovnici stále zůstává neurčená produkční funkce f. Jednoduchá funkce, která splňuje podmínky P7) a P8) (a tedy může představovat jistý popis ekonomické reality) je *Cobbova-Douglasova produkční funkce*, která je tvaru

$$f(K,L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \tag{6.28}$$

kde kladný koeficient A představuje produkci při jednotkovém kapitálu i práci a α je nějaká konstanta taková, že $0 < \alpha < 1$. Cobbova-Douglasova produkční funkce v intenzivním tvaru je

$$f(k,1) = Ak^{\alpha}. \tag{6.29}$$

Dosazením této funkce do základní rovnice (6.27) dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro neznámou funkci k ve tvaru

$$k' = -(\lambda+\delta)k + A(1-s)k^{\alpha}. \tag{6.30}$$

To je rovnice Bernoulliova, sr. 2.7. Budeme ji řešit zavedením substituce

$$r = k^{1-\alpha}, \tag{6.31}$$

tedy

$$r' = (1-\alpha)k^{-\alpha}k' = (1-\alpha)k^{-\alpha}\left(-(\lambda+\delta)k + A(1-s)k^{\alpha}\right) = \\ = (\alpha-1)(\lambda+\delta)k^{1-\alpha} - A(1-s)(\alpha-1),$$

neboli

$$r' = (\alpha-1)(\lambda+\delta)r - A(1-s)(\alpha-1). \tag{6.32}$$

To je nehomogenní lineární rovnice pro neznámou funkci k a její řešení s počáteční podmínkou $r(0) = r_0$ je podle 2.6 rovno

$$r(t) = \left[r_0 - \int_0^t A(1-s)(\alpha-1)\mathrm{e}^{-(\alpha-1)(\lambda+\delta)\sigma}\mathrm{d}\sigma\right]\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} = \\ = \left[r_0 + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\left(\mathrm{e}^{-(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} - 1\right)\right]\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} = \\ = \left(r_0 - A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}. \tag{6.33}$$

Míra amortizace δ je podle předpokladu P3) nezáporná. O relativním přírůstku pracovní síly λ jsme dosud nic nepředpokládali, může být kladný (obyvatelstva přibývá) i záporný (obyvatelstvo vymírá). Pro další úvahy budeme předpokládat, že $\lambda+\delta > 0$ (materiál chátrá rychleji než obyvatelstvo). Poněvadž $\alpha < 1$, je funkce r daná rovností (6.33) monotonní (v případě $(\lambda+\delta)r_0 > A(1-s)$ klesající, v případě $(\lambda+\delta)r_0 < A(1-s)$ rostoucí) a platí

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = A\frac{1-s}{\lambda+\delta}. \tag{6.34}$$

S využitím rovností (6.26), (6.29) a (6.31) můžeme psát

$$r = k^{1-\alpha} = \left(\frac{K}{L}\right)^{1-\alpha} = \frac{AK}{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}} = A\frac{K}{Y}. \tag{6.35}$$

Z rovnosti (6.34) nyní plyne

$$\lim_{t\to\infty}\frac{K(t)}{Y(t)} = \frac{1-s}{\lambda+\delta}; \tag{6.36}$$

tento výsledek můžeme interpretovat tak, že *kapitálová náročnost jednotky produkce* (množství kapitálu potřebné k vytvoření jednotkového produktu) se v uzavřené ekonomice ustálí na jisté hodnotě, zvané *mezní poměr kapitálu a produkce,* která závisí pouze na sklonu ke spotřebě, míře amortizace a přirozeném přírůstku (nebo úbytku) obyvatel. Ve stabilizované uzavřené ekonomice tedy platí $\dfrac{K}{Y} = \dfrac{1-s}{\lambda+\delta}$, neboli

$$Y = \frac{1-s}{\lambda+\delta}K;$$

produkce je přímo úměrná kapitálu.

Návratem k proměnné $k = r^{1/(1+\alpha)}$ můžeme vyjádřit řešení základní rovnice (6.30) s Cobbovou-Douglasovou produkční funkcí a s počáteční podmínkou $k(0) = k_0$ ve tvaru

$$k(t) = \left[\left(k_0^{1-\alpha} - A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{6.37}$$

Pro funkci k platí, že

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = \left(A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}; \tag{6.38}$$

její chování v dlouhém časovém úseku nezávisí na počáteční hodnotě. Ekonomika tedy směřuje ke konstantní (*rovnovážné*) vybavenosti práce kapitálem.

Nyní můžeme pomocí řešení (6.33) a (6.37) rovnic (6.32) a (6.30) vyjádřit řešení rovnic původního modelu (6.20), (6.23), (6.24), (6.25), (6.21) v případě, že produkční funkce je Cobbova-Douglasova tvaru (6.28). Budeme uvažovat počáteční podmínky

$$K(0) = K_0, \quad L(0) = L_0.$$

Pak podle (6.28), (6.21) a (6.25) je

$$Y(0) = Y_0 = AK_0^{\alpha}L_0^{1-\alpha}, \quad S(0) = S_0 = sY_0, \quad I(0) = I_0 = (1-s)Y_0.$$

Rovnice (6.24) je lineární homogenní a její řešení splňující uvedenou počáteční podmínku je

$$L(t) = L_0\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Podle (6.26) je

$$K(t) = k(t)L(t) = L_0\mathrm{e}^{\lambda t}\left[\left(\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{1-\alpha} - A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

podle (6.28), (6.20) je

$$Y(t) = AK(t)^{\alpha}L(t)^{1-\alpha} = AL_0\mathrm{e}^{\lambda t}\left[\left(\left(\frac{K_0}{L_0}\right)^{1-\alpha} - A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right)\mathrm{e}^{(\alpha-1)(\lambda+\delta)t} + A\frac{1-s}{\lambda+\delta}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}.$$

Spotřeba $S(t)$ je s-násobkem produkce a investice $I(t)$ je jejím $(1-s)$-násobkem.

Z rovností (6.38), (6.36) plyne, že produkce, kapitál a pracovní síla jsou asymptoticky ekvivalentní funkce; zhruba řečeno, tyto makroekonomické charakteristiky rostou stejně rychle. Zejména platí

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Y(t)}{K(t)} = \frac{\lambda+\delta}{1-s} = const < \infty.$$

Základní dogma ekonomie však říká, že ekonomika roste tak, že se produkuje stále více se stále menšími náklady, tj.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Y(t)}{K(t)} = \infty. \tag{6.39}$$

Tato disproporce může být způsobena tím, že jsme neuvažovali technologický pokrok. Ten se projevuje tak, že efektivita práce v čase roste. To znamená, že pracovní síla nebude vyjádřena pouze množstvím pracujících. Předpoklad P4) tedy nahradíme předpokladem modifikovaným:

P4') Relativní přírůstek pracovní síly za jednotku času v průběhu času roste, tj.

$$\frac{L(t+\delta t) - L(t)}{L(t)} = \lambda(t)\Delta t,$$

kde λ je rostoucí funkce.

Nyní můžeme zopakovat všechny úvahy. Těmi dojdeme k modifikované rovnici neoklasického modelu

$$k' = -\big(\lambda(t) + \delta\big)k + (1-s)f(k,1), \tag{6.40}$$

která se od rovnice (6.27) liší pouze v tom, že relativní přírůstek pracovní síly λ závisí na čase. Abychom tuto závislost specifikovali, přijmeme další předpoklad:

P9) Relativní přírůstek pracovní síly vyjadřuje dosaženou technologickou úroveň. Technologický růst je proces kumulativní, tj. jeho přírůstek je úměrný úrovni dosažené a době rozvoje, tj.

$$\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t) = p\lambda(t)\Delta t,$$

kde p je kladná konstanta.

Uvedený předpoklad lze limitním přechodem $\Delta t \to 0$ přepsat ve tvaru homogenní diferenciální rovnice

$$\lambda' = p\lambda, \tag{6.41}$$

jejíž řešení je podle 2.6 rovno $\lambda(t) = \lambda_0 \mathrm{e}^{pt}$, kde λ_0 vyjadřuje počáteční technologickou úroveň. Do rovnice (6.40) nyní můžeme dosadit Cobbovu-Douglasovu produkční funkci (6.29) a vyjádření (6.41). Opět dostaneme Bernoulliovu rovnici

$$k' = -\left(\lambda_0 \mathrm{e}^{pt} + \delta\right) k + A(1-s)k^{\alpha},$$

kterou substituce (6.31) transformuje na rovnici lineární

$$r' = (\alpha - 1)\left(\lambda_0 \mathrm{e}^{pt} + \delta\right) r + A(1-s)(1-\alpha).$$

Její řešení s počáteční podmínkou $r(0) = r_0$ je podle 2.6 rovno

$$r(t) = \left[r_0 + A(1-\alpha)(1-s)\int_0^t \exp\left\{(1-\alpha)\left(\delta\tau + \frac{\lambda_0}{p}\left(\mathrm{e}^{p\tau} - 1\right)\right)\right\}\mathrm{d}\tau\right] \times$$
$$\times \exp\left\{-(1-\alpha)\left(\delta t + \frac{\lambda_0}{p}\left(\mathrm{e}^{pt} - 1\right)\right)\right\}.$$

Vzhledem k (6.35) je

$$\frac{Y(t)}{K(t)} = \frac{A}{r(t)},$$

takže s použitím de l'Hospitalova pravidla můžeme vypočítat

$$\lim_{t\to\infty}\frac{Y(t)}{K(t)} = A\lim_{t\to\infty}\frac{\exp\left\{(1-\alpha)\left(\delta t + \frac{\lambda_0}{p}\left(\mathrm{e}^{pt}-1\right)\right)\right\}}{r_0 + A(1-\alpha)(1-s)\int_0^t \exp\left\{(1-\alpha)\left(\delta\tau + \frac{\lambda_0}{p}\left(\mathrm{e}^{pt}-1\right)\right)\right\}\mathrm{d}\tau} =$$

$$= A\lim_{t\to\infty}\frac{(1-\alpha)\left(\delta + \frac{\lambda_0}{p}\mathrm{e}^{pt}\right)\exp\left\{(1-\alpha)\left(\delta t + \frac{\lambda_0}{p}\left(\mathrm{e}^{pt}-1\right)\right)\right\}}{A(1-\alpha)(1-s)\exp\left\{(1-\alpha)\left(\delta t + \frac{\lambda_0}{p}\left(\mathrm{e}^{pt}-1\right)\right)\right\}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\delta p + \lambda_0\mathrm{e}^{pt}}{p(1-s)} = \infty.$$

Podmínka (6.39) je nyní splněna. Analogicky vypočítáme

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{K(t)}{Y(t)}/\lambda_0\mathrm{e}^{pt}\right) = 0.$$

Poslední výsledek lze interpretovat tak, že v uzavřené ekonomice s plynulým technologickým pokrokem klesá kapitálová náročnost jednotky produkce řádově rychleji, než technologická úroveň roste.

Základní dynamickou rovnici neoklasického modelu sestavili nezávisle na sobě Robert M. Solow a Trevor W. Swan jako rozšíření modelu produktivity kapitálu, který nezávisle vytvořili Sir Roy F. Harrod (v roce 1939) a Ewsey Domar (v roce 1946). Publikovali ji v článcích

SOLOW, R. M. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *Quaterly Journal of Economic.* 1956, vol. 70, No. 1 (February), p. 65–94.

SWAN, T. W. Economic Growth and Capital Accumulation. *Economic Record.* 1956, No. 32 (November), p. 334–361.

Robert Solow za rozpracování neoklasického modelu obdržel v roce 1987 Cenu Švédské národní banky za rozvoj ekonomické vědy na památku Alfreda Nobela (lidově zvanou Nobelova cena za ekonomii).

6.2 Epidemiologický model Daniela Bernoulliho

Uvažujme chorobu, která trvá krátce, někteří pacienti na ni zemřou, jiní se uzdraví a získají vůči nákaze imunitu; typickým představitelem takové infekce byly neštovice. Budeme modelovat epidemii této choroby, tj. její šíření v nějaké kohortě. Kohortou rozumíme skupinu osob narozených ve stejnou dobu.

Zavedeme označení: N počet osob tvořících kohortu, a jejich věk (tj. čas od počátku), $S = S(a)$, resp. $R = R(a)$ počet osob věku a, které neprodělaly, resp. prodělaly, chorobu. Další symboly zavedeme na základě následujících předpokladů:

- Počet osob věku a, které zemřou z jiných příčin, než je uvažovaná infekce, je úměrná délce (krátkého) časového intervalu sledování Δa a počtu nenakažených osob $S(a)$. Konstantu úměrnosti — *přirozenou úmrtnost* ve věku a — označíme $\mu(a)$.
- Počet osob věku a, které se nakazí uvažovanou chorobou je úměrná délce sledování Δa a počtu nenakažených osob $S(a)$. Konstantu úměrnosti — *incidenci choroby* ve věku a — označíme $\lambda(a)$
- Počet nemocných osob věku a, které se uzdraví za časový interval Δa je úměrný počtu infikovaných osob tohoto věku a délce intervalu Δa. Konstantu úměrnosti — *ukazatel přežití* choroby osobami věku a — označíme $s(a)$.

Úmrtnost $\mu(a)$ lze interpretovat jako pravděpodobnost, že „zdravá“ osoba (tj. ta, která nemá uvažovanou chorobu) věku a zemře během časového intervalu délky Δa; incidenci $\lambda(a)$ jako pravděpodobnost, že se „zdravá“ osoba věku a nakazí během časového intervalu délky Δa; ukazatel přežití $s(a)$ jako pravděpodobnost, že nakažená osoba věku a se během časového intervalu délky Δa uzdraví. Budeme předpokládat, že onemocnění a uzdravení jsou jevy nezávislé, tj. že pravděpodobnost, že „zdravá“ osoba se během časového intervalu délky Δa nakazí a uzdraví, je rovna $s(a)\lambda(a)$. Dále zavedeme *letalitu choroby* ve věku a vztahem

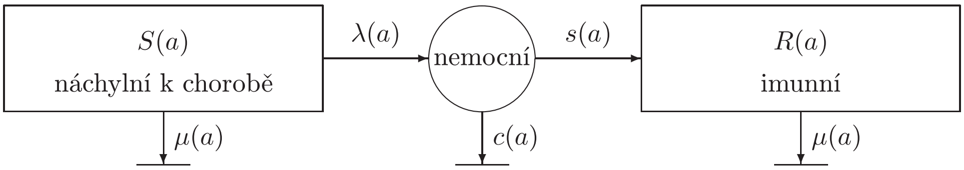
$$c(a) = 1 - s(a);$$

lze ji interpretovat jako pravděpodobnost, že nemocná osoba věku a během časového intervalu délky Δa zemře. Proměnné

$$u = u(a) = \frac{S(a)}{N}, \quad \text{resp. } w = w(a) = \frac{R(a)}{N}$$

vyjadřují (klasickou) pravděpodobnost, že osoba se dožila věku a a neprodělala, resp. prodělala, chorobu. Novorozenec určitě chorobu neprodělal, tedy platí

$$u(0) = 1, \quad w(0) = 0. \tag{6.42}$$



Obrázek 6.4: Schema vývoje kohorty ohrožené chorobou

Vývoj kohorty, v níž probíhá choroba, lze schematicky znázornit obrázkem 6.2 a předpoklady vyjádřit ve tvaru rovností:

$$S(a+\Delta a) = S(a) - \mu(a)S(a)\Delta a - \lambda(a)S(a)\Delta a = S(a) - \big(\mu(a)+\lambda(a)\big)S(a)\Delta a,$$

$$R(a+\Delta a) = R(a)+s(a)\lambda(a)S(a)\Delta a-\mu(a)R(a)\Delta a = R(a)+\big(1-c(a)\big)\lambda(a)S(a)\Delta a-\mu(a)R(a)\Delta a.$$

V první z uvedených rovností převedeme na levou stranu $S(a)$ a ve druhé z nich $R(a)$, rovnosti vydělíme výrazem $N\Delta a$ a provedeme limitní přechod $\Delta a \to 0$. Pro zjednodušení modelu budeme předpokládat, že funkce u a w jsou diferencovatelné; takový předpoklad je v případě velké kohorty dostatečně realistický. Dostaneme tak systém neautonomních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}a} &= -\big(\mu(a)+\lambda(a)\big)u, \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}a} &= -\big(1-c(a)\big)\lambda(a)u \ -\mu(a)w; \end{aligned} \tag{6.43}$$

jejich řešení splňuje počáteční podmínky (6.42).

První rovnice systému (6.43) je lineární homogenní rovnicí pro neznámou funkci u. Její řešení s počáteční podmínkou (6.42) je při označení

$$M(a) = \int_0^a \mu(\alpha)\mathrm{d}\alpha, \quad \Lambda(a) = \int_0^a \lambda(\alpha)\mathrm{d}\alpha \tag{6.44}$$

podle 2.6 rovno

$$u(a) = \mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)}. \tag{6.45}$$

Toto vyjádření dosadíme do druhé rovnice systému (6.43) a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}a} \ = \ -\mu(a)w - \big(1-c(a)\big)\lambda(a)\mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)},$$

což je lineární nehomogenní rovnice pro neznámou funkci w. Její řešení s počáteční podmínkou (6.42) je opět podle 2.6 rovno

$$w(a) = \mathrm{e}^{-M(a)}\left(1-\int_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha\right) - \mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)}. \tag{6.46}$$

Dosud provedené úvahy a výpočty lze shrnout: Pravděpodobnosti $u(a)$, resp. $w(a)$, že se osoba dožije věku a a neprodělá, resp. prodělá, chorobu, jsou řešením soustavy rovnic (6.43) s počátečními podmínkami (6.42) a jsou dány výrazy (6.45), resp. (6.46), kde funkce M a Λ jsou dány výrazy (6.44).

Pravděpodobnost, že se osoba dožije věku a za předpokladu, že choroba se v kohortě neobjevuje (tj. $\lambda \equiv 0$ a v důsledku toho také $\Lambda \equiv 0$), je rovna

$$\ell_0(a) = u(a) = \mathrm{e}^{-M(a)}.$$

Pravděpodobnost, že se osoba dožije věku a pokud se choroba vyskytuje, je rovna

$$\ell(a) = u(a) + w(a) = \mathrm{e}^{-M(a)} \left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \right) = \ell_0(a) \left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha \right).$$

Pravděpodobnost dožití věku a je tedy součinem pravděpodobnosti dožití věku a při přirozené úmrtnosti a faktoru, který závisí pouze na incidenci a letalitě choroby.

Označme dále

$$x(a) = \frac{u(a)}{\ell(a)}, \quad z(a) = \frac{w(a)}{\ell(a)} = \frac{\ell(a) - u(a)}{\ell(a)} = 1 - x(a);$$

Veličina $x(a)$, resp. $z(a)$, vyjadřuje podmíněnou pravděpodobnost, že osoba věku a neprodělala, resp. prodělala, chorobu za podmínky, že se věku a dožila.

Poněvadž

$$x(a) = \frac{\mathrm{e}^{-\Lambda(a)-M(a)}}{\mathrm{e}^{-M(a)}\left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha\right)} = \frac{\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}}{1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha},$$

platí rovnost $x(0) = 1$ a dále

$$\frac{\mathrm{d}x(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{-\lambda(a)\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}\left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha\right) + \mathrm{e}^{-\Lambda(a)}c(a)\lambda(a)\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}}{\left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha\right)^2} =$$

$$= -\lambda(a)\left(\frac{\mathrm{e}^{-\Lambda(a)}}{1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha} - \frac{c(a)\mathrm{e}^{-2\Lambda(a)}}{\left(1 - \int\limits_0^a c(\alpha)\lambda(\alpha)\mathrm{e}^{-\Lambda(\alpha)}\mathrm{d}\alpha\right)^2} \right) =$$

$$= -\lambda(a)x(a)\big(1 - c(a)x(a)\big).$$

Relativní zastoupení osob věku a, které v uvažované kohortě neprodělaly chorobu, je tedy veličina $x(a)$, která je řešením počáteční úlohy pro Bernoulliovu rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} = -\lambda(a)x\big(1 - c(a)x\big), \quad x(0) = 1.$$

6.3 Model populace produkující škodlivé odpady

Označme $N = N(t)$ velikost nějaké populace v čase t. *Specifická míra růstu* nebo *růstový koeficient* p této populace je definován jako relativní změna velikosti populace, tj.

$$p = \frac{N'}{N}.$$

Vývoj populace je tedy modelován diferenciální rovnicí

$$N' = pN. \tag{6.47}$$

V případě konstantního růstového koeficientu dostaneme klasický Malthusův[1] model růstu populace $N(t) = N_0\mathrm{e}^{pt}$, kde $N_0 = N(0)$ je počáteční velikost populace. V něm je exponenciální růst (pro $p > 0$) nebo úbytek (pro $p < 0$) velikosti populace nerealistický.

[1] Správněji malthusovský, Thomas Robert Malthus (1766–1834) model v takovém tvaru nikdy nepublikoval.

Model (6.47) se přiblíží realitě, pokud specifickou míru růstu p nebudeme považovat za nezávislou konstantu populace, ale za veličinu závislou na její velikosti, tedy $p = p(N)$, nebo obecněji na nějakých „projevech" její velikosti, tj. $p = p\big(\mathcal{F}(N)\big)$, kde $\mathcal{F}$ je nějaký funkcionál, tedy zobrazení z množiny funkcí do množiny reálných čísel.

V tomto oddílu budeme uvažovat populaci, která produkuje odpady svého metabolismu, které jsou toxické, nebo přinejmenším zmenšují schopnost přežívání populace. Tyto odpady se v prostředí hromadí, ale také rozkládají, mizí nebo přeměňují v něco, co populaci neomezuje. Budeme tedy předpokládat:

1. V čistém prostředí (bez uvažovaných odpadů) je specifická míra růstu rovna nějaké konstantě r (*vnitřnímu koeficientu růstu, intrinsic growth rate*).

2. V každém okamžiku populace produkuje odpad, jehož množství je úměrné velikosti populace. Množství odpadu vyprodukovaného v čase t označíme $P_p(t)$; platí pro něho $P_p(t) = cN(t)$, kde c je nějaká kladná konstanta.

3. Odpad se rozkládá konstantní relativní rychlostí $\delta > 0$, tj. označíme-li $P(t)$ množství odpadu v čase t a neuvažujeme jeho produkci, platí
$$P'(t) = -\delta P(t). \tag{6.48}$$

4. Specifická míra růstu populace klesá s rostoucím množstvím odpadu. Budeme uvažovat nejjednodušší možnost, že tato závislost je lineární.

5. Existuje jistá velikost populace $K > 0$, při které je populace se svým prostředím v dynamické rovnováze, její velikost se v čase nemění. Konstanta K představuje *kapacitu prostředí* (*úživnost*) pro uvažovanou populaci.

Uvažujme na chvíli idealizovanou situaci, že pouze v čase s vzniklo množství $P_p(s)$ odpadu a žádný další odpad není do prostředí dodáván. Množství odpadu v čase $t > s$ tedy bude podle předpokladů 2. a 3. řešením rovnice (6.48) s počáteční podmínkou $P(s) = P_p(s) = cN(s)$, tj. $P(t) = cN(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}$. V reálné situaci se však odpad v prostředí kumuluje, v čase t ho tedy bude množství, které zůstalo ze všech odpadů vzniklých až do okamžiku t, tj. množství odpadu závislé na celé předchozí historii velikosti populace bude
$$\mathcal{F}(N) = \int_{-\infty}^{t} cN(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s.$$

Předpoklad 4. lze nyní přepsat ve tvaru
$$p = p\big(\mathcal{F}(N)\big) = \alpha - \beta\mathcal{F}(N),$$
kde $\beta > 0$. Z předpokladu 1. plyne, že $p(0) = r$, tj. $\alpha = r$. Pro funkci $\tilde{N} = \tilde{N}(t) \equiv K$ podle předpokladu 5. nyní platí
$$0 = p\big(\mathcal{F}(\tilde{N})\big) = r - \beta\mathcal{F}(\tilde{N}) = r - \beta c\int_{-\infty}^{t} K\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s = r - \frac{\beta cK}{\delta}\left[\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\right]_{s=-\infty}^{t} = r - \frac{\beta cK}{\delta}.$$

Odtud dostaneme, že $\beta c = \dfrac{r\delta}{K}$ a specifická míra růstu populace je
$$p = r\left(1 - \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{t} N(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s\right).$$

Model (6.47) je tedy nyní ve tvaru integrodiferenciální[2] rovnice

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{t} N(s)\mathrm{e}^{-\delta(t-s)}\mathrm{d}s\right). \tag{6.49}$$

Zavedeme nové neznámé funkce x a y nové nezávisle proměnné τ následujícími vztahy:

$$x(\tau) = \frac{\delta}{rK}N\left(\frac{\tau}{r}\right), \quad y(\tau) = \frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s.$$

Pak

$$x'(\tau) = \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\delta}{rK}N'\left(\frac{\tau}{r}\right)\frac{1}{r} = \frac{\delta}{r^2K}rN\left(\frac{\tau}{r}\right)\left(1 - \frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \frac{\delta}{rK}\frac{rK}{\delta}x(\tau)\left(1 - \frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s\right) = x(\tau)\big(1-y(\tau)\big),$$

$$y'(\tau) = \frac{\mathrm{d}y(\tau)}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\delta}{K}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{\delta}{K}\left(\frac{1}{r}N\left(\frac{\tau}{r}\right)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-\frac{\tau}{r}\right)} - \frac{\delta}{r}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s\right) =$$

$$= \frac{\delta}{rK}N\left(\frac{\tau}{r}\right) - \frac{\delta}{r}\frac{\delta}{K}\int\limits_{-\infty}^{\frac{\tau}{r}} N(s)\mathrm{e}^{-\delta\left(\frac{\tau}{r}-s\right)}\mathrm{d}s = x(\tau) - \frac{\delta}{r}y(\tau).$$

Rovnice (6.49) se tedy transformuje na dvourozměrný autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= x(1-y), \\ y' &= x - \frac{\delta}{r}y. \end{aligned} \tag{6.50}$$

Nejprve si všimněme, že uzavřený první kvadrant $\bar{\mathbb{R}}^2_+ = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\, x \geq 0, y \geq 0\big\}$ je pozitivně invariantní množinou tohoto systému. Uzavřená polopřímka $\{(0,y) : y \geq 0\}$ je totiž pozitivně invariantní množinou ($x(t) \equiv 0$, $y(t) = y_0\mathrm{e}^{-(\delta/r)t}$ je řešením systému (6.50) pro každé $y_0 \geq 0$), pro řešení s počáteční podmínkou $x(0) = x_0 > 0$, $y(0) = 0$ platí $x'(0) > 0$, $y'(0) > 0$ a tedy příslušná trajektorie směřuje dovnitř prvního kvadrantu.

Systém (6.50) má stacionární body$(0,0)$ a $(x^*, y^*) = \left(\dfrac{\delta}{r}, 1\right)$ a jeho variační matice je

$$\mathsf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ 1 & -\dfrac{\delta}{r} \end{pmatrix}.$$

[2] V této rovnici vystupuje neznámá funkce N za znakem integrálu i jako derivovaná.

Tedy $\mathsf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{\delta}{r} \end{pmatrix}$, $\det \mathsf{J}(0,0) = -\frac{\delta}{r} > 0$, takže stacionární bod $(0,0)$ je sedlo. Dále

$$\mathsf{J}(x^*,y^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\delta}{r} \\ 1 & -\frac{\delta}{r} \end{pmatrix}, \quad \det \mathsf{J}(x^*,y^*) = \frac{\delta}{r} > 0, \quad \operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*,y^*) = -\frac{\delta}{r} < 0,$$

$$\big(\operatorname{tr} \mathsf{J}(x^*,y^*)\big)^2 - 4 \det \mathsf{J}(x^*,y^*) = \frac{\delta}{r^2}(\delta - 4r),$$

takže v případě $\delta \geq 4r$ je vnitřní stacionární bod (x^*,y^*) stabilní uzel, v opačném případě se jedná o stabilní ohnisko.

S využitím Dulacova kriteria 5.2.6 vyloučíme existenci cyklu v prvním kvadrantu. Položíme $q(x,y) = \frac{1}{x}$. Pak

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{x}x(1-y) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{x}\left(x - \frac{\delta}{r}y\right) = -\frac{\delta}{rx} < 0$$

pro všechna $x > 0$. Uvnitř prvního kvadrantu tedy neexistuje cyklus systému (6.50).

Uvažujme nyní situaci, že na počátku (v čase $t = 0$) se dostane malá populace do nového prostředí. K rovnici (6.49) přidáme tedy počáteční podmínky

$$N(0) = N_0, \qquad N(t) = 0 \text{ pro } t < 0. \tag{6.51}$$

Počáteční podmínky pro systém (6.50) v tomto případě budou

$$x(0) = \frac{\delta}{rK}N_0, \qquad y(0) = \frac{\delta}{K}\int_{-\infty}^{0} N(s)\mathrm{e}^{\delta s}\mathrm{d}s = 0$$

a z analýzy systému (6.50) plyne, že pro řešení N počáteční úlohy (6.49), (6.51) platí

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \frac{rK}{\delta}x^* = K;$$

funkce N konverguje k hodnotě K v případě $\delta \geq 4r$ monotonně, v opačném případě s tlumenými oscilacemi.

6.4 Lotkovy-Volterrovy systémy

$$x_i' = x_i\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right), \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{6.52}$$

Tyto systémy modelují vývoj společenstva (časové změny velikostí jednotlivých populací, z nichž se společenstvo skládá). Neznámé funkce a parametry interpretujeme následovně:

$x_i = x_i(t)$ . . . velikost i-té populace

b_i . . . růstový koeficient izolované i-té populace (vnitřní koeficient růstu i-té populace)

- $b_i > 0$ . . . i-tá populace je soběstačná (producent)
- $b_i \leq 0$ . . . i-tá populace závisí na jiných populacích (konzument)

a_{ii} . . . koeficient vnitrodruhových vztahů i-té populace

- $a_{ii} > 0$ . . . v i-té populaci se projevuje vnitrodruhová konkurence

$a_{ii} < 0 \ldots$ v i-té populaci se projevuje vnitrodruhová kooperace

$a_{ij} \ldots$ koeficient vlivu j-té populace na i-tou

$\min\{a_{ij}, a_{ji}\} > 0 \ldots i$-tá a j-tá populace jsou ve vztahu konkurence

$\max\{a_{ij}, a_{ji}\} < 0 \ldots i$-tá a j-tá populace jsou ve vztahu mutualismu (symbiózy)

$a_{ij} < 0 < a_{ji} \ldots j$-tá populace je kořistí (hostitelem) i-té populace;
i-tá populace je predátorem (parazitem) j-té populace

$a_{ij} > 0 \ldots j$-tá populace je amenzalistou i-té populace

$a_{ij} < 0 \ldots j$-tá populace je komenzalistou i-té populace

Fázový prostor systému (6.52) je n-rozměrný uzavřený kladný orthant

$$\bar{\mathbb{R}}_+^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0\}.$$

6.4.1 Příklad (Vztah Lotkových-Volterrových systémů a Verhulstovy logistické rovnice)

Logistickou rovnici

$$x' = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

v níž jsou oba parametry r (vnitřní koeficient růstu) a K (kapacita prostředí pro modelovanou populaci) kladné, lze považovat za jednorozměrný Lotkův-Volterrův systém s $b_1 = r$ a $a_{11} = r/K$, tedy za model soběstačné populace s vnitrodruhovou konkurencí (tak byla Verhulstova rovnice sestavena). Také platí $K = b_1/a_{11}$; odtud lze usoudit, že pro soběstačnou populaci s vnitrodruhovou konkurencí představuje podíl vnitřního koeficientu růstu a koeficientu vnitrodruhové konkurence kapacitu prostředí neovlivněnou ostatními populacemi společenstva.

Jinou interpretaci logistické rovnice lze získat následující úvahou: Označme

$$y = 1 - \frac{x}{K} = \frac{K - x}{K}.$$

Poněvadž $y' = -x'/K$, dostaneme

$$\begin{aligned} x' &= rxy \\ y' &= -\frac{r}{K}xy. \end{aligned} \tag{6.53}$$

Jedná se o dvojrozměrný Lotkův-Volterrův systém s parametry

$$b_1 = b_2 = 0, \quad a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} = r, \quad a_{21} = -\frac{r}{K}.$$

Proměnnou y lze interpretovat jako relativní dostupnost zdrojů pro modelovanou populaci vzhledem k celkové kapacitě prostředí K. Velikost populace a relativní dostupnost zdrojů jsou tedy ve vztahu predace, obě tyto „složky společenstva“ nejsou ani producenty ani konzumenty a neprojevuje se u nich žádný vnitrodruhový vztah.

Poznamenejme, že systém (6.53) nemá izolované stacionární body. □

6.4.2 Příklad (dissipativita konkurenčních systémů)

Uvažujme společenstvo n soběstačných populací, z nichž každá projevuje vnitrodruhovou konkurenci a každá z populací je amenzalistou jiné nebo ji neovlivňuje (zejména tedy každé dvě populace mohou být ve vztahu konkurence). Vývoj takového společenstva lze modelovat systémem (6.52) s kladnými parametry b_i, a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ a snezápornými parametry a_{ij} pro $i \neq j$. S využitím tvrzení 5.1.10 ukážeme, že takový systém je dissipativní, tedy že všechny složky jeho řešení jsou ohraničené:

Nechť $\varepsilon > 0$ a $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jsou libovolná. Položme

$$K_i = \frac{b_i}{a_{ii}} + \varepsilon, \qquad \delta_i = \varepsilon a_{ii}.$$

Pak $K_i > 0$, $\delta_i > 0$ a pro všechna $x_j \geq K_j$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \leq x_i(b_i - a_{ii}x_i) \leq x_i(b_i - a_{ii}K_i) = x_i a_{ii} \left(\frac{b_i}{a_{ii}} - K_i \right) =$$
$$= x_i a_{ii}(K_i - \varepsilon - K_i) = -\varepsilon x_i a_{ii} = -\delta_i x_i,$$

takže předpoklady třetího z tvrzení 5.1.10 jsou splněny.

Poněvadž kladná konstanta ε je libovolně malá, pro každé řešení $\boldsymbol{x}(\,\cdot\,) = \big(x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots, x_n(\cdot)\big)$ systému (6.52) s $b_i > 0, a_{ii} > 0, a_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ existuje $T \geq 0$ takové, že pro všechna $t \geq T$ je

$$x_1(t) \leq \frac{b_1}{a_{11}},\ x_2(t) \leq \frac{b_2}{a_{22}},\ \dots,\ x_n(t) \leq \frac{b_n}{a_{nn}}.$$

V dlouhém časovém horizontu populace nepřekračují velikost danou kapacitou prostředí pro populace izolované. □

Zavedeme označení

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

matice A se nazývá *matice interakcí společenstva*. Pro libovolný vektor $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ položíme

$$\operatorname{diag} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & v_n \end{pmatrix}$$

a vektory ze standardní orthonormální báze n-rozměrného vektorového prostoru označíme $\boldsymbol{e}^j$,

$$\boldsymbol{e}^j = \begin{pmatrix} \delta_{1,j} \\ \delta_{2,j} \\ \vdots \\ \delta_{n,j} \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \text{ je Kroneckerův symbol.}$$

Systém (6.52) lze zapsat jako vektorovou rovnici

$$\boldsymbol{x}' = \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{b} - \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x})\,. \tag{6.54}$$

Je-li matice A regulární, existuje nejvýše jeden stacionární bod $\boldsymbol{x}^* = \mathsf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$ systému (6.52) takový, že všechny jeho složky jsou kladné. Takový stacionární bod budeme nazývat *vnitřní*. Pokud vnitřní stacionární bod existuje, lze tuto skutečnost interpretovat jako možnou koexistenci všech populací společenstva, přičemž koexistující populace mají dynamicky stálé velikosti dané složkami vektoru $\boldsymbol{x}^*$.

6.4.3 Příklad (Společenstvo se dvěma trofickými úrovněmi)

Uvažujme společenstvo tvořené dvěma skupinami druhů — producenty (kořistí) a konzumenty (predátory). Mezi druhy uvnitř jednotlivých trofických úrovní nejsou žádné interakce a konzumenti nemohou bez producentů přežít. Je-li takové společenstvo tvořeno n druhy producentů a m druhy konzumentů, lze jeho vývoj popsat systémem Lotkových-Volterrových rovnic tvaru

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i \left(r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ y_j' &= y_j \left(-s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \right), \quad j = 1, 2, \ldots, m; \end{aligned} \tag{6.55}$$

x_i označuje velikost i-tého druhu producentů, y_j velikost j-tého druhu konzumentů, parametry r_i, s_j, a_{ij}, b_{ji} jsou kladné. Systém (6.55) můžeme při zavedení vektorů $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m)^T$, $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)^T$, $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m)^T$, a matic

$$\mathsf{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = (b_{ji})_{\substack{1 \le j \le m \\ 1 \le i \le n}} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

zapsat vektorově

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}' &= \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{r} - \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{y}), \\ \boldsymbol{y}' &= \operatorname{diag} \boldsymbol{y} \cdot (-\boldsymbol{s} + \mathsf{B} \cdot \boldsymbol{x}). \end{aligned}$$

Stavové proměnné x_i, y_j transformujeme na nové, které označíme u_i, v_j a definujeme rovnostmi

$$u_i = \ln x_i, \quad v_j = \ln y_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, m.$$

Pak

$$u_i' = \frac{x_i'}{x_i} = r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k = r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \mathrm{e}^{v_k}$$

a podobně

$$v_j' = -s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \mathrm{e}^{u_k}.$$

Zavedeme-li zobrazení $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_m)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vztahy

$$\begin{aligned} f_i(\boldsymbol{v}) &= f_i(v_1, v_2, \ldots, v_m) = r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \mathrm{e}^{v_k}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \\ g_j(\boldsymbol{v}) &= g_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) = -s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} \mathrm{e}^{u_k}, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \end{aligned}$$

můžeme transformovaný systém (6.55) zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} u_i' &= f_i(v_i, v_2, \ldots, v_m), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ v_j' &= g_j(u_i, u_2, \ldots, u_n), \quad j = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}$$

nebo vektorově

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}), \qquad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u});$$

derivace první sady proměnných závisí pouze na druhé sadě, derivace druhé sady proměnných závisí pouze na první sadě. Systémy tohoto tvaru se nazývají *bipartitní.*

Hodnota a_{ij} vyjadřuje množství i-tého druhu kořisti, kterou za jednotku času zničí predátoři j-tého druhu za předpokladu, že populace i-tého druhu kořisti i j-tého druhu predátora měly jednotkovou velikost. Stručněji, a_{ij} je specifická úmrtnost i-tého druhu kořisti způsobená populací

j-tého druhu predátora o jednotkové velikosti. Hodnota b_{ji} je specifická porodnost j-tého druhu predátora po konzumaci jednotkového množství populace i-tého druhu kořisti. Poměr b_{ji}/a_{ij} lze tedy chápat jako efektivitu, s jakou se úbytek i-tého druhu kořisti přeměňuje do růstu populace j-tého druhu predátora. Předpokládejme nyní, že každý druh predátora využívá všechny druhy kořisti stejně efektivně, tj. že ke každému $j = 1, 2, \dots, m$ existuje konstanta $c_j > 0$ taková, že

$$\frac{b_{ji}}{a_{ij}} = c_j \quad \text{pro všechny indexy } i = 1, 2, \dots, n.$$

Jinak řečeno, nechť existuje vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \dots, c_m)^T$ pro nějž platí

$$\mathsf{B}^T = \mathsf{A} \cdot \operatorname{diag} \boldsymbol{c}, \quad \text{neboli} \quad \mathsf{B} = \operatorname{diag} \boldsymbol{c} \cdot \mathsf{A}^T.$$

Předpokládejme dále, že existuje vnitřní stacionární bod systému (6.55), tj. existují vektory $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \dots, q_m)^T$ se všemi složkami kladnými, takové že $\mathsf{A} \cdot \boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}$, $\mathsf{B} \cdot \boldsymbol{p} = \boldsymbol{s}$, tj.

$$r_i = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} q_k \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n, \qquad s_j = \sum_{k=1}^{n} b_{jk} p_k \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, m.$$

(Poznamenejme, že v případě $m \neq n$ nemusí být některý z vektorů $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ určen jednoznačně.) Definujme nyní funkci $H : \mathbb{R}_+^{n+m} \to \mathbb{R}$ předpisem

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = H(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} (p_i \ln x_i - x_i) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} (q_j \ln y_j - y_j).$$

Pokud $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ jsou řešením systému (6.55), která mají všechny složky v každém čase kladné, pak platí

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \frac{x_i'}{x_i} - x_i' \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} \left(q_j \frac{y_j'}{y_j} - y_j' \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (p_i - x_i) \left(r_i - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} \left(-s_j + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \right) (q_j - y_j) = \\
= \sum_{i=1}^{n} (p_i - x_i) &\left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} q_k - \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k \right) + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{c_j} \left(- \sum_{k=1}^{n} b_{jk} p_k + \sum_{k=1}^{n} b_{jk} x_k \right) (q_j - y_j) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} (p_i - x_i) a_{ik} (q_k - yk) - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (p_k - x_k) \frac{b_{jk}}{c_j} (q_j - y_j) = 0,
\end{aligned}$$

neboť $b_{jk}/c_j = a_{kj}$. Jinak řečeno, funkce H je na trajektoriích systému (6.55) konstantní, funkce H je *invariantem* tohoto systému. □

Parciální derivace pravé strany rovnice (6.54) podle j-té proměnné je

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{b} - \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \right) \cdot (\boldsymbol{b} - \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x}) + \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} (\boldsymbol{b} - \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x}) \right) = \\
&= \operatorname{diag} \boldsymbol{e}^j \, (\boldsymbol{b} - \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x}) + \operatorname{diag} \boldsymbol{x} \cdot \left(-\mathsf{A} \cdot \boldsymbol{e}^j \right)
\end{aligned}$$

a pro vnitřní stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ platí $\boldsymbol{b} - \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x}^* = \mathsf{O}$. Proto variační matice systému (6.52) ve vnitřním stacionárním bodě $\boldsymbol{x}^*$ je

$$\mathsf{J}(\boldsymbol{x}^*) = -\operatorname{diag} \boldsymbol{x}^* \cdot \mathsf{A}.$$

Odtud a z 5.3.8 plyne:

6.4.4 Věta

Buď $\boldsymbol{x}^*$ stacionární bod systému (6.52), jehož všechny složky jsou nenulové. Mají-li všechna vlastní čísla matice $\operatorname{diag}\boldsymbol{x}^* \cdot \mathsf{A}$ kladnou reálnou část, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (6.52) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

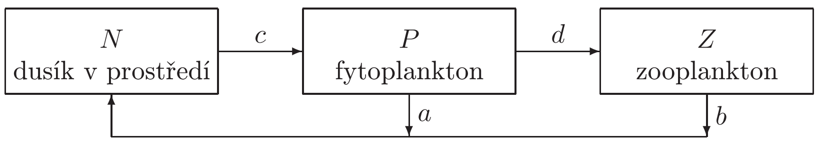
Pokud existuje vlastní číslo matice $\operatorname{diag}\boldsymbol{x}^* \cdot \mathsf{A}$ které má zápornou reálnou část, pak je konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (6.52) nestabilní.

6.4.5 Příklad (koloběh dusíku v planktonu)

Uvažujme proces schématicky znázorněný na obrázku 6.5: Ve fytoplanktonu probíhá fotosyntéza a při ní se dusík z okolního prostředí váže v jeho buňkách; fytoplankton slouží jako potrava pro zooplankton, takže dusík ze zkonzumovaného fytoplanktonu se stává součástí zooplanktonu. Plankton v důsledku svého metabolismu dusík opět vylučuje do okolního prostředí a také při rozkladu mrtvého planktonu se dusík uvolňuje. Dusík z prostředí není odebírán ani není nějakým způsobem do něho přidáván. Dusíku vylučovaného planktonem je tím více, čím je více planktonu, dusíku vázaného ve fytoplanktonu přibývá tím více, čím je více volného dusíku a fytoplanktonu; dusíku vázaného v zooplanktonu přibývá tím více, čím více je fytoplanktonu pozřeného zooplanktonem a toho je tím více, čím více je fytoplanktonu i zooplanktonu. Označme po řadě N, P a Z množství dusíku v prostředí, vázaného ve fytoplanktonu a vázaného v zooplanktonu. Všechny tyto veličiny se mění s časem, tj. $N = N(t)$, $P = P(t)$ a $Z = Z(t)$. Celkové množství dusíku v systému je rovno $V = N + P + Z$. Koloběh dusíku lze nejjednodušeji modelovat systémem rovnic

$$\begin{aligned} N' &= aP + bZ - cNP, \\ P' &= cNP - dPZ - aP, \\ Z' &= dPZ - bZ; \end{aligned}$$

všechny parametry a, b, c, d jsou kladné.



Obrázek 6.5: Schéma koloběhu dusíku

Nejprve si všimněme, že $V' = N' + P' + Z' = 0$, což znamená, že celkové množství dusíku V je konstantní. Proto lze množství dusíku v prostředí vyjádřit jako $N(t) = V - P(t) - Z(t)$ a dosadit do druhé a třetí rovnice systému. Dostaneme

$$\begin{aligned} P' &= (Vc - a)P - cP^2 - (c + d)PZ = P\big(Vc - a - cP - (c + d)Z\big), \\ Z' &= -bZ + dPZ \qquad\qquad\qquad\quad\; = Z\big(-b + dP\big). \end{aligned} \tag{6.56}$$

Jedná se tedy o Lotkův-Volterrův systém s vektorem růstových koeficientů a maticí interakcí

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} Vc - a \\ -b \end{pmatrix} \qquad \text{a} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} c & -(c+d) \\ d & 0 \end{pmatrix}.$$

Vnitřní stacionární bod systému je tedy

$$\begin{pmatrix} P^* \\ Z^* \end{pmatrix} = \mathsf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b} = \frac{1}{d(c+d)} \begin{pmatrix} 0 & -(c+d) \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Vc - a \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{b}{d} \\ \dfrac{c}{c+d}\left(V - \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}\right) \end{pmatrix}.$$

Povšimněme si, že stacionární hodnota P^* je kladná a nezávisí na celkovém množství dusíku V. Pokud se zvětší přísun živin, nemá z toho užitek fytoplankton, ale jeho predátor zooplankton.

Pokud
$$V > \frac{a}{c} + \frac{b}{d}, \tag{6.57}$$
pak $Z^* > 0$; v takovém případě je tedy možná koexistence fyto i zooplanktonu. Dále platí
$$\mathsf{J}(P^*, Z^*) = -\begin{pmatrix} \dfrac{b}{d} \\ \dfrac{c}{c+d}\left(V - \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}\right)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -(c+d) \\ d & c \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{b(c+d)}{d} \\ -\dfrac{cd}{c+d}\left(V - \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}\right) & -\dfrac{c^2}{c+d}\left(V - \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{d}\right)\end{pmatrix}.$$
Je-li splněna podmínka (6.57), pak
$$\operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(P^*, Z^*)\right) = -\frac{c^2}{c+d}\left(V - \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right) < 0, \quad \det\left(\mathsf{J}(P^*, Z^*)\right) = bc\left(V - \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right) > 0,$$
což znamená, že reálná část vlastních čísel variační matice $\mathsf{J}(P^*, Z^*)$ je záporná, a tedy vnitřní stacionární řešení (P^*, Z^*) systému (6.56) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Systém (6.56) má další stacionární body
$$\boldsymbol{s}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} V - \dfrac{a}{c} \\ 0 \end{pmatrix},$$
jeho variační matice v obecném bodě je
$$\mathsf{J}(P, Z) = \begin{pmatrix} Vc - a - 2cP - (c+d)Z & -(c+d)P \\ dZ & -b + dP \end{pmatrix},$$
tedy
$$\mathsf{J}(\boldsymbol{s}_0) = \begin{pmatrix} Vc - a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s}_0)\right) = c\left(V - \frac{a}{c}\right) - b, \quad \det\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s}_0)\right) = -bc\left(V - \frac{a}{c}\right),$$
$$\mathsf{J}(\boldsymbol{s}_1) = \begin{pmatrix} -c\left(V - \frac{a}{c}\right) & -(c+d)\left(V - \frac{a}{c}\right) \\ 0 & d\left(V - \frac{a}{c}\right) - b \end{pmatrix},$$
$$\operatorname{tr}\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s}_1)\right) = d\left(V - \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right) - c\left(V - \frac{a}{c}\right), \quad \det\left(\mathsf{J}(\boldsymbol{s}_1)\right) = -cd\left(V - \frac{a}{c}\right)\left(V - \frac{a}{c} - \frac{b}{d}\right).$$
Odtud je vidět, že pokud $V < a/c$, pak $\boldsymbol{s}_0$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní, pokud
$$V > \frac{a}{c} \tag{6.58}$$
a současně $V < a/c + b/d$, pak $\boldsymbol{s}_0$ je sedlo a $\boldsymbol{s}_1$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní. Pokud platí nerovnost (6.57), pak $\boldsymbol{s}_0$ i $\boldsymbol{s}_1$ jsou sedla.

Z dosud provedených úvah a výpočtů lze učinit závěr: je-li v prostředí dusíku málo (méně než a/c), plankton nepřežívá; je-li dusíku více, ale ne příliš mnoho (něco mezi a/c a $a/c + b/d$), přežívá fytoplankton, ale nikoliv zooplankton; je-li dusíku v prostředí dostatek (více než $a/c + b/d$), přežívá fyto i zooplankton.

Nerovnosti (6.58) a (6.57) lze přepsat na tvar
$$c > \frac{a}{V} \quad \text{a} \quad c > \frac{ad}{Vd - b} = \frac{a}{V} \Big/ \left(1 - \frac{b}{Vd}\right).$$
Koeficient c vyjadřuje, s jakou intenzitou je dusík z prostředí vázán do biomasy fytoplanktonu, což je proces fotosyntézy. Její intenzita roste s množstvím slunečního světla a to se mění s ročním obdobím. Dosažené výsledky lze tedy také interpretovat: v zimě se plankton nevyskytuje, na jaře se nejprve objeví fytoplankton a s přibýváním světla i zooplankton. □

6.4.6 Poznámka

Pro čtvercovou matici M položme $\mathcal{S}\mathsf{M} = \frac{1}{2}\left(\mathsf{M} + \mathsf{M}^T\right)$. Matice $\mathcal{S}\mathsf{M}$ je zřejmě symetrická.

Pro každý n-rozměrný vektor $\boldsymbol{v}$ a čtvercovou matici M řádu n platí

$$\boldsymbol{v}^T \cdot \mathsf{M} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T \cdot \mathcal{S}\mathsf{M} \cdot \boldsymbol{v}.$$

D.: Poněvadž $\boldsymbol{v}^T \cdot \mathsf{M} \cdot \boldsymbol{v}$ je číslo, tj. čtvercová matice řádu 1, platí

$$\boldsymbol{v}^T \cdot \mathsf{M} \cdot \boldsymbol{v} = \left(\boldsymbol{v}^T \cdot \mathsf{M} \cdot \boldsymbol{v}\right)^T = \boldsymbol{v}^T \cdot \mathsf{M}^T \cdot \boldsymbol{v}$$

a odtud plyne

$$\boldsymbol{v}^T \cdot \mathsf{M} \cdot \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}^T \cdot \left(\frac{1}{2}(\mathsf{M} + \mathsf{M}^T) - \frac{1}{2}\mathsf{M}^T\right) \cdot \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}^T \cdot \mathcal{S}\mathsf{M} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^T \cdot \mathsf{M}^T \cdot \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}^T \cdot \mathcal{S}\mathsf{M} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}^T \cdot \mathsf{M} \cdot \boldsymbol{v}$$

a tato rovnost je již ekvivalentní s dokazovaným vztahem. □

6.4.7 Věta

Buď $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \mathsf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}$ vnitřní stacionární bod systému (6.52). Jestliže existuje konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ se všemi složkami kladnými a existuje okolí U bodu $\boldsymbol{x}^*$ takové, že pro všechna $\boldsymbol{x} \in U$ je výraz

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*)^T \cdot \mathcal{S}(\operatorname{diag} \boldsymbol{c} \cdot \mathsf{A}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \tag{6.59}$$

nezáporný, pak funkce

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{\xi - x_i^*}{\xi} \mathrm{d}\xi$$

je ljapunovskou funkcí systému (6.52), tj. konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (6.52) je stejnoměrně stabilní.

Pokud je výraz (6.59) pro všechna $\boldsymbol{x} \in U \setminus \{\boldsymbol{x}^*\}$ kladný, pak je toto řešení stejnoměrně asymptoticky stabilní.

D.: Funkce V je definována pro všechna $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$. Platí

$$V(\boldsymbol{x}^*) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_i^*}^{x_i^*} \frac{\xi - x_i^*}{\xi} \mathrm{d}\xi = 0.$$

Pro každé $x_i > 0$ je

$$\int_{x_i^*}^{x_i} \frac{\xi - x_i^*}{\xi} \mathrm{d}\xi \geq 0,$$

neboť integrovaná funkce je kladná pro $x_i > x_i^*$ (tj. v případě, že horní mez integrálu je větší, než dolní mez) a záporná pro $x_i < x_i^*$ (horní mez integrálu menší než dolní mez). Rovnost nastane právě tehdy, když $x_i = x_i^*$. Odtud plyne, že pro $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^*$ a takové, že všechny jeho složky jsou kladné, platí $V(\boldsymbol{x}) > 0$.

Dále podle věty o derivaci integrálu jako funkce horní meze platí

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = c_i \frac{x_i - x_i^*}{x_i},$$

a poněvadž $\boldsymbol{b} = \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{x}^*$, platí dále

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*,$$

takže derivace funkce V vzhledem k systému (6.52) je

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{x_i - x_i^*}{x_i} x_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(x_i - x_i^* \right) \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) =$$
$$= - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(x_i - x_i^* \right) c_i a_{ij} \left(x_j - x_j^* \right) = - \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \right)^T \cdot (\operatorname{diag} \boldsymbol{c} \cdot \mathsf{A}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) =$$
$$= - \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \right)^T \cdot \mathcal{S} \left(\operatorname{diag} \boldsymbol{c} \cdot \mathsf{A} \right) \cdot \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^* \right)$$

(poslední rovnost plyne z poznámky 6.4.6). Věta nyní plyne z 5.3.11 a 5.3.12. □

6.4.8 Důsledek

Nechť systém (6.52) má vnitřní stacionární bod $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$.

Jestliže existuje konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ se všemi složkami kladnými takový, že matice

$$\mathcal{S} \left(\operatorname{diag} \boldsymbol{c} \cdot \mathsf{A} \right) \tag{6.60}$$

je pozitivně semidefinitní, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (6.52) je stejnoměrně stabilní.

Pokud je matice (6.60) pozitivně definitní, pak konstantní řešení $\boldsymbol{x}(t) \equiv \boldsymbol{x}^*$ systému (6.52) je stejnoměrně asymptoticky stabilní.

6.4.9 Příklad (trofický řetězec)

Trofický řetězec je takové společenstvo, v němž je první druh producentem a každý jiný druh je nesoběstačným specializovaným predátorem právě jednoho dalšího druhu. Označíme x_1 velikost populace producenta, x_2 velikost populace jeho predátora, x_3 velikost populace, která je predátorem populace o velikosti x_2, atd. Každá z populací na některé trofické úrovni nemusí být tvořena jedním biologickým druhem, může jít o společenstvo organismů majících stejný způsob obživy. Trofický řetěz o n úrovních lze tedy modelovat systémem

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_1(r - a x_1) - p_1 x_1 x_2 \\
x_2' &= -d_2 x_2 + q_2 x_1 x_2 - p_2 x_2 x_3 \\
&\vdots \\
x_k' &= -d_k x_k + q_k x_{k-1} x_k - p_k x_k x_{k+1} \\
&\vdots \\
x_{n-1}' &= -d_{n-1} x_{n-1} + q_{n-1} x_{n-2} x_{n-1} - p_{n-1} x_{n-1} x_n \\
x_n' &= -d_n x_n + q_n x_{n-1} x_n,
\end{aligned} \tag{6.61}$$

parametry r, $d_2, d_3, \ldots, d_n$, $q_2, q_3, \ldots, q_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ jsou kladné, parametr a je nezáporný (producent může, ale nemusí projevovat vnitrodruhovou konkurenci).

V tomto případě je

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -q_2 & 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -q_{n-1} & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -q_n & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} r \\ -d_2 \\ -d_3 \\ \vdots \\ -d_{n-1} \\ -d_n \end{pmatrix}.$$

Položme

$$c_1 = 1,\ c_2 = \frac{p_1}{q_2},\ c_3 = \frac{p_1 p_2}{q_2 q_3},\ \ldots,\ c_{n-1} = \frac{p_1 p_2 \cdots p_{n-2}}{q_2 q_3 \cdots q_{n-1}},\ c_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}{q_2 q_3 \cdots q_n}.$$

Pak je

$$\operatorname{diag} \boldsymbol{c} \cdot \mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -p_1 & 0 & \dfrac{p_1 p_2}{q_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{p_1 p_2}{q_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{p_1 p_2 \cdots p_{n-2}}{q_2 q_3 \cdots q_{n-2}} & 0 & \dfrac{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}{q_2 q_3 \cdots q_{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{p_1 p_2 \cdots p_{n-1}}{q_2 q_3 \cdots q_{n-1}} & 0 \end{pmatrix},$$

takže

$$\mathcal{S}\left(\operatorname{diag} \boldsymbol{c} \cdot \mathsf{A}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

z čehož plyne

$$\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\right)^T \cdot \mathcal{S}(\operatorname{diag} \boldsymbol{c} \cdot \mathsf{A}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) = a(x_1 - x_1^*)^2 \geq 0.$$

Pokud existuje vnitřní stacionární bod $\boldsymbol{x}^*$ uvažovaného systému, pak je příslušné konstantní řešení stejnoměrně stabilní.

Hledejme nyní podmínky, které zaručí existenci takového stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$. Jeho souřadnice splňují n-rozměrný systém algebraických rovnic

$$\begin{aligned} a x_1^* + p_1 x_2^* &= r, \\ q_k x_{k-1}^* - p_k x_{k+1}^* &= d_k, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1. \\ q_n x_{n-1}^* &= d_n. \end{aligned} \tag{6.62}$$

„Prostřední“ rovnice tohoto systému lze přepsat ve tvaru rekurentních formulí

$$x_{k-1}^* = \frac{1}{q_k}\left(p_k x_{k+1}^* + d_k\right) \quad \text{nebo} \quad x_{k+1}^* = \frac{1}{p_k}\left(q_k x_{k-1}^* - d_k\right), \quad k = 2, 3, \ldots, n-1. \tag{6.63}$$

Poněvadž všechny koeficienty p_k, q_k, d_k jsou kladné, plyne z tohoto vyjádření:

(i) je-li $x_{\ell_0}^* > 0$ pro nějaké $l_0 \in \{2, 3, \ldots, n\}$,

$$\text{pak je } x_\ell^* > 0 \text{ pro všechna } \ell \in \left\{\ell_0, \ell_0 - 2, \ell_0 - 4, \ldots, \frac{1}{2}\left(3 + (-1)^{\ell_0}\right)\right\};$$

(ii) je-li $x_{\ell_1}^* \leq 0$ pro nějaké $\ell_1 \in \{1, 3, \ldots, n-2\}$,

$$\text{pak je } x_\ell^* < 0 \text{ pro všechna } \ell \in \left\{\ell_1 + 2, \ell_1 + 4, \ldots, n - \frac{1}{2}\left(1 - (-1)^{\ell_1 + n}\right)\right\}.$$

Podle poslední rovnice systému (6.62) je

$$x_{n-1}^* = \frac{d_n}{q_n}.$$

Z první rekurentní formule (6.63) postupně vyjádříme

$$x_{n-3}^* = \frac{1}{q_{n-2}}\left(p_{n-2}x_{n-1}^* + d_{n-2}\right) = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\frac{d_n}{q_n} + \frac{d_{n-2}}{q_{n-2}},$$

$$x_{n-5}^* = \frac{1}{q_{n-4}}\left(p_{n-4}x_{n-3}^* + d_{n-4}\right) = \frac{p_{n-4}}{q_{n-4}}\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\frac{d_n}{q_n} + \frac{p_{n-4}}{q_{n-4}}\frac{d_{n-2}}{q_{n-2}} + \frac{d_{n-4}}{q_{n-4}},$$

atd. Celkem dostaneme

$$x_{n-(2\ell+1)}^* = \sum_{i=0}^{\ell}\frac{d_{n-2i}}{q_{n-2i}}\prod_{j=i+1}^{\ell}\frac{p_{n-2j}}{q_{n-2j}}, \quad \text{pro } \ell = 0, 1, \dots \left[\frac{n}{2}\right] - 1, \tag{6.64}$$

kde $[\xi]$ označuje celou část z čísla ξ a klademe $\prod_{j=k}^{k-1}\alpha_j = 1$ pro libovolné přirozené k a každou posloupnost $\{\alpha_j\}_{j=0}^{\infty}$.[3] Přímým výpočtem se lze přesvědčit, že (6.64) je skutečně řešením druhé až n-té rovnice systému (6.62).

Nechť nejprve je n sudé. V tomto případě lze rovnost (6.64) přepsat na tvar

$$x_{2k-1}^* = x_{n-(2(\frac{n}{2}-k)+1)}^* = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-k}\frac{d_{n-2i}}{q_{n-2_i}}\prod_{j=i+1}^{\frac{n}{2}-k}\frac{p_{n-2j}}{q_{n-2j}} = \sum_{i=k}^{\frac{n}{2}}\frac{d_{2i}}{q_{2i}}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{p_{2j}}{q_{2j}}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}.$$

Z tohoto vyjádření je vidět, že všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ s lichými indexy jsou kladné. Pro jeho první souřadnici platí

$$x_1^* = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{d_{2i}}{q_{2i}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{6.65}$$

Z první rovnice systému (6.62) nyní dostaneme

$$x_2^* = \frac{r - ax_1^*}{p_1},$$

a ze druhé rekurentní formule (6.63)

$$x_4^* = \frac{1}{p_3}\left(q_3x_2^* - d_3\right) = \frac{q_3}{p_3}\frac{r - ax_1^*}{p_1} - \frac{d_3}{p_3},$$

$$x_6 = \frac{1}{p_5}\left(q_5x_4^* - d_5\right) = \frac{q_5}{p_5}\frac{q_3}{p_3}\frac{r - ax_1^*}{p_1} - \frac{q_5}{p_5}\frac{d_3}{p_3} - \frac{d_5}{p_5},$$

atd. Obecně

$$x_{2k}^* = \frac{r - ax_1^*}{p_1}\prod_{i=1}^{k-1}\frac{q_{2i+1}}{p_{2i+1}} - \sum_{i=1}^{k-1}\frac{d_{2i+1}}{p_{2i+1}}\prod_{j=i+1}^{k-1}\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}.$$

Souřadnice x_1^* je vyjádřena formulí (6.65). Tedy platí

$$\begin{aligned}
x_n^* = x_{2\frac{n}{2}}^* &= \frac{r - ax_1^*}{p_1}\prod_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{q_{2\ell+1}}{p_{2\ell+1}} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{d_{2i+1}}{p_{2i+1}}\prod_{j=i+1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{q_{2j+1}}{p_{2j+1}} = \\
&= \left(\prod_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{q_{2\ell+1}}{p_{2\ell+1}}\right)\left(\frac{r - ax_1^*}{p_1} - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{d_{2i+1}}{p_{2i+1}}\prod_{j=1}^{i}\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}\right) = \\
&= \left(\frac{1}{p_1}\prod_{\ell=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{q_{2\ell+1}}{p_{2\ell+1}}\right)\left(r - a\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{d_{2i}}{q_{2i}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{p_{2j}}{q_{2j}} - p_1\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}}\prod_{j=1}^{i-1}\frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}\right).
\end{aligned}$$

[3] Uvedená konvence je přirozeným rozšířením rovnosti $\prod_{j=m}^{k}\alpha_j = \alpha_k\prod_{j=m}^{k-1}\alpha_j$, která platí pro libovolné $k > m$, také pro $k = m$.

Nutnou a dostatečnou podmínkou pro to, aby všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ byly kladné, je tedy podle tvrzení (i) a (ii) nerovnost

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + a \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{6.66}$$

Nechť nyní je n liché. V tomto případě lze rovnost (6.64) přepsat na tvar

$$x_{2k}^* = x_{n-(2(\frac{n-1}{2}-k)+1)} = \sum_{i=0}^{\frac{n-1}{2}-k} \frac{d_{n-2i}}{q_{n-2i}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n-1}{2}-k} \frac{p_{n-2j}}{q_{n-2j}} = \sum_{i=k}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}.$$

Z něho je vidět, že všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ se sudými indexy jsou kladné. Zejména jeho druhá souřadnice je

$$x_2^* = \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}. \tag{6.67}$$

Je-li $a \neq 0$, dostaneme z první rovnice systému (6.62)

$$x_1^* = \frac{r - p_1 x_2^*}{a},$$

ze druhé rekurentní formule (6.63) nyní můžeme postupně vyjádřit

$$x_3^* = \frac{1}{p_2}(q_2 x_1^* - d_2) = \frac{q_2}{p_2} \frac{r - p_1 x_2^*}{a} - \frac{d_2}{p_2},$$

$$x_5^* = \frac{1}{p_4}(q_4 x_3^* - d_4) = \frac{q_4}{p_4} \frac{q_2}{p_2} \frac{r - p_1 x_2^*}{a} - \frac{q_4}{p_4} \frac{d_2}{p_2} - \frac{d_4}{p_4},$$

atd. Obecně dostaneme

$$x_{2k-1}^* = \frac{r - p_1 x_2^*}{a} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{q_{2i}}{p_{2i}} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{d_{2i}}{p_{2i}} \prod_{j=i+1}^{k-1} \frac{q_{2j}}{p_{2j}}, \quad k = 1, 2, \ldots, \frac{n+1}{2}.$$

Odtud s využitím (6.67) vyjádříme

$$\begin{aligned} x_n^* = x_{2\frac{n+1}{2}-1}^* &= \frac{r - p_1 x_2^*}{a} \prod_{\ell=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_{2\ell}}{p_{2\ell}} - \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i}}{p_{2i}} \prod_{j=i+1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_{2j}}{p_{2j}} = \\ &= \left(\frac{1}{a} \prod_{\ell=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{q_{2\ell}}{p_{2\ell}} \right) \left(r - p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} - a \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}} \right). \end{aligned}$$

Pro liché n a $a \neq 0$ tedy dostáváme jako nutnou a dostatečnou podmínku pro to, aby všechny souřadnice stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ byly kladné, nerovnost

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + a \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{6.68}$$

Pokud je n liché a $a = 0$, dostaneme z první rovnice systému (6.62) rovnost

$$x_2^* = \frac{r}{p_1}.$$

Současně však musí platit rovnost (6.67), takže soustava rovnic (6.62) má řešení (a to nekonečně mnoho řešení; stacionární bod není v takovém případě izolovaný) pouze tehdy, když

$$r = p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

Pravděpodobnost, že tato rovnost bude splněna pro systém (6.61) modelující reálné společenstvo, je však nulová.

Povšimněme si ještě, že nerovnosti (6.66) a (6.68) lze zapsat jednotně ve tvaru

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} + a \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{d_{2i}}{q_{2i}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j}}{q_{2j}}. \tag{6.69}$$

Závěr: Je-li $a > 0$ (základní zdroj je omezený, v populaci producenta je vnitropopulační konkurence), pak vnitřní stacionární bod systému (6.61) existuje a je stejnoměrně asymptoticky stabilní (je možná koexistence všech populací tvořících trofický řetězec) právě tehdy, když je splněna podmínka (6.69) (vnitřní koeficient růstu producenta je dostatečně velký).

Je-li $a = 0$ (základní zdroj je neomezený), pak vnitřní stacionární bod systému (6.61) existuje pouze pro sudé n (je možná koexistence pouze sudého počtu trofických úrovní); vnitřní stacionární bod v takovém případě je stejnoměrně stabilní a existuje právě tehdy, když je splněna podmínka

$$r > p_1 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} \frac{d_{2i+1}}{q_{2i+1}} \prod_{j=1}^{i-1} \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}}.$$

□

6.4.10 Zobecněné Lotkovy-Volterrovy systémy (Grossberg 1978)

Vlivy populací tvořících společenstvo na růst jednotlivých populací nemusí být tvaru přímé úměrnosti. Proto může být realističtější místo systému (6.52) uvažovat systém

$$x_i' = g_i(x_i)\left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j)\right), \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{6.70}$$

Funkce f_i, g_i, $i = 1, 2, \dots, n$ jsou definovány a spojité na intervalu $[0, \infty)$ a splňují podmínky:

- $(\forall i) g_i(0) = 0$ ... je-li velikost i-té populace nulová (tj. i-tá populace ve společenstvu není), pak nulovou zůstane; uvažujeme tedy izolovaná společenstva, kde nedochází k imigraci nových druhů.
- $(\forall i)(\forall \xi > 0) g_i(\xi) > 0$ ... skutečnost, zda je i-tá populace soběstačná nebo ne, nezávisí na její velikosti; neuvažujeme tedy např. Alleeho efekt.
- $(\forall j) f_j(0) = 0$ ... není-li j-tá populace ve společenstvu přítomná, nijak neovlivňuje růst ostatních populací.
- $(\forall j) f_j$ je rostoucí ... s rostoucí velikostí populace roste i její vliv na růst populací ostatních.

Systém (6.70) lze zapsat vektorově:

$$\boldsymbol{x}' = \mathsf{G}(\boldsymbol{x}) \cdot \big(\boldsymbol{b} - \mathsf{A} \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big),$$

kde

$$\mathsf{G}(\boldsymbol{x}) = \mathsf{G}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \operatorname{diag}\big(g_1(x_1), g_2(x_2), \dots, g_n(x_n)\big),$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \big(f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)\big)^T.$$

Poněvadž všechny složky zobrazení $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou rostoucí (tedy prosté) funkce, je toto zobrazení prosté a existuje k němu zobrazení inverzní $\boldsymbol{f}^{-1} = (f_1^{-1}, f_2^{-1}, \ldots, f_n^{-1})$. Je-li matice interakcí společenstva A regulární, existuje nejvýše jeden vnitřní stacionární bod

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \boldsymbol{f}^{-1}\left(\mathsf{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{b}\right)$$

systému (6.70), tj. takový bod, že $x_1^* > 0, x_2^* > 0, \ldots, x_n^* > 0$, který lze opět interpretovat jako dynamicky stálé velikosti všech populací koexistujících ve společenstvu.

Analogicky jako v důkazu věty 6.4.7 ověříme, že pokud existuje okolí U vnitřního stacionárního bodu $\boldsymbol{x}^*$ a existuje konstantní vektor $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T$ se všemi složkami kladnými, pro něž je výraz

$$\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)^T \cdot \mathcal{S}(\operatorname{diag} \boldsymbol{c} \cdot \mathsf{A}) \cdot \big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*)\big)$$

nezáporný pro každé $\boldsymbol{x} \in U$, pak je funkce

$$V(\boldsymbol{x}) = V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_{x_i^*}^{x_i} \frac{f_i(\xi) - f_i(x_i^*)}{g_i(\xi)} \mathrm{d}\xi$$

ljapunovskou funkcí systému (6.70) ve stacionárním bodě $\boldsymbol{x}^*$. Odtud je vidět, že tvrzení důsledku 6.4.8 platí také pro systém (6.70).