Parametrické úlohy o jednom náhodném výběru a více nezávislých náhodných výběrech z alternativních rozložení

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ. Píšeme X ~ A(ϑ).

$\pi(x) = \begin{cases} 1-\vartheta & \text{pro } x=0 \\ \vartheta & \text{pro } x=1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$ neboli $\pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1-\vartheta)^{1-x} & \text{pro } x=0,1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ. Píšeme X ~ Bi(n, ϑ).

$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} & \text{pro } x=0,\dots,n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

E(X) = nϑ, D(X) = nϑ(1-ϑ)

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro n = 1.

Jsou-li $X_1, \dots, X_n$ stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, ..., n, pak $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim$ Bi(n, ϑ).)

Centrální limitní věta:

Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \dots, X_n$ stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, pak pro velká n (n ≥ 30) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^{n} X_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$. Zkráceně píšeme $\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$. Pokud součet $\sum_{i=1}^{n} X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$, pak rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$

Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru.

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$. Pak statistika $U = \dfrac{M - \vartheta}{\sqrt{\dfrac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením. (Říkáme, že U má asymptoticky rozložení N(0,1) a píšeme U ≈ N(0,1).)

Vysvětlení:

Protože $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$, bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (výběrový úhrn) rozložení $Bi(n, \vartheta)$. Y_n má střední hodnotu $E(Y_n) = n\vartheta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika $U = \dfrac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením N(0,1). Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n, dostaneme vyjádření:

$$U = \frac{\frac{Y_n}{n} - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \approx N(0,1)$$

Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ:

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ jsou:

$$d = M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}\,u_{1-\alpha/2},\quad h = M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}\,u_{1-\alpha/2}.$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D(M) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta : 1-\alpha \approx P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\vartheta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$= P\left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}\,u_{1-\alpha/2} < \vartheta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}\,u_{1-\alpha/2}\right)$$

Příklad: Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich používá zubní kartáček zahraniční výroby. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba používá zubní kartáček zahraniční výroby.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{100}$, přičemž

$X_i = 1$, když i-tá osoba používá zahraniční zubní kartáček a

$X_i = 0$ jinak,

$i = 1, ..., 100$.

Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

$n = 100$, $m = 34/100$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem.

Pak $100.0,34.0,66 = 22,44 > 9$.

Dosadíme do vzorce: $d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\, u_{1-\alpha/2}$, tedy

$$d = 0,34 - \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}}\, 1,96 = 0,2472,\quad h = 0,34 + \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}}\, 1,96 = 0,4328.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0,2472 < \vartheta < 0,4328$.

Znamená to, že s pravděpodobností přibližně 0,95 tedy můžeme očekávat, že v populaci je 24,7% až 43,3% osob, které používají zubní kartáček zahraniční výroby.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

a) Přesný způsob

Otevřeme nový datový soubor se dvěma proměnnými a jednom případu.
První proměnnou nazveme d a do jejího Dlouhého jména napíšeme
=0,34-sqrt(0,34*0,66/100)*VNormal(0,975;0;1)
Druhou proměnnou nazveme h a do jejího Dlouhého jména napíšeme
=0,34+sqrt(0,34*0,66/100)*VNormal(0,975;0;1)
Dostaneme výsledek:

	1 d	2 h
1	0,247	0,432

Vidíme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost používání zubního kartáčku zahraniční výroby bude pohybovat v mezích 0,2471 až 0,4328.

b) Přibližný způsob, použitelný pro dostatečně velký rozsah výběru

Do nového datového souboru o jedné proměnné X a 100 případech uložíme 34 jedniček (indikují používání zubního kartáčku zahraniční výroby) a 66 nul (indikují používání zubního kartáčku domácí výroby).
Statistika – Základní statistiky a tabulky – Popisné statistiky – OK – Proměnné X – OK – Detailní výsledky – zaškrtneme Meze spolehl. prům. – ponecháme implicitní hodnotu pro Interval 95,00 – Výpočet.
Dostaneme tabulku:

	Popisné statistiky (Tabulka3)			
Promě	N platn	Prům	Int. spol -95,00(	Int. spol 95,00(
X	10	0,340	0,245	0,434

Dospěli jsme k výsledku, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost používání zubního kartáčku zahraniční výroby bude pohybovat v mezích 0,2455 až 0,4345.

Příklad: Kolik osob musíme vybrat, abychom podíl modrookých osob v populaci odhadli se spolehlivostí 90% a šířka intervalu spolehlivosti byla nanejvýš a) 0,06, b) 0,01?

Řešení:
Šířka 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ:

$$h - d = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\,u_{1-\alpha/2} - \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\,u_{1-\alpha/2}\right) = 2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\,u_{1-\alpha/2}$$

Požadujeme, aby h – d ≤ Δ, tedy $2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\,u_{1-\alpha/2} \le \Delta$. Odtud vyjádříme $n \ge \frac{4m(1-m)}{\Delta^2}\,u_{1-\alpha/2}^2$.

Předpokládejme, že nemáme žádné předběžné informace o podílu modrookých osob v populaci. Musíme tedy zvolit takové m, aby šířka intervalu spolehlivosti byla maximální. Maximalizujeme výraz $m(1-m) = m - m^2$. Derivujeme podle m a položíme rovno 0: $1 - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. V tomto případě volíme relativní četnost m = 0,5.

ad a) $n \ge \frac{4m(1-m)}{\Delta^2}\,u_{1-\alpha/2}^2 = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}06^2}\,u_{0{,}95}^2 = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}06^2}\,1{,}645^2 = 751{,}67$

Uvedenou podmínku tedy splníme, když vybereme aspoň 752 osob.

ad b) $n \ge \frac{4m(1-m)}{\Delta^2}\,u_{1-\alpha/2}^2 = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}01^2}\,u_{0{,}95}^2 = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{0{,}01^2}\,1{,}645^2 = 27060{,}25$

Chceme-li dosáhnout podstatně užšího intervalu spolehlivosti, musíme vybrat aspoň 27 061 osob.

Modifikace: Předpokládejme, že v populaci je nanejvýš 30% modrookých osob. Pak relativní četnost m = 0,3.

ad a) $$n \geq 4m(1-m)\left(\frac{u_{1-\alpha/2}}{\Delta}\right)^2 = 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot \left(\frac{u_{0{,}95}}{0{,}06}\right)^2 = 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot \left(\frac{1{,}645}{0{,}06}\right)^2 = 631{,}4$$

V tomto případě stačí vybrat 632 osob.

Ve srovnání s předešlým případem vidíme, že rozsah výběru skutečně klesl.

ad b)

$$n \geq 4m(1-m)\left(\frac{u_{1-\alpha/2}}{\Delta}\right)^2 = 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot \left(\frac{u_{0{,}95}}{0{,}01}\right)^2 = 4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot \left(\frac{1{,}645}{0{,}01}\right)^2 = 22730{,}6$$

V tomto případě musíme vybrat aspoň 22 731 osob.

Testování hypotézy o parametru ϑ

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu

H_0: $\vartheta = c$ proti alternativě H_1: $\vartheta \neq c$ (resp. H_1: $\vartheta < c$ resp. H_1: $\vartheta > c$).

Testovým kritériem je statistika $T_0 = \dfrac{M - c}{\sqrt{\dfrac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$ resp. $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametru ϑ lze samozřejmě provést i pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí $\vartheta = 0{,}01$. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu H_0: $\vartheta = 0{,}01$ proti oboustranné alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.

Řešení:
Zavedeme náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_{1000}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \ldots, 1000$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.
Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta = 0{,}01$ proti alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.

Známe: $n = 1000$, $m = \frac{16}{1000} = 0{,}016$, $c = 0{,}01$, $\alpha = 0{,}05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0{,}975} = 1{,}96$

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $1000 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99 = 9{,}9 > 9$.

a) Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}} = \dfrac{0{,}016 - 0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}01 \cdot 0{,}99}{1000}}} = 1{,}907$.

Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{0{,}975}\rangle \cup \langle u_{0{,}975}, \infty) = (-\infty, -1{,}96\rangle \cup \langle 1{,}96, \infty)$. Protože $1{,}907 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 - \sqrt{\frac{0{,}016 \cdot 0{,}984}{1000}} \cdot 1{,}96 = 0{,}0082$$

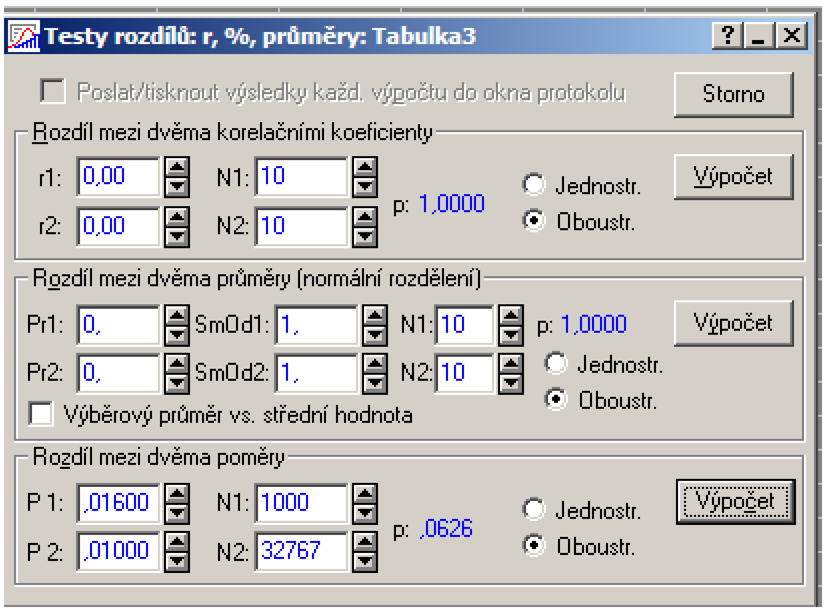
$$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}\, u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 + \sqrt{\frac{0{,}016 \cdot 0{,}984}{1000}} \cdot 1{,}96 = 0{,}0238$$

Protože číslo $c = 0{,}01$ leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty
Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:
$p = 2 \min\{ \Phi(1{,}907), 1-\Phi(1{,}907) \} = 2 \min \{ 0{,}97104, 1 - 0{,}97104 \} = 0{,}05792$.
Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



Příklad: Nový léčebný postup považujeme za úspěšný, pokud po jeho ukončení bude dosaženo zlepšení zdravotního stavu u alespoň 50% zúčastněných pacientů. Nová terapie byla vyzkoušena u 40 pacientů a ke zlepšení došlo u 24 osob, tj. u 60%. Je možné na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že tato terapie nedosahuje úspěšnosti aspoň 50%?

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny $X_1, \dots, X_{40}$, přičemž

$X_i = 1$, když terapie u i-tého pacienta byl úspěšná a

$X_i = 0$ jinak,

$i = 1, \dots, 40$.

Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta \le 0,5$ proti pravostranné alternativě H_1: $\vartheta > 0,5$.

Známe: $n = 40$, $m = \frac{24}{40} = 0,6$, $c = 0,5$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$

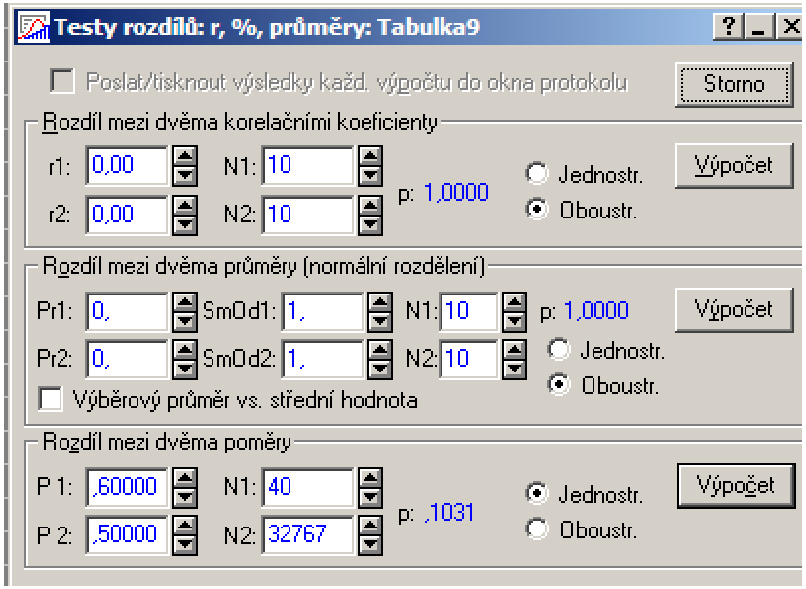
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $40.0,6.0,4 = 9,6 > 9$.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}} = \dfrac{0,6 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{40}}} = 1,264$.

Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty) = \langle u_{0,95}, \infty) = \langle 1,645, \infty)$.

Protože $1,2649 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:



Vypočtená p-hodnota jednostranného testu je 0,1031, tedy větší než asymptotická hladina významnosti 0,05. H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Asymptotické rozložení statistiky odvozené ze dvou výběrových průměrů

Nechť $X_{11}, \ldots, X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení A(ϑ_1) a $X_{21}, \ldots, X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení A(ϑ_2) a nechť jsou splněny podmínky $n_1 \vartheta_1 (1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1-\vartheta_2) > 9$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry.

Pak statistika $U = \dfrac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\dfrac{\vartheta_1(1-\vartheta_1)}{n_1} + \dfrac{\vartheta_2(1-\vartheta_2)}{n_2}}} \approx N(0,1)$.

Vysvětlení:

Analogicky jako v případě jednoho náhodného výběru z alternativního rozložení.

Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2},$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2}$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D(M_i) = \frac{\vartheta_i(1-\vartheta_i)}{n_i}$ nahradíme odhadem $\frac{M_i(1-M_i)}{n_i}$, i = 1, 2, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in (0,1): 1-\alpha \approx P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2}\right)$$

$$= P\left(M_1 - M_2 - \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2} < \vartheta_1 - \vartheta_2 \right.$$

$$\left. < M_1 - M_2 + \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2}\right)$$

Příklad: Management supermarketu vyhlásil týden slev a sledoval, zda toto vyhlášení má vliv na podíl větších nákupů (nad 500 Kč). Na základě náhodného výběru 200 zákazníků v týdnu bez slev bylo zjištěno 97 velkých nákupů, zatímco v týdnu se slevou z 300 náhodně vybraných zákazníků učinilo velký nákup 162 zákazníků. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl pravděpodobností uskutečnění většího nákupu v týdnu bez slevy a v týdnu se slevou.

Řešení:

Zavedeme náhodnou veličinu X_{1i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu bez slevy i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 200. Náhodné veličiny $X_{1,1}, \dots, X_{1,200}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_1)$. Dále zavedeme náhodnou veličinu X_{2i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu se slevou i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 300. Náhodné veličiny $X_{2,1}, \dots, X_{2,300}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_2)$.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200 = 0{,}485$, $m_2 = 162/300 = 0{,}54$.

Ověření podmínek $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2.

97.(1-97/200) = 49,955 > 9, 162.(1-162/300) = 74,52 > 9.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2} =$$

$$= \frac{97}{200} - \frac{162}{300} - \sqrt{\frac{\frac{97}{200}\left(1-\frac{97}{200}\right)}{200} + \frac{\frac{162}{300}\left(1-\frac{162}{300}\right)}{300}}\cdot 1{,}96 = -0{,}1443$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha/2} =$$

$$= \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}\left(1-\frac{97}{200}\right)}{200} + \frac{\frac{162}{300}\left(1-\frac{162}{300}\right)}{300}}\cdot 1{,}96 = 0{,}0343$$

Zjistili jsme tedy, že s pravděpodobností přibližně 0,95: $-0{,}1443 < \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0{,}0343$.

Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení A(ϑ_1) a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr z alternativního rozložení A(ϑ_2) a nechť jsou splněny podmínky $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$.

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu

H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = c$ proti alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 \neq c$ (resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < c$ resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 > c$).

Testovým kritériem je statistika

$T_0 = \dfrac{M_1 - M_2 - c}{\sqrt{\dfrac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \dfrac{M_2(1-M_2)}{n_2}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$

(resp. $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$ resp. $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$).

(Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ lze provést též pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Poznámka: Postup při testování hypotézy $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$:

Je-li c = 0, pak označme $M_* = \dfrac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 + n_2}$ vážený průměr výběrových průměrů. Jako testová statistika slouží

$T_0 = \dfrac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}\right)}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1). Kritický obor má tvar $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$ (resp. $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$ resp. $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$). Testová statistika T_0 vznikne standardizací statistiky $M_1 - M_2$, kde neznámé parametry ϑ_1, ϑ_2 nahradíme společným odhadem M_*.

Příklad: Pro údaje z příkladu o supermarketu testujte na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu, že týden se slevami nezvýší pravděpodobnost uskutečnění většího nákupu.

Řešení:

Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti levostranné alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < 0$ na asymptotické hladině významnosti 0,05.
$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200$, $m_2 = 162/300$, $m_* = (97 + 162)/500 = 0{,}518$.
Podmínky dobré aproximace byly ověřeny v předešlém příkladu.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti:

Pro levostrannou alternativu používáme pravostranný interval spolehlivosti:

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\, u_{1-\alpha} =$$

$$= \left(\frac{97}{200} - \frac{162}{300}\right) + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}\left(1-\frac{97}{200}\right)}{200} + \frac{\frac{162}{300}\left(1-\frac{162}{300}\right)}{300}}\; 1{,}645 = 0{,}02$$

Protože číslo c = 0 je obsaženo v intervalu $(-1;\, 0{,}02\rangle$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*)\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{97}{200} - \frac{162}{300}}{\sqrt{0{,}518(1-0{,}518)\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{300}\right)}} = -1{,}205$$

Kritický obor je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle = (-\infty, -u_{0{,}95}\rangle = (-\infty, -1{,}645\rangle$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí p-hodnoty:

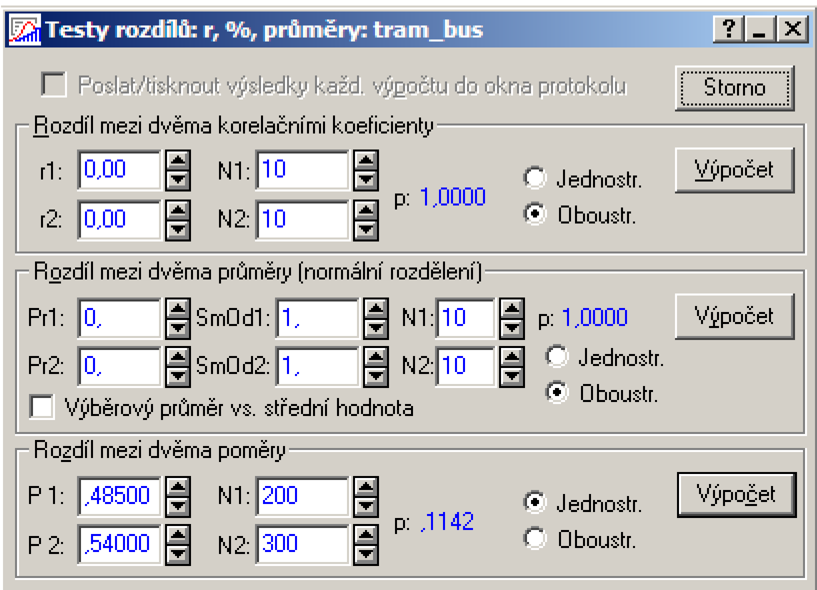
Pro levostrannou alternativu se p-hodnota počítá podle vzorce $p = P(T_0 \leq t_0)$:

$$p = P(T_0 < -1{,}205) = \Phi(-1{,}205) = 1 - \Phi(1{,}205) = 1 - 0{,}886 = 0{,}113$$

Protože p-hodnota je větší než 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,485, do políčka N1 napíšeme 200, do políčka P 2 napíšeme 0,54, do políčka N2 napíšeme 300 – zaškrtneme Jednostr. - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,1142, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



Aspoň tři nezávislé náhodné výběry z alternativních rozložení

Test homogenity

Nechť $X_{1j}, \ldots, X_{n_j j} \sim A(\vartheta_j)$, j = 1, 2, ..., r jsou nezávislé náhodné výběry.

Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 = \ldots = \vartheta_r$ proti alternativní hypotéze H_1: aspoň jedna dvojice parametrů je různá.

Označme $n = \sum_{j=1}^{r} n_j$ celkový rozsah všech r výběrů a M_* vážený průměr výběrových průměrů.

Jako testové kritérium slouží statistika $Q = \frac{1}{M_*(1-M_*)} \sum_{j=1}^{r} n_j (M_j - M_*)^2$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení $\chi^2(r-1)$.

H_0 tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \geq \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$.

Test lze použít, pokud $n_j M_* > 5$ pro všechna j = 1, ..., r.

Statistiku Q lze snadno upravit do Brandtova – Snedecorova výpočetního tvaru $Q = \frac{1}{M_*(1-M_*)} \sum_{j=1}^{r} n_j M_j^2 - n \frac{M_*}{1-M_*}$.

Test homogenity založený na arkussinusové transformaci

Není-li splněna podmínka $n_j M_* > 5$ pro všechna j = 1, ..., r, doporučuje se následující postup:

Pro j = 1, ..., r označme

$$Y_j = \sum_{i=1}^{n_j} Y_{ij}, \quad M_j = \frac{1}{n_j} Y_j,$$

$$A_j = \arcsin \sqrt{M_j},$$

$$B = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{r} n_j A_j .$$

Pak statistika $Q = 4 \sum_{j=1}^{r} n_j (A_j - B)^2 \approx \chi^2(r-1)$.

H_0 tedy zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $Q \geq \chi^2_{1-\alpha}(r-1)$.

Mnohonásobné porovnávání

Zamítneme-li nulovou hypotézu na asymptotické hladině významnosti α, chceme zjistit, které dvojice parametrů ϑ_k, ϑ_l se liší.

Platí-li nerovnost $|A_k - A_l| \geq \sqrt{\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_l}\right)}\, q_{1-\alpha}(r, \infty)$, pak na hladině významnosti α zamítáme hypotézu o shodě parametrů ϑ_k, ϑ_l.

(Hodnoty $q_{1-\alpha}(r, \infty)$ najdeme v tabulkách.)

Příklad

Na gymnázium bylo přijato 142 studentů. Ti byli náhodně rozděleni do čtyř tříd A, B, C, D. V každé třídě byla matematika vyučována jinou metodou. Na konci školního roku psali všichni studenti stejnou písemnou práci a byl zaznamenán počet těch studentů, kteří vyřešili všechny zadané úkoly.

Třída	A	B	C	D
Počet studentů	35	36	37	34
Počet úspěšných studentů	5	8	17	15

Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že rozdíly mezi třídami jsou způsobeny pouze náhodnými vlivy.

Řešení

Máme čtyři nezávislé náhodné výběry, j-tý pochází z rozložení A(ϑ), j = 1, 2, 3, 4.

Testujeme hypotézu H_0: ϑ : : : .

Přitom $n_1 = 35$, $n_2 = 36$, $n_3 = 37$, $n_4 = 34$, $m_1 = 5/35$, $m_2 = 8/36$, $m_3 = 17/37$, $m_4 = 15/34$, $m_* = (5+8+17+15)/142 = 45/142$.
Testová statistika Q = 12,288, $\chi^2_{0,95}(3) = 7,81$. Protože testové kritérium se realizuje v kritickém oboru, H_0 zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Nyní metodou mnohonásobného porovnávání ujistíme, které dvojice parametrů se od sebe liší na hladině významnosti 0,05.
Spočteme arkussinusové transformace výběrových průměrů.
Vyjde: $A_1 = 0{,}3876$, $A_2 = 0{,}4909$, $A_3 = 0{,}7448$, $A_4 = 0{,}7264$.

Srovnávané třídy	Rozdíly $\lvert A_k - \quad \rvert$	Pravá strana vzorce
A, B	0,103	0,30
A, C	0,357	0,30
A, D	0,339	0,31
B, C	0,254	0,30
B, D	0,254	0,31
C, D	0,018	0,30

Na hladině významnosti 0,05 se liší třídy A, C a A, D.

Výpočet pomocí systému STATISTICA

Vytvoříme datový soubor se dvěma proměnnými a o 142 případech. Proměnná USPECH obsahuje hodnotu 1, pokud student vyřešil všechny zadané úkoly, jinak obsahuje hodnotu 0. Proměnná TRIDA má hodnotu 1, pokud student pochází z třídy A, hodnotu 2 pro třídu B, hodnotu 3 pro třídu C a hodnotu 4 pro třídu D.

Nejprve zjistíme podíly úspěšných studentů v jednotlivých třídách.

Statistiky – Základní statistiky/tabulky - Rozklad & jednofakt. ANOVA - OK - Proměnné - Závislé USPECH, Grupovaci TRIDA, OK, Kódy pro grupovací proměnné – Vše, OK – Popisné statistiky - Výpočet: Tabulka statistik – necháme zaškrtnuto pouze Počet platných OK.

Rozkladová tabulka popisných statistik
N=142 (V seznamu záv. prom. nejsou C

TRID	USPE průme	USPE N
A	0,142	3
B	0,222	3(
C	0,459	3
D	0,441	3
Vs.sk	0,316	14

Vidíme, že nejslabší výkony podávali studenti ze třídy A, úspěšných bylo pouze 14,3% studentů, ve třídě B 22,2%, ve třídě C 45,9% a ve třídě D 44,1%. Třídy C a D se z hlediska úspěchu v písemce z matematiky liší jen nepatrně.

Ověříme splnění podmínek dobré aproximace: $n_j m_* > 5$ pro všechna j = 1, ..., r. Vážený průměr m_* se nachází v posledním řádku výstupní Rozkladové tabulky popisných statistik. Jeho hodnotu okopírujeme do políček pro průměry tříd A, B, C, D, poslední řádek odstraníme a k tabulce přidáme jednu novou proměnnou, do jejíhož Dlouhého jména napíšeme =v2*v3.

TRID	USPE Průmě	USPE N	NPro =v2*v
A	0,316	3	11,09
B	0,316	3(	11,40
C	0,316	3	11,72
D	0,316	3	10,77

Vidíme, že podmínky dobré aproximace jsou splněny.

Dále provedeme testování hypotézy o shodě parametrů čtyř alternativních rozložení.
Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Kontingenční tabulky – OK - Specif. tabulky – List 1 USPECH, List 2 TRIDA, OK– Možnosti - Statistiky dvourozm tabulek - zaškrtneme Pearson & M-L Chi –square – Detailní výsledky – Detailní 2-rozm. tabulky

Statist.	Statist. : USPECH(2) x TRIDA(4) (u		
	Chi-kva	sv	p
Pearsonův c	12,28	df=	p=,00
M-V chi-kva	12,80	df=	p=,00

Testová statistika Q se realizuje hodnotou 12,2876, počet stupňů volnosti je 3, odpovídající p-hodnota = 0,00646, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu H_0 zamítáme. S rizikem omylu nejvýše 0,05 jsme tedy prokázali, že rozdíly v podílech úspěšných studentů v jednotlivých třídách nelze vysvětlit náhodnými vlivy.
Mnohonásobné porovnávání provedeme s pomocí systému STATISTICA jako s inteligentní kalkulačkou (kvantil $q_{0,95}(4,\infty)$ = 3,63).

	1 M_k	2 M_l	3 A_k	4 A_l	5 rozdi	6 n_k	7 n_l	8 PS
A,E	0,142	0,222	0,387	0,490	0,103	3	3	0,304
A,C	0,142	0,459	0,387	0,744	0,357	3	3	0,302
A,L	0,142	0,441	0,387	0,726	0,338	3	3	0,309
B,C	0,222	0,459	0,490	0,744	0,25	3	3	0,300
B,L	0,222	0,441	0,490	0,726	0,235	3	3	0,306
C,I	0,459	0,441	0,744	0,726	0,018	3	3	0,304

Vidíme, že na hladině významnosti se liší třídy A, C a A, D.