Počet pravděpodobnosti jako základ matematické statistiky

Pomocí metod popisné statistiky dokážeme přehledně shrnout informace, které se týkají výhradně objektů výběrového souboru. Pokud jsme však data získali na základě dobře navrženého výzkumného plánu, můžeme provádět induktivní úsudky o chování sledovaných proměnných v celém základním souboru. Metody statistické indukce se ovšem opírají o počet pravděpodobnosti.

Počet pravděpodobnosti

Je to disciplína, která se zabývá studiem zákonitostí v náhodných pokusech. Matematickými prostředky modeluje situace, v nichž hraje roli náhoda. Pod pojmem náhoda rozumíme působení faktorů, které se živelně mění při různých provedeních téhož pokusu a nepodléhají naší kontrole.

Pokusem rozumíme jednorázové uskutečnění konstantně vymezeného souboru definičních podmínek. Předpokládáme, že pokus můžeme mnohonásobně nezávisle opakovat za dodržení definičních podmínek (ostatní podmínky se mohou měnit, proto různá opakování pokusu mohou vést k různým výsledkům). Dále předpokládáme, že opakováním pokusu vzniká opět pokus.
Deterministický pokus je takový pokus, jehož každé opakování vede k jedinému možnému výsledku. (Např. zahřívání vody na 100°C při atmosférickém tlaku 1015 hPa vede k varu vody.)
Náhodný pokus je takový pokus, jehož každé opakování vede k právě jednomu z více možných výsledků, které jsou vzájemně neslučitelné. (Např. hod kostkou vede k právě jednomu ze šesti možných výsledků.)

Zavedení měřitelného prostoru

Neprázdnou množinu možných výsledků náhodného pokusu značíme Ω a nazýváme ji základní prostor. Možné výsledky značíme ω_1, ω_2, ...
Vymezená množina výsledků je náhodný jev, značíme ho symbolem A. Všechny možné náhodné jevy tvoří jevové pole **A**.
Dvojice (Ω, **A**) se nazývá měřitelný prostor. Ω se nazývá jistý jev, $\emptyset$ nemožný jev.

Vztahy mezi jevy

a) $A \subset B$ znamená, že jev A má za důsledek jev B.
b) $A \cup B$ znamená nastoupení aspoň jednoho z jevů A, B
c) $A \cap B$ znamená společné nastoupení jevů A, B
d) $A \setminus B$ znamená nastoupení jevu A za nenastoupení jevu B
e) $\overline{A} = \Omega \setminus A$ znamená jev opačný k jevu A
f) $A \cap B = \emptyset$ znamená, že jevy A, B jsou neslučitelné
g) $\omega \in A$ znamená, že možný výsledek ω je příznivý nastoupení jevu A.

Některé vlastnosti operací s jevy

a) Pro sjednocení a průnik jevů platí komutativní zákon, který pro dva jevy A, B má tvar:
$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
b) Pro sjednocení a průnik tří jevů A, B, C platí zákon asociativní:
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
distributivní: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
c) Pro sjednocení a průnik jevů opačných platí de Morganovy zákony, které pro dva jevy A, B zapíšeme takto: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

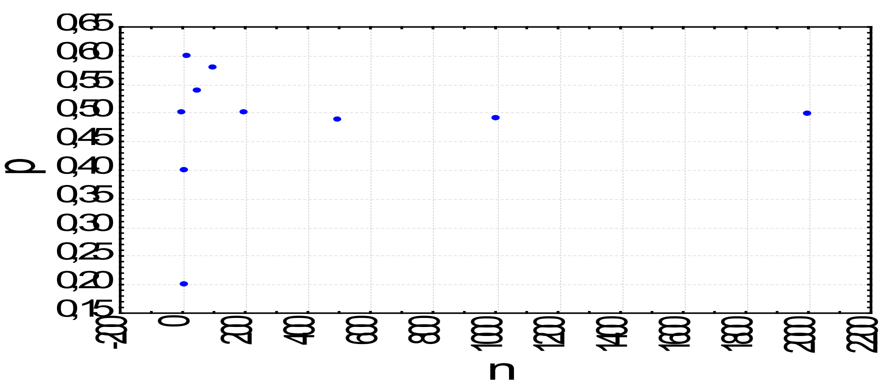
Pravděpodobnostní prostor

Motivace: Provádíme opakovaně nezávisle týž náhodný pokus a v každém pokusu sledujeme nastoupení jevu A, kterému říkáme úspěch. Označme n celkový počet pokusů a N(A) počet těch pokusů, kdy nastal úspěch. S rostoucím n pozorujeme, že relativní četnost úspěchu $\frac{N(A)}{n}$ se blíží číslu P(A), které považujeme za pravděpodobnost úspěchu. (Tento poznatek je znám jako **empirický zákon velkých čísel**).

Ilustrace empirického zákona velkých čísel

Provádíme n nezávislých hodů mincí. Padnutí líce považujeme za úspěch. Budeme sledovat závislost relativní četnosti úspěchu na počtu pokusů. (Počet pokusů volíme 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500,1000, 2000.)

n	2	5	10	20	50	100	200	500	1000	2000
p	0,5	0,2	0,4	0,6	0,54	0,58	0,5	0,488	0,49	0,4975



Vzniká otázka, jak zavést pravděpodobnost, aby byla „zidealizovaným“ protějškem relativní četnosti. Zdálo by se vhodné zavést pravděpodobnost takto:

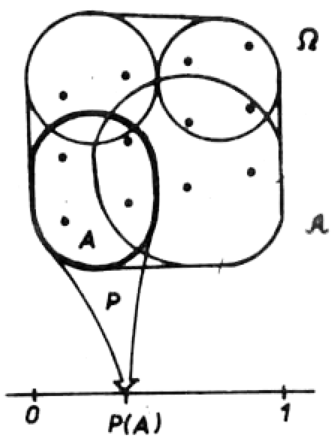
$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{N(A)}{n}.$$

Jde o tzv. **statistickou definici pravděpodobnosti**. Z matematického hlediska tato definice není v pořádku, protože počet pokusů je vždy konečný a nelze se přesvědčit o existenci uvedené limity. Proto ve 30. letech 20. století ruský matematik A. A. Kolmogorov (1903 – 1987) vybudoval **axiomatickou teorii pravděpodobnosti.**

Axiomatická teorie pravděpodobnosti zavádí pravděpodobnost jako funkci, která každému jevu přiřazuje číslo mezi 0 a 1 a přitom je zidealizovaným protějškem relativní četnosti. Má tedy všechny vlastnosti relativní četnosti a kromě toho některé další vlastnosti, které vyplývají z vnitřních potřeb matematické teorie.

Pravděpodobností rozumíme reálnou množinovou funkci P: **A** → R, která splňuje následující tři axiómy:
každému jevu přiřazuje nezáporné číslo (axióm nezápornosti),
jistému jevu přiřazuje číslo 1 (axióm normovanosti),
sjednocení neslučitelných jevů přiřazuje součet pravděpodobností těchto jevů (axióm spočetné aditivity).
Trojice (Ω, **A**, P) se nazývá pravděpodobnostní prostor. Je to matematický model jednorázového provedení náhodného pokusu.

Ilustrace pravděpodobnostního prostoru



Systém axiómů pravděpodobnosti je bezesporný (tj. na každém měřitelném prostoru lze sestrojit pravděpodobnost) a neúplný (tj. na každém měřitelném prostoru, jehož jevové pole není minimální, lze sestrojit pravděpodobností více).

Vlastnosti pravděpodobnosti

Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Pak pro libovolné jevy $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ platí následujících 14 vlastností:

P1: $P(\emptyset) = 0$

P2: $P(A) \geq 0$ (nezápornost – axióm)

P3: $P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

P4: $1 + P(A_1 \cap A_2) \geq P(A_1) + P(A_2)$

P5: $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$ (subaditivita)

P6: $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$ (aditivita)

P7: $P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

P8: $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_2 \setminus A_1) = P(A_2) - P(A_2)$ (subtraktivita)

P9: $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow P(A_1) \leq P(A_2)$ (monotonie)

P10: $P(\Omega) = 1$ (normovanost – axióm)

P11: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ (komplementarita)

P12: $P(A) \leq 1$

P13: $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$ (spočetná aditivita – axióm)

P14: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$

(Pro neslučitelné jevy $A_1, \ldots, A_n$ dostáváme $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.)

(Vlastnosti P1, ..., P12 odpovídají vlastnostem relativní četnosti z popisné statistiky, vlastnost P14 je známa jako věta o sčítání pravděpodobností.)

Klasická pravděpodobnost

V Kolmogorovově axiomatické definici se nic nepraví o tom, jak na daném měřitelném prostoru konkrétně pravděpodobnost zavést. V případě, že základné prostor je konečný a všechny možné výsledky mají stejnou šanci na uskutečnění, můžeme použít klasickou pravděpodobnost:

Klasická pravděpodobnost je funkce, která jevu A přiřazuje číslo $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, kde m(A) je počet možných výsledků příznivých nastoupení jevu A a m(Ω) je počet všech možných výsledků.

Příklad na klasickou pravděpodobnost (s využitím vlastností pravděpodobnosti): V dodávce 100 kusů výrobků nemá požadovaný průměr 10 kusů, požadovanou délku 20 kusů a současně nemá požadovaný průměr i délku 5 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek z této dodávky má požadovaný průměr i délku?

Řešení:

Jev A spočívá v tom, že výrobek má požadovaný průměr a jev B v tom, že výrobek má požadovanou délku. Počítáme

$P(A \cap B) = P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B}) =$

$1 - [P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B})] = 1 - (\frac{10}{100} + \frac{20}{100} - \frac{5}{100}) = 0,75.$

Opakované závislé pokusy - hypergeometrické rozložení pravděpodobností

Máme N objektů, mezi nimi je M objektů označeno, $0 < M < N$. Náhodně bez vracení vybereme n objektů ($0 < n < N$).

Pravděpodobnost, že ve výběru je právě x označených objektů ($\max(0, M - N + n) \le x \le \min(n, M)$):

$$P_{N,M,n}(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}.$$

Pravděpodobnost, že ve výběru je nejvýše x_1 označených objektů:

$$\sum_{x=\max(0,M-N+n)}^{x_1} P_{N,M,n}(x).$$

Pravděpodobnost, že ve výběru je aspoň x_0 označených objektů:

$$\sum_{x=x_0}^{\min(n,M)} P_{N,M,n}(x).$$

Příklad na hypergeometrické rozložení: Máme skupinu 20 lidí, mezi nimi 4 muže. Vybíráme bez vracení (tj. nikdo nemůže být vybrán opakovaně) pětici z této skupiny. Jaký je nejpravděpodobnější počet mužů mezi vybranými?

Řešení:

Vypočítáme všechny možné pravděpodobnosti a najdeme počet mužů s největší pravděpodobností. Vzhledem k technice výběru (bez vracení) jde o hypergeometrické rozložení pravděpodobností s parametry N = 20, M = 4, n = 5.

Počítáme

$$P_{N,M,n}(x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

pro x = 0, 1, 2, 3, 4.

$$P_{20,4,5}(0) = \dots 281, \quad P_{20,4,5}(1) = \dots 469,$$

$$P_{20,4,5}(2) = \dots 216, \quad P_{20,4,5}(3) = \dots 031,$$

$$P_{20,4,5}(4) = \dots 001$$

(Pro kontrolu – součet vypočítaných pravděpodobností je 1.)

Vidíme, že nejvyšší pravděpodobnost – 0,4696 – je dosažena v případě, kdy mezi pěticí vybraných osob je právě 1 muž.

Stochasticky nezávislé jevy

Za stochasticky nezávislé považujeme takové jevy, kdy informace o nastoupení jednoho jevu nijak neovlivní šance, s nimiž očekáváme nastoupení druhého jevu.

V popisné statistice jsme zavedli četnostní nezávislost dvou množin G_1, G_2 v daném výběrovém souboru pomocí multiplikativního vztahu $p(G_1 \cap G_2) = p(G_1)\,p(G_2)$.

V počtu pravděpodobnosti řekneme, že jevy $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé, jestliže $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2)$. Pro tři jevy budeme požadovat, aby i jevy $A_1 \cap A_2$ a A_3 byly stochasticky nezávislé, což vede ke vztahu $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)$. Tak můžeme pokračovat pro libovolný počet jevů, tedy jevy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé, jestliže platí systém multiplikativních vztahů:

$\forall\, i < j$ $\quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\,P(A_j)$ (dvojmístný multiplikativní vztah)

$\forall\, i < j < k$ $\quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)\,P(A_j)\,P(A_k)$ (trojmístný multiplikativní vztah)

$\vdots$

$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \dots P(A_n)$ (n-místný multiplikativní vztah)

Jevy $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ jsou stochasticky nezávislé, jestliže pro všechna přirozená $n \geq 2$ jsou stochasticky nezávislé jevy $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$.

(Lze snadno ukázat, že jev nemožný resp. jev jistý a libovolný jev jsou stochasticky nezávislé jevy. Jestliže v posloupnosti stochasticky nezávislých jevů nahradíme libovolný počet jevů jevy opačnými, stochastická nezávislost se neporuší. Rovněž tak průniky a sjednocení stochasticky nezávislých jevů jsou stochasticky nezávislé.)

Příklad na stochasticky nezávislé jevy: Nechť A_1, A_2, A_3 jsou stochasticky nezávislé jevy, $P(A_1) = 1/4$, $P(A_2) = 1/3$, $P(A_3) = 1/2$. Jaká je pravděpodobnost, že

a) nastane právě jeden z jevů A_1, A_2, A_3
b) nastanou právě dva z jevů A_1, A_2, A_3
c) nastanou nejvýše dva z jevů A_1, A_2, A_3 ?

Řešení:

ad a)

$$P\left(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3 \cup \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3\right) =$$
$$= P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{2} =$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2+3+6}{24} = \frac{11}{24}$$

ad b) $P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{6}{24}$

ad c) $1-P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = \frac{23}{24}$

Opakované nezávislé pokusy: Nezávisle opakujeme týž náhodný pokus. Nechť jev A_i znamená úspěch v i-tém pokusu, přičemž $P(A_i) = \vartheta$, $i = 1, 2, \ldots$

1. Binomické rozložení pravděpodobností

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane právě x-krát ($0 < \vartheta < 1$):

$$P_n(x) = \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x}.$$

K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce Binom(x; ϑ; n)

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane nejvýše x_1-krát ($0 < \vartheta < 1$):

$$\sum_{x=0}^{x_1} P_n(x).$$

K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce IBinom(x_1; ϑ; n)

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane aspoň x_0-krát ($0 < \vartheta < 1$):

$$\sum_{x=x_0}^{n} P_n(x).$$

Výpočet lze provést takto: 1 - IBinom(x_0 - 1; ϑ; n)

Pravděpodobnost, že v prvních n pokusech úspěch nastane aspoň x_0-krát a nejvýše x_1-krát:

$$\sum_{x=x_0}^{x_1} P_n(x).$$

Výpočet lze provést takto: IBinom(x_1; ϑ; n) - IBinom(x_0 - 1; ϑ; n)

Příklad na binomické rozložení pravděpodobností: Firma se účastní čtyř nezávislých výběrových řízení. Pravděpodobnost, že uspěje v kterémkoliv z nich, je pro všechny konkurzy stejná a je rovna 0,7. Jaká je pravděpodobnost, že firma uspěje

a) právě 2x
b) aspoň 2x
c) nejvýše 2x?

Řešení: Počet pokusů n = 4, pravděpodobnost úspěchu p = 0,7

ad a) $P_4(2) = \binom{4}{2} 0{,}7^2 \, 0{,}3^2 = 0{,}264$

ad b) $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = \binom{4}{2} 0{,}7^2 \, 0{,}3^2 + \binom{4}{3} 0{,}7^3 \, 0{,}3 + \binom{4}{4} 0{,}7^4 = 0{,}916$

ad c) $P_4(0) + P_4(1) + P_4(2) = \binom{4}{0} 0{,}3^4 + \binom{4}{1} 0{,}7 \cdot 0{,}3^3 + \binom{4}{2} 0{,}7^2 \, 0{,}3^2 = 0{,}348$

2. Geometrické rozložení pravděpodobností

Pravděpodobnost, že prvnímu úspěchu bude předcházet x neúspěchů:

$$P(x) = (1-\vartheta)^{x}\vartheta$$

K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce Geom(x; ϑ)

Pravděpodobnost, že prvnímu úspěchu bude předcházet nejvýše x_1 neúspěchů:

$$\sum_{x=0}^{x_1} P(x)$$

K výpočtu v systému STATISTICA slouží funkce IGeom(x_1; ϑ)

Pravděpodobnost, že prvnímu úspěchu bude předcházet aspoň x_0 neúspěchů:

$$1 - \sum_{x=0}^{x_0-1} P(x)$$

Výpočet lze provést takto: 1 - IGeom(x_0-1; ϑ)

Příklad na geometrické rozložení pravděpodobností: Jaká je pravděpodobnost, že při hře „Člověče, nezlob se!“ nasadíme figurku nejpozději při třetím hodu?

Řešení:

Počet neúspěchů: x = 0, 1, 2, pravděpodobnost úspěchu: ϑ

∑ = ∑) ∑ 1 6 = Geom 21/6 = 421

Pravděpodobnost, že figurku nasadíme nejpozději při třetím hodu, je 42,13%.

Příklad na geometrické rozložení pravděpodobností: Studenti biologie zkoumají barvu očí octomilek. Pravděpodobnost, že octomilka má bílou barvu očí, je 0,25, červenou 0,75. Jaká je pravděpodobnost, že až čtvrtá zkoumaná octomilka má bílou barvu očí?

Řešení:

Počet neúspěchů: x = 3, pravděpodobnost úspěchu: ϑ 2

P3 = 750,25 = Geom 30,25 = 105

Pravděpodobnost, že až čtvrtá zkoumaná octomilka má bílou barvu očí, je 10,55%.

3. Negativní binomické rozložení pravděpodobností

Pravděpodobnost, že k-tému úspěchu bude předcházet x neúspěchů:

$$P_k(x) = \Big(\quad + \quad - \quad \Big) \quad - \quad \Big).$$

Pravděpodobnost, že k-tému úspěchu bude předcházet nejvýše x_1 neúspěchů:

$$\sum_{x=0}^{x_1} P_k(x).$$

Pravděpodobnost, že k-tému úspěchu bude předcházet aspoň x_0 neúspěchů:

$$1 - \sum_{x=0}^{x_0 \ 1} P_k(x).$$

Příklad na negativní binomické rozložení pravděpodobností: Hráč hází kostkou tak dlouho, dokud mu nepadnou tři šestky. Jaká je pravděpodobnost, že bude muset hodit kostkou 10 x?

Řešení:

Počet neúspěchů x = 7, protože v 7 z 10 hodů nepadne šestka. Pravděpodobnost úspěchu ϑ

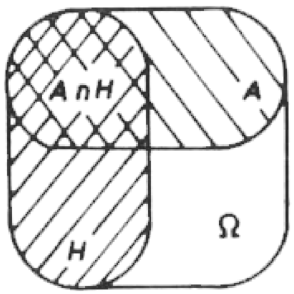
$$P_3(7) = \Big(\quad + \quad - \quad \Big) \Big(\quad \Big)^{7} \Big(\quad \Big)^{3} = \Big(\quad \Big) \frac{\ ^{7}}{\ ^{10}} = \ 046$$

Hledaná pravděpodobnost je 4,65%.

Podmíněná pravděpodobnost

Opakovaně nezávisle provádíme týž náhodný pokus a sledujeme nastoupení jevu A v těch pokusech, v nichž nastoupil jev H. Podmíněnou relativní četnost A za podmínky H jsme v popisné statistice zavedli vztahem $p(A/H) = \frac{p(A \cap H)}{p(H)}$ (za předpokladu, že p(H) > 0). Tato podmíněná relativní četnost se s rostoucím počtem pokusů ustaluje kolem konstanty $P(A/H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}$, kterou považujeme za podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky H.

Ilustrace podmíněné pravděpodobnosti



Příklad na podmíněnou pravděpodobnost: Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padlo sudé číslo, je-li známo, že padlo číslo menší než 5?

Řešení: $\Omega = \{1, \ldots$, A … padlo sudé číslo, $A =$, H … padlo číslo menší než 5, $H =$, $A \cap H =$

$$P(A/H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)} = \frac{\frac{2}{6}}{\quad 6} = 1$$

Vlastnosti podmíněné pravděpodobnosti

Je zřejmé, že jevy A_1, A_2 jsou stochasticky nezávislé, právě když
$P(A_1/A_2) = P(A_1)$ a právě když $P(A_2/A_1) = P(A_2)$.
Okamžitě z definice plyne:
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)$ pro $P(A_1) > 0$,
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)\, P(A_1/A_2)$ pro $P(A_2) > 0$.
Tento multiplikativní vztah lze zobecnit ve větu o násobení pravděpodobností:
$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n/A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$ pro $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Příklad na větu o násobení pravděpodobností: Ze sady 32 karet náhodně vytahujeme po jedné kartě, kterou nikdy nevracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že eso se objeví až ve 4. tahu?

Řešení:
A_i … v i-tém tahu nebylo vybráno eso, i = 1, 2, 3, 4

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1)\, P(A_2/A_1)\, P(A_3/A_1 \cap A_2)\, P(A_4/A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$
$$= \frac{28}{32} \cdot \frac{27}{31} \cdot \frac{26}{30} \cdot \frac{4}{29} = 0{,}0911$$

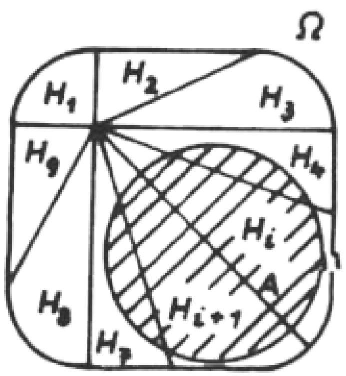
Eso se objeví až ve 4. tahu s pravděpodobností 0,0911.

Vzorec pro úplnou pravděpodobnost a Bayesův vzorec

Jestliže $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{A}$ jsou jevy, které tvoří rozklad jistého jevu (tj. jsou neslučitelné a jejich sjednocením je celý základní prostor – říkáme, že tvoří úplný systém hypotéz), pak pravděpodobnost libovolného jevu $A \in \mathcal{A}$ lze vypočítat pomocí vzorce pro úplnou pravděpodobnost:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A/H_i).$$

Ilustrace vzorce pro úplnou pravděpodobnost



Podmíněnou pravděpodobnost libovolné hypotézy za podmínky, že nastal jev A - tzv. aposteriorní pravděpodobnost $P(H_k/A)$ - lze vypočítat pomocí Bayesova vzorce:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)\, P(A/H_k)}{P(A)}.$$

(Původní pravděpodobnost $P(H_k)$ se nazývá apriorní pravděpodobnost).

Thomas Bayes (1702 – 1761): Anglický kněz a matematik

Příklad na vzorec pro úplnou pravděpodobnost a Bayesův vzorec: U jistého druhu elektrického spotřebiče se s pravděpodobností 0,01 vyskytuje výrobní vada. U spotřebiče s touto výrobní vadou dochází v záruční lhůtě k poruše s pravděpodobností 0,5. Výrobky, které tuto vadu nemají, se v záruční lhůtě porouchají s pravděpodobností 0,01. Jaká je pravděpodobnost, že

a) u náhodně vybraného výrobku nastane v záruční lhůtě porucha,

b) výrobek, který se v záruční lhůtě porouchá, bude mít dotyčnou výrobní vadu?

Řešení:

H_1 - výrobek má dotyčnou výrobní vadu

H_2 - výrobek nemá tuto výrobní vadu

A - výrobek se v záruční době porouchá

Pak je: $P(H_1) = 0,01$, $P(H_2) = 0,99$, $P(A/H_1) = 0,5$, $P(A/H_2) = 0,01$

ad a) $P(A) = P(H_1).P(A/H_1) + P(H_2).P(A/H_2) = 0,01.0,5 + 0,99.0,01 = 0,0149$

ad b) $P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0,005}{0,0149} = 0,338$