

## Téma 12: Neparametrické úlohy o mediánech

### Úkol 1.: Párový znaménkový test a párový Wilcoxonův test

Při zjišťování kvality jedné složky půdy se používají dvě metody označené A a B. Výsledky:

Vzorek	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	0,275	0,312	0,284	0,3	0,365	0,298	0,312	0,315	0,242	0,321	0,335	0,307
B	0,28	0,312	0,288	0,298	0,361	0,307	0,319	0,315	0,242	0,323	0,341	0,315

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že metody A a B dávají stejné výsledky.

**Návod:** Testujeme  $H_0: z_{0,50} = 0$  proti oboustranné alternativě  $H_1: z_{0,50} \neq 0$ , kde  $z_{0,50}$  je medián rozložení, z něhož pochází rozdílový náhodný výběr  $Z_1 = X_1 - Y_1, \dots, Z_{12} = X_{12} - Y_{12}$ .

Vypočteme rozdíly mezi výsledky metod A a B:

$x_i - y_i$ : -0,005, 0, -0,004, 0,002, 0,004, -0,009, -0,007, 0, 0, -0,002, -0,006, -0,008

**Párový znaménkový test:** Nenulových rozdílů je 9, testová statistika  $S_Z^+ = 2$ . Ve statistických tabulkách najdeme pro  $n = 9$  a  $\alpha = 0,05$  kritické hodnoty  $k_1 = 1, k_2 = 8$ . Protože kritický obor  $W = \{1, \dots, 8\}$  neobsahuje hodnotu 2, nemůžeme  $H_0$  zamítnout na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 0,05 metody A a B dávají stejné výsledky.

**Párový Wilcoxonův test:** Absolutní hodnoty nenulových rozdílů uspořádáme vzestupně podle velikosti:

Usp. abs( $x_i - y_i$ ): **0,002**, 0,002, **0,004**, 0,004, 0,005, 0,006, 0,007, 0,008, 0,009

Pořadí 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Průměrné pořadí **1,5** 1,5 **3,5** 3,5 5 6 7 8 9

$S_W^+ = 1,5 + 3,5 = 5$ ,

$S_W^- = 1,5 + 3,5 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$ ,

$n = 9, \alpha = 0,05$ , tabelovaná kritická hodnota pro  $n = 9$  a  $\alpha = 0,05$  je 5, testová statistika =  $\min(S_W^+, S_W^-) = \min(5, 40) = 5$ . Protože  $5 \leq 5$ ,  $H_0$  zamítáme na hladině významnosti 0,05.

#### Postup ve STATISTICE:

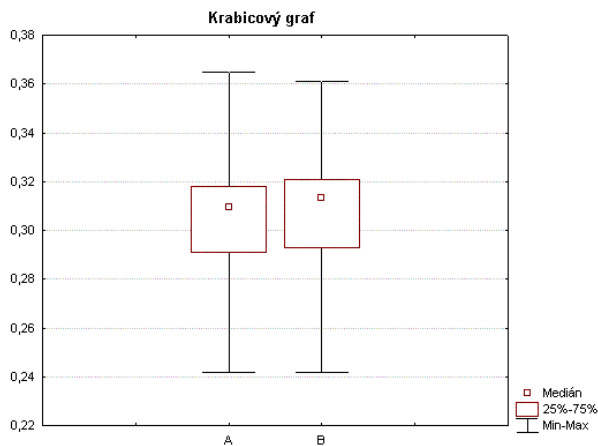
Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými A a B a 12 případy. Do proměnné A napíšeme výsledky metody A, do proměnné B výsledky metody B.

**Provedení párového znaménkového testu:** Statistika – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných A, 2. seznam proměnných B – OK – Znaménkový test.

		Znaménkový test (metody A a B) Označené testy jsou významné na hladině významnosti 0,05			
Dvojice proměnných		Počet různých	procento $v < v_0$	Z	Uroveň významnosti
A	& B	9	77,77	1,333	0,182

Vidíme, že nenulových hodnot  $n = 9$ . Z nich záporných je 77,78%, tj. 7. Hodnota testové statistiky  $S_Z^+ = 9 - 7 = 2$ . Asymptotická testová statistika  $U_0$  (zde označená jako Z) se realizuje hodnotou 1,3333. Odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,182422, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že obě metody dávají stejné výsledky.

**Grafické znázornění výsledků:** Návrat do Porovnání dvou proměnných – Krabicový graf všech proměnných – Proměnné X, Y – OK – ponecháme implicitní nastavení krabicového diagramu – OK.



Z krabicových diagramů je vidět, že obě metody se poněkud liší v úrovni, ale neliší se ve variabilitě.

**Provedení Wilcoxonova testu:** Návrat do Porovnání dvou proměnných – Wilcoxonův párový test. Výstupní tabulka poskytne hodnotu testové statistiky (ozn. T), hodnotu asymptotické testové statistiky  $U_0$  a p-hodnotu pro  $U_0$ . (STATISTICA tedy nezohledňuje omezení  $n \geq 30$  pro použití  $U_0$ .)

Dvojice prom.		Wilcoxonův párový test (metody)		
		Počet platný	T	Uroveň
A	& B	15,000	2,073	0,038

V tomto případě je p-hodnota 0,038153, tedy nulová hypotéza se zamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05. Ze srovnání p-hodnot pro znaménkový test a pro Wilcoxonův test plyne, že Wilcoxonův test je silnější.

### Úkol 2.: Jednovýběrový znaménkový test a jednovýběrový Wilcoxonův test

Vyráběné ocelové tyče mají kolísavou délku s předpokládanou hodnotou mediánu 10 m.

Náhodný výběr 10 tyčí poskytl tyto výsledky:

9,83 10,10 9,72 9,91 10,04 9,95 9,82 9,73 9,81 9,90

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že předpoklad o mediánu délky tyčí je oprávněný.

**Návod:** Testujeme  $H_0: x_{0,50} = 10$  proti oboustranné alternativě  $H_1: x_{0,50} \neq 10$ . Vypočteme rozdíly mezi naměřenými délkami a konstantou 10:

$x_i - 10$ : -0,17, 0,1, -0,28, -0,09, 0,04, -0,05, -0,18, -0,27, -0,19, -0,1

**Jednovýběrový znaménkový test:** Nenulových rozdílů je 10, testová statistika  $S_Z^+ = 2$ . Ve statistických tabulkách najdeme pro  $n = 10$  a  $\alpha = 0,05$  kritické hodnoty  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 9$ . Protože kritický obor  $W = \{1, \dots, 9\}$  neobsahuje hodnotu 2,  $H_0$  nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

**Párový Wilcoxonův test:** Absolutní hodnoty nenulových rozdílů uspořádáme vzestupně podle velikosti:

Usp. abs( $x_i - y_i$ ): **0,04**, 0,05, 0,09, **0,1**, 0,1, 0,17, 0,18, 0,19, 0,27, 0,28  
 Pořadí 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10  
 Průměrné pořadí **1** 2 3 **4,5** 4,5 6 7 8 9 10

$$S_w^+ = 1 + 4,5 = 5,5,$$

$$S_w^- = 2 + 3 + 4,5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 49,5,$$

$n = 10$ ,  $\alpha = 0,05$ , tabelovaná kritická hodnota pro  $n = 10$  a  $\alpha = 0,05$  je 8, testová statistika =  $\min(S_w^+, S_w^-) = \min(5,5; 49,5) = 5,5$ . Protože  $5,5 \leq 8$ ,  $H_0$  zamítáme na hladině významnosti 0,05. Vidíme, že Wilcoxonův test dospěl k odlišnému závěru než znaménkový test.

### Postup ve STATISTICE:

Vytvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými X a konst a 10 případy. Do proměnné X napíšeme měřené délky tyčí, do proměnné konst uložíme číslo 10.

**Provedení jednovýběrového znaménkového testu:** Statistika – Neparametrická statistika – Porovnání dvou závislých vzorků – OK – 1. seznam proměnných X, 2. seznam proměnných konst – OK – Znaménkový test.

Dvojice prom	Znaménkový test (délka tyčí.sta)			
	Počet různých	procento $v < \sqrt{n}$	Z	Uroveň
X& konst	7	80,00	1,581	0,113

Vidíme, že nenulových hodnot  $n = 10$ . Z nich záporných je 80%, tj. 7. Hodnota testové statistiky  $S_z^+ = 10 - 8 = 2$ . Asymptotická testová statistika  $U_0$  (zde označená jako Z) se realizuje hodnotou 1,5811. Odpovídající asymptotická p-hodnota je 0,113846, tedy na asymptotické hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že medián délky tyčí je 10

**Provedení Wilcoxonova testu:** Návrat do Porovnání dvou proměnných – Wilcoxonův párový test. Výstupní tabulka poskytne hodnotu testové statistiky (ozn. T), hodnotu asymptotické testové statistiky  $U_0$  a p-hodnotu pro  $U_0$ . (STATISTICA tedy nezohledňuje omezení  $n \geq 30$  pro použití  $U_0$ .)

Dvojice prom	Wilcoxonův párový test (délka tyčí)			
	Počet platný	T	Z	Uroveň
X& konst	7	5,500	2,242	0,024

V tomto případě je p-hodnota 0,0249, tedy nulová hypotéza se zamítá na asymptotické hladině významnosti 0,05.

### Úkol 3.: Dvouvýběrový Wilcoxonův test

Majitel obchodu chtěl zjistit, zda velikost nákupů (v dolarech) placených kreditními kartami Master/EuroCard a Visa jsou přibližně stejné. Náhodně vybral 7 nákupů placených Master/EuroCard: 42 77 46 73 78 33 37 a 9 placených Visou: 39 10 119 68 76 126 53 79 102. Lze na hladině významnosti 0,05 tvrdit, že velikost nákupů placených těmito dvěma typy karet se shodují?

**Návod:** Na hladině významnosti 0,05 testujeme  $H_0: x_{0,50} - y_{0,50} = 0$  proti oboustranné alternativě  $H_1: x_{0,50} - y_{0,50} \neq 0$ .

usp. hodnoty 10 33 37 39 42 46 53 68 73 76 77 78 79 102 119 126  
 pořadí  $x_i$  2 3 5 6 9 11 12  
 pořadí  $y_i$  1 4 7 8 10 13 14 15 16

$$T_1 = 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 12 = 48, T_2 = 1 + 4 + 7 + 8 + 10 + 13 + 14 + 15 + 16 = 88$$

$$U_1 = 7.9 + 7.8/2 - 48 = 43, U_2 = 7.9 + 9.10/2 - 88 = 20$$

Kritická hodnota pro  $\alpha = 0,05$ ,  $\min(7,9) = 7$ ,  $\max(7,9) = 9$  je 12. Protože  $\min(43,20) = 20 > 12$ , nemůžeme na hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že velikosti nákupů placených kreditními kartami Master/EuroCard a Visa se shodují.

### Postup ve STATISTICCE:

Utvoříme nový datový soubor se dvěma proměnnými a 17 případy. Do proměnné X napíšeme zjištěné hodnoty nákupů a do proměnné ID napíšeme 7x číslo 1 pro kartu Master/EuroCard a 9x číslo 2 pro kartu Visa.

Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání dvou nezávislých vzorků – OK –

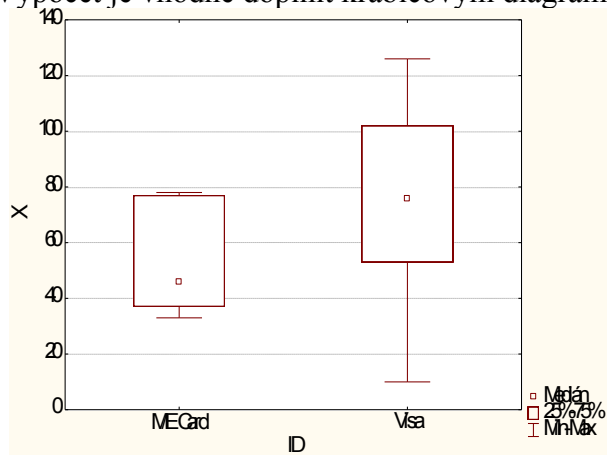
Proměnné – Seznam závislých proměnných X, Nezáv. (grupov.) proměnná ID – OK – M-W U test.

Mann-Whitneyuv U test (kreditní karty.sta)										
Dle proměn. ID										
Označené testy jsou významné na hladině $p < ,05000$										
Promě.	Sčt po M/E C	Sčt po Visa	U	Z	Uroveň uprave	Z	Uroveň uprave	N plat M/E C	N plat Visa	2*1 str. přesné p
X	48,00	88,00	20,00	-1,21	0,223	-1,21	0,223	7	9	0,252

Ve výstupní tabulce jsou součty pořadí  $T_1$ ,  $T_2$ , hodnota testové statistiky  $\min(U_1, U_2)$  ozn. U, hodnota asymptotické testové statistiky  $U_0$  (ozn. Z), p-hodnota pro  $U_0$  a přesná p-hodnota (ozn. 2\*1 str. přesné p – ta se používá pro rozsahy výběrů pod 30).

V našem případě přesná p-hodnota = 0,252273, tedy  $H_0$  nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Výpočet je vhodné doplnit krabicovým diagramem typu Median/Quart/Range



### Úkol 4.: Kruskalův – Wallisův test a mediánový test

Voda po holení jisté značky se prodává ve čtyřech různých lahvičkách stejného obsahu. Údaje o počtu prodaných lahviček za týden v různých obchodech:

1.typ: 50 35 43 30 62 52 43 57 33 70 64 58 53 65 39

2.typ: 31 37 59 67 44 49 54 62 34 42 40

3.typ: 27 19 32 20 18 23

4.typ: 35 39 37 38 28 33.

Posuďte na 5% hladině významnosti, zda typ lahvičky ovlivňuje úroveň prodeje.

**Návod:** Všech 38 hodnot uspořádáme vzestupně podle velikosti a stanovíme součet pořadí hodnot patřících do 1. až 4. výběru.

$$T_1 = 379, T_2 = 257, T_3 = 24, T_4 = 81$$

$$Q = \frac{12}{n(n+1)} \sum_{j=1}^r T_j^2 - 3(n+1) = \frac{12}{38(39)} \left( 15^2 + 11^2 + 6^2 + 6^2 \right) - 3 \cdot 39 = 37,5$$

$$W = \frac{2}{r-1} \frac{r-1}{\infty} \frac{2,095}{3,000} \frac{7,815}{\infty}$$

Protože  $Q < Q_{0,05}$ ,  $H_0$  zamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

### Postup ve STATISTICE:

Vytvoříme nový datový soubor o dvou proměnných X a typ a 38 případech. Do proměnné X napíšete zjištěné údaje o prodeji, do proměnné typ 15 x jedničku, 11 x dvojkou, 6 x trojku a 6 x čtyřku.

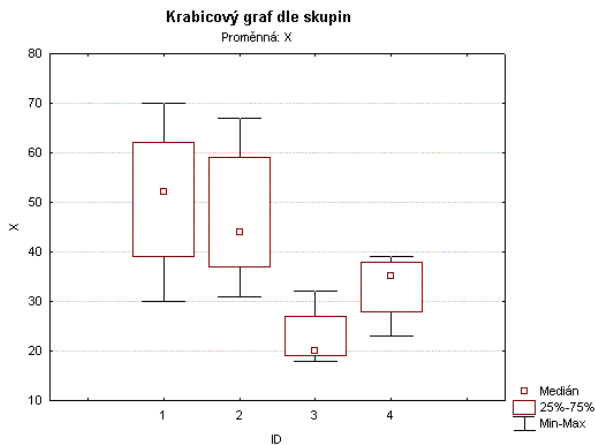
Statistiky – Neparametrická statistika – Porovnání více nezávislých vzorků - OK – Seznam závislých proměnných X, Nezáv. (grupovací) proměnná typ – OK – Shrnutí: Kruskal-Wallisova ANOVA a mediánový test. Ve dvou výstupních tabulkách se objeví výsledky K-W testu a mediánového testu.

Kruskal-Wallisova ANOVA závislých proměnných X			
Nezávislá (grupovací) proměnná: typ			
Kruskal-Wallisův test: $H(3, N=38) = 18,375$			
Závislá X	Kód	Počet platný	Součet pořadí
1	1	15	379,0
2	2	11	257,0
3	3	6	24,0
4	4	6	81,0

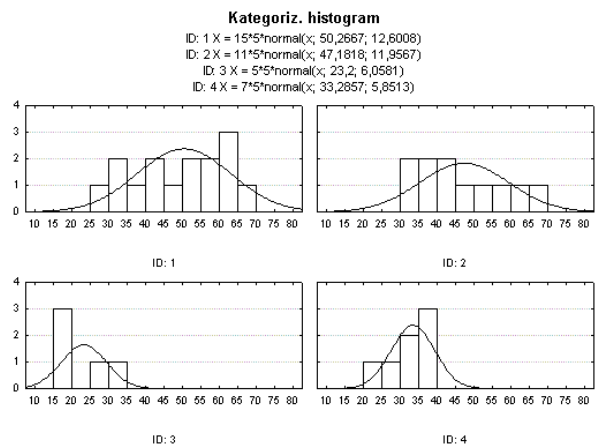
Mediánový test, celk. medián = 3,500					
Nezávislá (grupovací) proměnná: typ					
Chi-Kvadr. = 17,53939 sv = 3 p = ,000					
Závislá X	1	2	3	4	Celkem
<= Medián: počet	4,000	3,000	6,000	6,000	19,000
oček	7,500	5,500	3,000	3,000	
poz.-	-3,500	-2,500	3,000	3,000	
> Medián: počet	11,000	8,000	0,000	0,000	19,000
oček	7,500	5,500	3,000	3,000	
poz.-	3,500	2,500	-3,000	-3,000	
Celkem:	15,000	11,000	6,000	6,000	38,000

Oba testy zamítají hypotézu o shodě mediánů v daných čtyřech skupinách, ale K-W test je poněkud silnější (p-hodnota = 0,0003, zatímco p-hodnota pro mediánový test je 0,0005).

Grafické znázornění výsledků: návrat do Kruskal-Wallisova ANOVA a mediánový test – Krabicový graf – Proměnná X – OK – Typ grafu: Medián/kvartily/Rozpětí – OK.



Je vidět, že úroveň prodeje pro 1. typ je nevyšší, zatímco pro 3. typ nejnižší. Dále je možno vytvořit histogramy proměnné X ve všech čtyřech skupinách: návrat do Kruskal-Wallisova ANOVA a mediánový test – Kategoriz. histogram - Proměnná X – OK.



Nyní provedeme mnohonásobné porovnávání, abychom zjistili, které dvojice typů lahvíček se liší na hladině významnosti 0,05: návrat do Kruskal-Wallisova ANOVA a mediánový test, Vícenás. porovnání průměrného pořadí pro vš. sk.

Vícenásobné porovnání průměrného pořadí (př. 1)				
Nezávislá (grupovací) proměnná :				
Kruskal-Wallisův test: $H(3, N=38) = 18$				
Závislá X	1	2	3	4
	R: 25,4	R: 23,4	R: 4,0	R: 13,4
1		1,000	0,000	0,170
2	1,000		0,003	0,481
3	0,000	0,003		0,832
4	0,170	0,481	0,832	

Vidíme, že se liší typy (1, 3) a (2, 3).

### Úkoly k samostatnému řešení

1. Ve skupině 12 studentů se sledovala srdeční frekvence při změně polohy z lehu do stoje. Získaly se tyto rozdíly počtu tepů srdce za 1 minutu: -2 4 8 25 -5 16 3 1 12 17 20 9. Za předpokladu, že tyto rozdíly mají symetrické rozložení, testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že medián rozdílů obou tepových frekvencí je 15 proti oboustranné alternativě. (Výsledek: znaménkový a Wilcoxonův test nulovou hypotézu nezamítají na hladině významnosti 0,05, avšak asymptotická varianta Wilcoxonova testu ano.)

2. Z produkce tří podniků vyrábějících televizory bylo vylosováno 10, 8 a 12 kusů. Byly získány následující výsledky zjišťování citlivosti těchto televizorů v mikrovoltech:

1.podnik: 420 560 600 490 550 570 340 480 510 460

2.podnik: 400 420 580 470 470 500 520 530

3.podnik: 450 700 630 590 420 590 610 540 740 690 540 670

Ověřte na hladině významnosti 0,05 hypotézu o shodě úrovně citlivosti televizorů v jednotlivých podnicích.

(Výsledek: na hladině významnosti 0,05 se liší televizory vyráběné ve 2. a 3. podniku.)