Téma 9: Parametrické úlohy o dvou nezvislých náhodných výběrech z normálních rozložení

Úkol 1.: Vlastnosti rozdílu výběrových průměrů ze dvou normálních rozložení
Jsou dány dva nezávislé náhodné výběry, první pochází z rozložení N(2; 1,5) a má rozsah 10, druhý pochází z rozložení N(3; 4) a má rozsah 5. Jaká je pravděpodobnost, že výběrový průměr 1. výběru bude menší než výběrový průměr 2. výběru?

Návod:
Počítáme $P(M_1 < M_2) = P(M_1 - M_2 < 0) = \Phi(0)$,
kde $\Phi(x)$ je distribuční funkce statistiky $M_1 - M_2$.

Statistika $M_1 - M_2$ se řídí rozložením $N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$, kde $\mu_1 - \mu_2 = 2 - 3 = -1$,

$\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{1,5}{10} + \frac{4}{5} = 0,95$, tj. statistika $M_1 - M_2 \sim N(-1;0,95)$.

Otevřeme nový datový soubor o jedné proměnné a jednom případu. Do Dlouhého jména této proměnné napíšeme = INormal(0;-1;sqrt(0,95)). Dostaneme výsledek 0,847549.

Úkol 2.: Intervaly spolehlivosti pro parametrické funkce μ_1-μ_2, σ_1^2/σ_2^2
Bylo vylosováno 11 stejně starých selat téhož plemene. Šesti z nich byla předepsána výkrmná dieta č. 1 a zbylým pěti výkrmná dieta č. 2. Průměrné denní přírůstky v Dg za dobu půl roku jsou následující:

dieta č. 1: 62, 54, 55, 60, 53, 58
dieta č. 2: 52, 56, 49, 50, 51.

Zjištěné hodnoty považujeme za realizace dvou nezávislých náhodných výběrů pocházejících z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
a) Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.
b) Za předpokladu, že data pocházejí z rozložení $N(\mu_1, \sigma^2)$ a $N(\mu_2, \sigma^2)$, sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot μ_1 - μ_2.

Návod:
Vytvoříme datový soubor o 2 proměnných a 11 případech. První proměnnou nazveme hmotnost, druhou dieta. Do proměnné hmotnost zapíšeme zjištěné údaje o hmotnosti, do proměnné dieta napíšeme 1 pro 1. dietu a 2 pro 2. dietu. Pomocí Popisných statistik zjistíme realizace výběrových průměrů, výběrových rozptylů a výběrových směrodatných odchylek.

Pro první dietu:

	Popisné statistiky (Tabulka1 Zhrnout podmínku: v2=1			
Promě	N platn	Prům	Rozpt	Sm.od
hmotn	6	57,00	12,80	3,577

Pro druhou dietu:

	Popisné statistiky (Tabulka1 Zhrnout podmínku: v2=2			
Promě	N platn	Prům	Rozpt	Sm.od
hmotn	5	51,60	7,300	2,701

ad a)
Meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro podíl rozptylů jsou:

$$(d, h) = \left(\frac{s_1^2/s_2^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{s_1^2/s_2^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)} \right).$$

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případu.
Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme
=(12,8/7,3)/VF(0,975;5;4)
(Funkce VF(x;ný;omega) počítá x-kvantil Fisherova – Snedecorova rozložení F(ný, omega).)
Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme
=(12,8/7,3)/VF(0,025;5;4)

	1 d	2 h
1	0,187	12,95

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy platí: $0,1872 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 12,954$.

ad b) Meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot (v případě, že rozptyly neznáme, ale víme, že jsou shodné) jsou:

$$(d, h) = \left(m_1 - m_2 - S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2),\ m_1 - m_2 + S_* \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\, t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right).$$

Otevřeme nový datový soubor o dvou proměnných d a h a jednom případu.
Do Dlouhého jména proměnné d napíšeme
=57-51,6-sqrt((5*12,8+4*7,3)/9)*sqrt((1/6)+(1/5))*VStudent(0,975;9)
Do Dlouhého jména proměnné h napíšeme
=57-51,6+sqrt((5*12,8+4*7,3)/9)*sqrt((1/6)+(1/5))*VStudent(0,975;9)

	1 d	2 h
1	0,991	9,808

S pravděpodobností aspoň 0,95 tedy 0,99 Dg < $\mu_1 - \mu_2$ < 9,81 Dg.

Úkol k samostatnému řešení: Jsou dány dva nezávislé náhodné výběry o rozsazích $n_1 = 25$, $n_2 = 10$, první pochází z rozložení $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, druhý z rozložení $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, kde parametry μ_1, μ_2, σ_1^2, σ_2^2 neznáme. Byly vypočteny realizace výběrových rozptylů: $s_1^2 = 1,7482$, $s_2^2 = 1,7121$. Sestrojte 95% empirický interval spolehlivosti pro podíl rozptylů.
Výsledek:
$0,28 < \sigma_1^2/\sigma_2^2 < 2,76$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

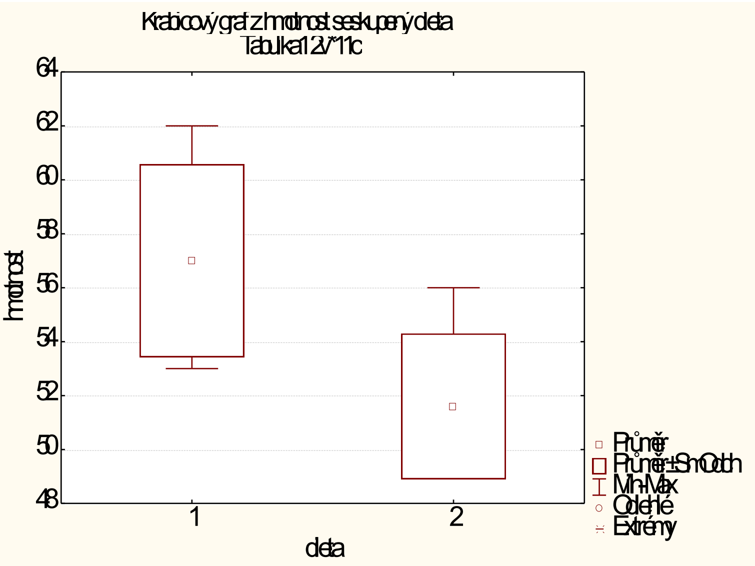
Úkol 3.: Testování hypotéz o parametrických funkcích $\mu_1-\mu_2$, σ_1^2/σ_2^2
Pro datový soubor z úkolu 2 testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že
a) rozptyly hmotnostních přírůstků selat při obou výkrmných dietách jsou shodné
b) obě výkrmné diety mají stejný vliv na hmotnostní přírůstky selat.

Návod:
Provedeme dvouvýběrový t-test současně s testem o shodě rozptylů:

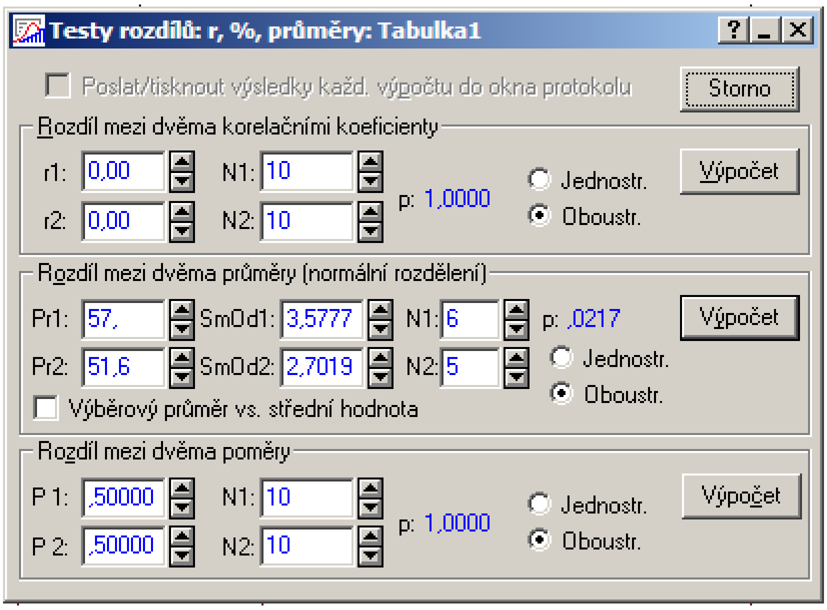
Statistika – Základní statistiky a tabulky – t-test, nezávislé, dle skupin – OK, Proměnné – Závislé proměnné hmotnost, Grupovací proměnná dieta – OK.

	t-testy; grupováno: dieta (Tabulka1) Skup. 1: 1 Skup. 2: 2										
Proměi	Prům 1	Prům 2	t	sv	p	Poč.p 1	Poč.pl 2	Sm.od 1	Sm.od 2	F-pom Rozpt	p Rozpt
hmotn	57,00	51,60	2,771	9	0,021	6	5	3,577	2,701	1,753	0,606

Testová statistika pro test shody rozptylů se realizuje hodnotou 1,7534, odpovídající p-hodnota je 0,6063, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o shodě rozptylů. (Upozornění: v případě zamítnutí hypotézy o shodě rozptylů je zapotřebí v tabulce t-testu pro nezávislé vzorky dle skupin zaškrtnout volbu Test se samostatnými odhady rozptylu.)
Dále z tabulky plyne, že testová statistika pro test shody středních hodnot se realizuje hodnotou 2,7712, počet stupňů volnosti je 9, odpovídající p-hodnota 0,0217, tedy hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,05. Znamená to, že s rizikem omylu nejvýše 5% se prokázalo, že obě výkrmné diety se liší účinností.
Tabulku ještě doplníme krabicovými diagramy. Na záložce Detaily zaškrtneme krabicový graf a vybereme volbu Průměr/SmOdch/Min-Max.



Upozornění: Dvouvýběrový t-test lze v systému STATISTICA provést ještě jiným způsobem, který je vhodný zvláště tehdy, známe-li realizace výběrových průměrů a výběrových směrodatných odchylek.
Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení) – do políčka Pr1 napíšeme 57, do políčka SmOd1 napíšeme 3,5777, do políčka N1 napíšeme 6, do políčka Pr2 napíšeme 51,6, do políčka SmOd1 napíšeme 2,7019, do políčka N1 napíšeme 5 - Výpočet.



Dostaneme p-hodnotu 0,0217, tedy zamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

Úkol k samostatnému řešení: Do systému STATISTICA načtěte datový soubor studentky.sta, který obsahuje údaje o výšce 48 studentek VŠE v Praze (proměnná vyska) a obor jejich studia (1 – národní hospodářství, 2 – informatika).
a) Na hladině významnosti 0,1 testujte hypotézu o shodě rozptylů výšek studentek v daných dvou oborech studia.
b) Na hladině významnosti 0,1 testujte hypotézu o shodě středních hodnot výšek studentek v daných dvou oborech studia.
(Výpočet doplňte krabicovými diagramy.)
Výsledek:
ad a) Protože p-hodnota F-testu je 0,1249, což je větší než hladina významnosti 0,1, nulovou hypotézu o shodě rozptylů nezamítáme na hladině významnosti 0,1.
ad b) Protože p-hodnota dvouvýběrového t-testu je 0,0878, což je menší než hladina významnosti 0,1, nulovou hypotézu o shodě středních hodnot zamítáme na hladině významnosti 0,1.