Tomáġ Hanzák, Marek Mikoġka
MFF UK
obor PravdŊpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Optimalizace II s aplikací ve financích

(EKN004)

LS 2005 / 06

Zápoḷtová úloha

MarkowitzŢv model

Obsah

Zadání úlohy

Potřebujete připravit pro své klienty vhodná akciová portfolia pro investování 2 mil. Kč na období jednoho roku. Pro selekci portfólií složených z několika vybraných titulů (8-10) jste se rozhodli využít Markowitzův model.

a) Sestavte efektivní hranici portfólií (graficky prezentujte). Vyberte některá portfólia na efektivní hranici a uveďte jejich složení (váhy) a očekávané výnosnosti titulů zastoupených v portfóliu.

b) Jak se změní efektivní hranice, pokud budete mít možnost investovat do bezrizikového aktiva (depozita v bance). Nalezněte sami příslušnou úrokovou sazbu.

c) Jak se změní efektivní hranice, pokud budete mít možnost výpůjček od správce portfólia až do 30% hodnoty portfólia. Pro jednoduchost předpokládejte, že výpůjční sazba je stejná jako depozitní. Dokázali byste zohlednit rozdílnou depozitní a výpůjční sazbu? (nalezněte ji).

d) Co když budete mít povoleny krátké prodeje, až do 30 % počátečního vkladu? Nakreslete efektivní hranici v tomto případě.

e) V souladu s vnitřní politikou investiční společnosti, kterou zastupujete, nesmíte navrhnout portfólia, kde některý z titulů přesáhne 15% váhu v celkovém portfóliu. Nakreslete hranici efektivních portfólií v tomto případě.

Zdůvodněte jak jste získali odhady vstupních parametrů modelu, jaké jste volili tituly a proč. Efektivní hranice počítejte numericky, stačí aproximace pro "dostatečně hustý nosič". V případech a) - e) vyberte některé z efektivních portfólií a spočtěte jeho VaR(95%).

Markowitzův model

Ve svém článku z roku 1952 navrhl Harry Markowitz způsob volby vhodného portfólia cenných papírů (dále budeme mluvit jen o akciích). Podle něj by měl investor hledět jednak na očekávaný výnos svého portfólia, který by měl být co možná největší, ale také na (nějak kvantifikované) riziko investice, které by naopak mělo být požadováno co možná nejmenší. Markowitzův přístup je považován za průlomový právě kvůli explicitnímu zahrnutí hlediska rizika do procesu volby portfólia.

Uvažujme investora, který chce svůj kapitál investovat v různé míře do některých z *J* akcií. Investice je plánována pro všechny akcie na shodné časové období pevné délky. Výnosnost akcie, definovaná jako relativní zisk z rozdílné nákupní ceny na začátku období a prodejní ceny na konci období vztažený k počáteční ceně, je považována za náhodnou veličinu s konečnou střední hodnotou a konečným rozptylem, které jsou investorovi známé. Dále jsou známy i kovariance mezi výnosnostmi jednotlivých akciových titulů. Investor volí způsob, jakým svůj kapitál rozdělí mezi jednotlivé z J akcií tak, aby vzniklé portfólio mělo maximální střední hodnotu výnosnosti a současně minimální hodnotu rozptylu výnosnosti. Proto se také někdy hovoří o *mean-variance* modelu.

Matematická formulace modelu je poměrně snadná. Předpokládejme, že náhodný vektor výnosností $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_J)^T$ má střední hodnotu $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_J)^T$ a varianční matici $\boldsymbol{V}$. Naším úkolem je zvolit vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_J)^T$, určující kolik kapitálu o celkové výši 1 jednotky bude investováno do kterého titulu. To představuje podmínku $x_1 + \ldots + x_J = 1$ spolu s $\mathbf{x} \geq 0$.

Výnosnost zvoleného portfólia jako celku je

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) = x_1 \rho_1 + \ldots + x_J \rho_J = \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{x}$$

se střední hodnotou $r(\mathbf{x}) = E[\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})] = \mathbf{r}^T \mathbf{x}$ a rozptylem $\sigma^2(\mathbf{x}) = \operatorname{var}[\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})] = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}$. Volbu portfólia je tedy možné chápat jako úlohu vícekriteriálního programování

$$\text{maximalizovat } \left(\mathbf{r}^T \mathbf{x}, -\mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x}\right)$$

$$\text{za podmínek } \sum_{j=1}^{J} x_j = 1 \text{ a } \mathbf{x} \geq 0.$$

Klíčovým pojmem je *eficientní portfólio* $\boldsymbol{x}$, které má následující vlastnost: neexistuje jiné portfólio $\mathbf{x}^*$ takové, že by současně platilo $r(\mathbf{x}^*) \geq r(\mathbf{x})$ a $\sigma^2(\mathbf{x}^*) \geq \sigma^2(\mathbf{x})$ a alespoň jedna z nerovnostní byla splněna jako ostrá. Portfólio, které není eficientní, si tedy podle uvedeného modelu racionální investor nikdy nevybere; existuje totiž jednoznačně lepší portfólio $\mathbf{x}^*$. Naším úkolem je najít všechna eficientní portfólia, z nichž si investor zvolí jediné podle svého uvážení, především s ohledem na svojí osobní míru averze vůči riziku.

Graficky se výsledky Markowitzova modelu prezentují pomocí tzv. (σ, r)*-roviny*. Každé portfólio je zde reprezentováno bodem, jehož horizontální souřadnice je směrodatná odchylka jeho výnosnosti σ a vertikální souřadnice jeho střední výnosnost *r*. Preferovaná jsou tedy portfólia ležící v této rovině "vlevo nahoře". Nejvíce nás přirozeně zajímá tzv. *efektivní hranice*, což je množina bodů odpovídajících eficientním portfóliím. Do (σ, r)-roviny můžeme nakonec zakreslit i systém indiferentních užitkových křivek konkrétního investora a nalézt tak pro něj optimální portfólio.

Markowitzův model je pochopitelně založen na některých zjednodušujících předpokladech. Například zanedbáváme transakční náklady spojené s obchodováním, neuvažujeme možnost arbitráže (tj. nákupu a okamžitého prodeje cenného papíru na různých trzích). Předpokládáme možnost investovat neomezeně do nekonečně dělitelných dokumentů a také to, že naše vlastní rozhodnutí o koupi daného titulu neovlivní jeho budoucí vývoj. Velkým praktickým problémem je předpoklad znalosti charakteristik rozdělení náhodného vektoru výnosností.

Zisk a zpracování dat

Než je možné přistoupit k samotnému použití Markowitzova modelu, tj. k řešení výše uvedené úlohy vicekriteriální optimalizace, je nutné učinit několik věcí. Předně musíme z nepřeberného množství akciových titulů obchodovaných po celém světě vybrat několik (v našem případě 8), z nichž budeme naše portfólio skládat. Dále je nutné pro zvolené akciové tituly nalézt potřebná data - historický vývoj jejich tržních cen za určité zvolené období. Z těchto dat musíme pak nějakým způsobem získat odhady středních výnosností (vektor **r**) a odhad varianční matice výnosností (matice **V**). Všem těmto věcem je postupně věnována tato kapitola.

Výběr akciových titulů

Při výběru společností, jejichž akcie zahrneme do našeho modelu, jsme se řídili několika jednoduchými zásadami. Předně jsme se omezili pouze na společnosti působící v ČR a jejichž akcie se obchodují na Pražské burze cenných papírů. Tím nám odpadly problémy s přepočítáváním cen akcií pomocí měnových kurzů, které se také vyvíjejí v čase. Investice do domácích akcií s sebou určitě nese nižší transakční náklady (jejich význam samozřejmě závisí na objemu investované částky), které Markowitzův model nebere v úvahu. A v neposlední řadě jsme si tím ulehčili práci se získáváním potřebných dat stejně jako všeobecných informací o zvolených firmách (např. výplaty dividend).

Dále jsme se soustředili na nejznámější a nejčastěji obchodované akciové tituly, tzv. *blue chips*. To odráží náš jistý konservatismus v přístupu k volbě titulů. Takovou volbu by například ocenil malý soukromý investor, který by tak mohl každý večer na obrazovce veřejnoprávní televize sledovat vývoj hodnoty svého portfólia.

Naše pozornost padla okamžitě na systém SPAD (Systém pro Podporu trhu Akcií a Dluhopisů), kde jsou obchodovány právě takové akciové tituly. Bohužel ne u všech zde zastoupených titulů jsou k dispozici tržní ceny za námi požadované časové období zpět. Takto jsme museli vyloučit akcie CETV a Zentivy. Nyní nám zbylo 6 společností, které jsem doplnily společnostmi *Stavby silnic a železnic* a *Východočeské plynárny* na požadovaný minimální počet 8.

Zde je tedy výsledná skupina společností, jejichž akcie budeme nakupovat, spolu se stručnými firemními profily:

ČESKÝ TELECOM, a. s.
www.telecom.cz

Člen skupiny ČESKÝ TELECOM (dále např. Eurotel Praha, spol. s r. o.) je přední česká telekomunikační společnost. Poskytuje komplexní nabídku hlasových a datových služeb v pevných linkách (jejich počet 3.368.325 k 31.12. 2004) včetně nabídky na využívání síťové infrastruktury pro provozovatele a poskytovatele veřejných i neveřejných sítí a služeb. Na základě dohody se státem provozuje též veřejné telefonní stanice.

ČEZ, a. s.
www.cez.cz

Akciová společnost ČEZ byla založena v roce 1992 Fondem národního majetku ČR, jenž je doposud majoritním vlastníkem jejích akcií. Hlavním předmětem činnosti ČEZ, a. s., je výroba a prodej elektřiny a s tím související podpora elektrizační soustavy. Zároveň se zabývá výrobou, rozvodem a prodejem tepla.

Erste Bank
www.erste.cz

Erste bank je rakouská univerzální banka. Zaměřuje na drobnou klientelu, ale poskytuje také služby korporátním klientům. Banka má své pobočky v Rakousku, České republice, Slovenku, Maďarsku a v Chorvatsku. Nově probíhá akvizice banky v Rumunsku. Na českém bankovním trhu se Erste angažuje prostřednictvím svého vlastnictví České spořitelny.

Komerční banka, a. s.
www.kb.cz

Komerční banka patří k nejvýznamnějším bankovním institucím v České republice. Poskytuje komplexní služby v oblasti drobného, podnikového a investičního bankovnictví. 7.400 zaměstnanců Komerční banky obsluhuje více než 1.450.000 klientů, kteří mohou využít rozsáhlé sítě 359 obchodních míst a 607 bankomatů v ČR.

PHILIP MORRIS ČR, a. s.
www.philipmorrisinternational.com

Společnost Philip Morris International se sídlem ve švýcarském Lausanne je jednou z největších tabákových společností na světě. Česká pobočka sídlí v Kutné Hoře a zaujímá nadpoloviční podíl na domácím trhu s tabákem. Pod křídla společnosti patří značky jako Petra, Start či Marlboro.

Stavby silnic a železnic, a. s.
www.ssz.cz

Byly založeny v roce 1952 jako jeden z významných českých podniků činných v oblasti dopravně - inženýrského stavitelství. V roce 1992 získala majoritní podíl v akciové společnosti francouzská silničářská společnost Entreprise Jean Lefebvre. SSŽ získává zakázky především od Ředitelství silnic a dálnic ČR, Správy železniční dopravní cesty, s. o., měst, obcí a krajů ČR.

UNIPETROL, a. s.
www.unipetrol.cz

Unipetrol je skupina společností působících v České republice v sektoru chemického průmyslu zejména v oblastech rafinérského zpracování ropy, petrochemie, agrochemie a kvalifikované chemie. Ve všech těchto oblastech patří mezi nejvýznamnější představitele daného průmyslového odvětví v České republice a střední Evropě.

Východočeská plynárenská, a. s.
www.vcp.cz

Východočeská plynárenská, a.s. byla založena Fondem národního majetku ČR na konci roku 1993 jako jedna z osmi plynárenských distribučních společností v ČR. Hlavní předmět podnikání společnosti se sídlem v Hradci Králové je nákup, rozvod a prodej zemního plynu, investiční výstavba, údržba, rekonstrukce rozvodných plynárenských zařízení. Na východě Čech zásobuje čtvrt milionu odběratelů zemním plynem v 528 městech a obcích.

Získávání dat

Data ke zvoleným akciovým titulům jsme získávali na internetovém serveru www.akcie.com. Zde je možné ke každému titulu dohledat otevírací a uzavírací tržní cenu pro každý obchodní den, maximální a minimální cenu za daný den, denní objemy obchodů a jiné informace. Nás z toho zajímaly především denní uzavírací ceny (*close*).

Bohužel se nám nepodařilo zobrazovat zmíněná data na delší časové období než cca jeden měsíc, takže jsme museli data stahovat takto po částech. S ohledem na zvolený způsob odhadování charakteristik rozdělení vektoru výnosností (viz. následující odstavec) jsme takto postahovali uzavírací ceny od 1. 4. 2004 do 31. 3. 2006. Další zpracování dat už probíhalo bez vynaložení větší manuální práce, převážně v tabulkovém procesoru Excel od Microsoftu.

U akcií Erste Bank došlo v jednom okamžiku ke štěpení jednoho kusu akcie na 4 kusy. S ohledem na to jsme tržní ceny od toho okamžiku dále vynásobily 4.

Zpracování dat

Klíčovým okamžikem celé úlohy bylo nalezení vhodného způsobu, jak ze získaných dat spočítat odhady vektoru **r** a matice **V**, potřebných jako vstup do Markowitzova modelu.

Jednou možností je použití tzv. *faktorového modelu*, který se snaží výnosnosti jednotlivých akciových titulů vysvětlovat pomocí obecného faktoru (celkový vývoj trhu) a faktorů specifických pro jednotlivé tituly. Pro použití tohoto postupu jsme však nenašli dostatek nám srozumitelných teoretických ani empirických podkladů.

Rozhodli jsme se tedy pro použití klasických statistických odhadů, tj. střední hodnotu odhadovat průměrem a kovariance (a spec. rozptyly) odhadovat výběrovými kovariancemi (rozptyly). I zde však nastaly problémy, a to jak skloubit jednoleté období naší investice s denní frekvencí získaných dat.

Nakonec jsme použili metodu klouzavého okna, kdy jsme vždy spočítali výnosnost mezi dvěma dny vzdálenými od sebe jeden rok a toto "okno" délky jednoho roku jsme posouvali v čase, opět v délce jednoho roku. Celkem jsme tedy potřebovali data za období dvou let. Připomeňme, že výnosností akcie od okamžiku A do okamžiku B rozumíme bezrozměrnou veličinu

$$\rho_{AB} = \frac{P_B - P_A}{P_A},$$

kde P_A resp. P_B je cena akcie v okamžiku A resp. B.

Drobným problémem je, že na burze se neobchoduje pravidelně 365 dní v roce, ale pouze v tzv. *obchodní dny*. To jsou vlastně běžné pracovní dny, tedy jsou vyloučeny soboty, neděle a státem uznávané svátky. Kalendářní rok se potom skládá z přibližně 254 obchodních dní, přičemž toto číslo záleží především na krytí se státních svátků se sobotami a nedělemi. Námi získané časové řady mají tedy ve skutečnosti nepravidelně pozorované hodnoty. To má za následek nemožnost dodržet stálou délku jednoho roku u našeho "okna". Zatímco například 27. 3. 2006 (pondělí) byl obchodní den, tak 27. 3. 2005 (neděle) nikoli. Následující stručná tabulka ukazuje, jak byly jednotlivé dny nakonec spárovány (řazeno směrem do minulosti):

	konec okna	**začátek okna**
1	31.3. 2006	31.3. 2005
2	30.3. 2006	30.3. 2005
3	29.3. 2006	29.3. 2005
4	28.3. 2006	25.3. 2005
5	27.3. 2006	24.3. 2005
...	...	...
63	4.1. 2006	3.1. 2005
64	3.1. 2006	30.12. 2004
65	2.1. 2006	29.12. 2004
66	30.12. 2005	28.12. 2004
...	...	...
251	7.4. 2005	2.4. 2004
252	6.4. 2005	1.4. 2004
253	5.4. 2005	-
254	4.4. 2005	-
255	1.4. 2005	-

Získali jsem tedy (pro každou z 8 společností) řadu 252 výnosností. I když je z podstaty věci zřejmé, že nejde o náhodný výběr (není splněna nezávislost), budeme tuto skutečnost přehlížet. Považujme tedy těchto 8 x 252 hodnot za náhodný výběr o rozsahu 252 z rozdělení 8-rozměrného vektoru výnosností. Nyní provedeme klasické statistické odhady střední hodnoty (výběrovým průměrem) a varianční matice (výběrovou varianční maticí). Výsledky jsou uvedeny v následujících tabulkách (1 = 100 %):

Střední kapitálové výnosnosti

Tele	**ČEZ**	**Erste**	**KB**	**PM**	**SSŽ**	**Unip**	**VCP**
0.3931	1.3866	0.1946	0.0789	0.0880	0.9549	1.2226	0.3415

Kovariance kapitálových výnosností

	Tele	CEZ	Erste	KB	PM	SSĢ	Unip	VĻP
Tele	0.0076	0.0103	0.0007	0.0048	0.0058	0.0160	0.0073	-0.0040
ĻEZ	0.0103	0.1097	0.0203	0.0306	0.0377	0.0773	0.0376	-0.0335
Erste	0.0007	0.0203	0.0067	0.0056	0.0073	0.0109	-0.0005	-0.0066
KB	0.0048	0.0306	0.0056	0.0117	0.0121	0.0248	0.0128	-0.0099
PM	0.0058	0.0377	0.0073	0.0121	0.0185	0.0293	0.0208	-0.0103
SSĢ	0.0160	0.0773	0.0109	0.0248	0.0293	0.1439	0.0241	-0.0510
Unip	0.0073	0.0376	-0.0005	0.0128	0.0208	0.0241	0.1376	-0.0025
VĻP	-0.0040	-0.0335	-0.0066	-0.0099	-0.0103	-0.0510	-0.0025	0.0228

Poznámka: Tele = Ļeský telecom, Erste = Erste Bank, KB = Komerļní banka, PM = Philip-Morris, Unip = Unipetrol.

Uģiteļné je také podívat se na korelaļní matici výnosností, která nám mŢģe napovŊdŊt, jak úļinná bude diverzifikace portfólia pŚi sniģování rozptylu jeho výnosnosti.

Korelace kapitálových výnosností (ļervenŊ vyznaļené jsou záporné hodnoty)

	Tele	CEZ	Erste	KB	PM	SSĢ	Unip	VĻP
Tele	1.0000	0.3549	0.0978	0.5133	0.4913	0.4843	0.2259	-0.3042
ĻEZ	0.3549	1.0000	0.7456	0.8549	0.8364	0.6148	0.3061	-0.6702
Erste	0.0978	0.7456	1.0000	0.6337	0.6576	0.3503	-0.0152	-0.5338
KB	0.5133	0.8549	0.6337	1.0000	0.8214	0.6046	0.3195	-0.6082
PM	0.4913	0.8364	0.6576	0.8214	1.0000	0.5675	0.4125	-0.5028
SSĢ	0.4843	0.6148	0.3503	0.6046	0.5675	1.0000	0.1715	-0.8911
Unip	0.2259	0.3061	-0.0152	0.3195	0.4125	0.1715	1.0000	-0.0453
VĻP	-0.3042	-0.6702	-0.5338	-0.6082	-0.5028	-0.8911	-0.0453	1.0000

VŊtģina korelací je kladná, ale nŊkteré ne pŚliģ vzdálené od nuly. Akcie spoleļnosti VĻP vykazují jako jediné zŚetelnŊ negativní korelovanost s ostatními tituly.

Zahrnutí dividend

Zatím jsme brali v potaz jen tzv. *kapitálové výnosnosti* akcií, tj. míru výnosu zpŢsobeného nárŢstem trģní ceny akcie. Druhou sloģkou zisku drģitele akcie jsou tzv. *dividendy*. Jde o platby, které firma provádí ve prospŊch akcionáŚŢ jakoģto jejich podíl na firemním zisku. Výplata dividend probíhá obvykle jednou za rok a jejich výģe se udává v penŊģních jednotkách na jednu akcii. Jestli budou dividendy vyplaceny a v jaké výģi je vģak plnŊ v rukou valné hromady akciové spoleļnosti, která o této vŊci rozhoduje na návrh pŚedstavenstva. Tzv. *dividendová výnosnost* je výģe roļní dividendy dŊlená trģní cenou akcie. Platí potom

celková výnosnost = kapitálová výnosnost + dividendová výnosnost

Výġe vyplacených dividend námi zkoumanými spoleļnostmi za léta 1998 aġ 2005 v Kļ na jednu akcii jsou obsaġeny v následující tabulce:

	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	odhad 2006
Ļeský Telecom	0	0	0	7.5	0	57.5	17	0	30
ĻEZ	0	0	0	2	2.5	4.5	8	9	10
Erste bank						10	12	16	18
Komerļní banka	0	0	0	0	11.5	40	200	100	100
Philip Morris	864	996	880	940	1240	1448	1575	1606	1640
SSĢ	32	32	33	36	44	55	130	390	400
Unipetrol	1.33	0	0	0	0	0	0	0	0
VĻP	6.7	50	100	58	316	253	364	347.5	350

zdroj: www.miras.cz

Poznámka: Prázdné buŔky odpovídají tomu, ġe akcie dané firmy se v daný rok neobchodovaly nebo data nejsou k dispozici, nuly odpovídají nevyplaceným dividendám. U akcií Erste Bank jde o pŚevod z EUR na CZK.

Poznámka: V prŢbĎhu zpracování zápoļtové úlohy se u nĎkterých spoleļností objevily informace o výġi dividend na rok 2006. Tyto informace jiġ ale nebyly brány v úvahu.

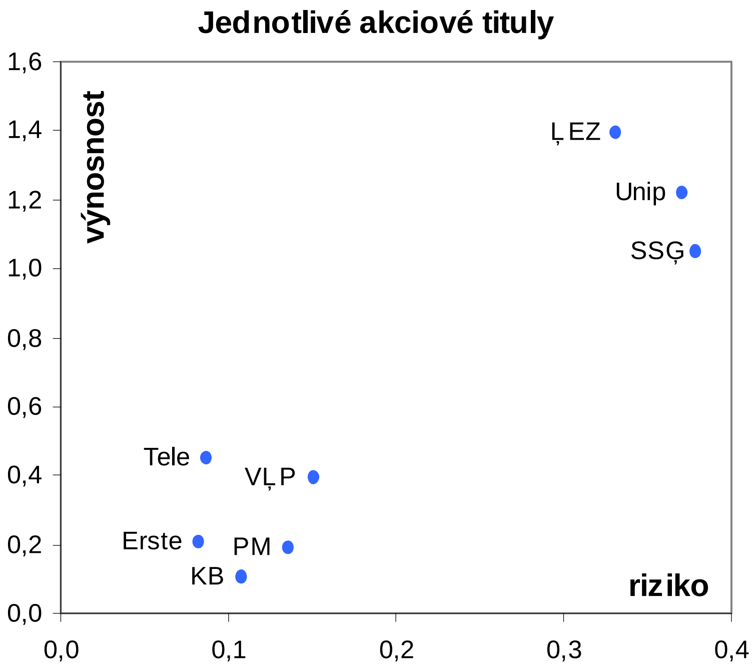
Jak je z této tabulky vidĎt, pŚedvídat velikost dividendy vyplacené akciovou spoleļností v pŚiġtím roce mŢġe být pro nezasvĎcené osoby velice obtíġné. Rozhodli jsme se pŚesto provést naġe "expertní" odhady výġe dividend vyplacené v roce 2006, které bychom mohli zakalkulovat do celkových výnosností jednotlivých akciových titulŢ. Tyto odhady vztáhneme k cenĎ akcií z 31.3. 2006 a tím získáme odhady dividendových výnosností. Spolu s dalġími souhrnnými charakteristikami pro jednotlivé akciové tituly jsou uvedeny v následující tabulce:

	cena 31.3. 06	dividendy 2006	dividend. výnos.	kapitál. výnos.	celková výnos.	smĎr. odchylka
Ļeský Telecom	501.3	30	0.0598	0.3931	0.4530	0.0873
ĻEZ	819.2	10	0.0122	1.3866	1.3988	0.3312
Erste bank	1389	18	0.0130	0.1946	0.2075	0.0821
Komerļní banka	3285	100	0.0304	0.0789	0.1093	0.1081
Philip Morris	16072	1640	0.1020	0.0880	0.1901	0.1360
SSĢ	4200	400	0.0952	0.9549	1.0502	0.3794
Unipetrol	274.7	0	0.0000	1.2226	1.2226	0.3709
VĻP	6200	350	0.0565	0.3415	0.3980	0.1508

Výsledné odhady

Budoucí dividendové výnosy budeme povaġovat za deterministické veliļ iny rovné naġim odhadŢm. Na základŊ tohoto zjednoduġujícího pŚedpokladu bude varianļ ní matice celkových výnosností **V** rovna varianļ ní matici kapitálových výnosností. Odhad stŚední hodnoty vektoru celkových výnosností **r** bude pak roven pŚedposlednímu sloupci ("celková výnosnost") pŚedchozí tabulky.

Nyní tedy máme pŚipraveny vġechny vstupy do Markowitzova modelu a nic nám nebrání pŚistoupit k jeho numerickému Śeġení. Neġ tak uļ iníme, mŢġeme si jeġtŊ jednotlivé akciové tituly graficky znázornit v (σ, r)-rovinŊ stejnŊ jako budeme následnŊ znázorŔovat jednotlivá portfólia.



Pokud bychom tedy mohli svojí investici soustŚedit vġdy jen do jednoho akciového titulu, pak eficientní by byly akcie Erste Bank, Ļeského telecomu a ĻEZu. Akcie ĻEZu mají nejvyġġí oļekávanou výnosnost (1.3988 = 139.88 %), zatímco akcie Erste Bank mají nejniġġí smŊrodatnou odchylku výnosnosti (0.0821 = 8.21 %).

Pouġité metody Śeġení

Kdyġ máme k dispozici odhady vektoru stŚedních hodnot výnosností **r** a varianļ ní matice výnosností **V** (viz. pŚedchozí kapitola), mŢġeme pŚistoupit k samotnému Śeġení Markowitzova modelu, tj. Śeġení úlohy vicekriteriální optimalizace

$$\text{maximalizovat } \left(\mathbf{r}^T\mathbf{x}, -\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x}\right)$$
$$\text{za podmínek } \sum_{j=1}^{8} x_j = 1 \text{ a } \mathbf{x} \geq 0.$$

Označme si $X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^8 : \sum_{j=1}^{8} x_j = 1, \mathbf{x} \geq 0 \right\}$ množinu přípustných řešení naší úlohy. Tento tvar množiny *X* odpovídá situaci a) v našem zadání. V případech b) až e) bude množina *X* určena jinými omezeními, vždy ale půjde o lineární omezení ve tvaru rovností nebo neostrých nerovností (jejich formulaci provedeme později) definující konvexní polyedr.

Přesto, že existuje software přímo určený k vyhodnocování Markowitzova modelu (např. knihovna *fPortfolio* pro program R), rozhodli jsme se řešit naši úlohu více méně "ručně". Jednak tak budeme mít možnost sami určit podobu odhadů vektoru **r** a matice **V** (speciální software si je počítá sám) a také budeme vždy schopni zadat příslušný tvar množiny *X* přípustných řešení.

Jedním ze způsobů, jak hledat eficientní řešení naší úlohy vicekriteriální optimalizace, je řešit úlohu

$$\max_{\mathbf{x}\in X}\left(\mathbf{r}^T\mathbf{x} - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x}\right),$$

kde $\lambda \in [0, \infty]$ je parametr (pro $\lambda = \infty$ máme na mysli účelovou funkci $-\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x}$). Účelová funkce v této úloze je tedy nezápornou lineární kombinací dvou účelových funkcí z původní úlohy. Parametr λ pak určuje relativní zastoupení střední hodnoty výnosnosti portfólia a jejího rozptylu v této kombinované účelové funkci. Je-li λ blízké nule, znamená to, že investor nemá příliš silnou averzi vůči riziku a rozhoduje u něj především velikost očekávané výnosnosti portfólia. Je-li naopak λ "hodně" velké, znamená to, že rozhodující je pro investora především co nejmenší rozptyl výnosnosti portfólia (má velkou averzi vůči riziku).

Protože matice **V** je pozitivně definitní, jedná se pro dané pevné $\lambda \neq 0$ o úlohu kvadratického programování (KP) mající právě jedno optimální řešení (maximalizujeme striktně konkávní funkci na kompaktní množině). Pro $\lambda = 0$ půjde o velice jednoduché úlohy lineárního programování mající taktéž právě jedno optimální řešení. To je zaručeno např. tím, že složky vektoru **r** jsou vesměs různé.

Z teorie vyplývá, že každé optimální řešení úlohy $\max_{\mathbf{x}\in X}\left(\mathbf{r}^T\mathbf{x} - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x}\right)$ pro dané $\lambda \in [0, \infty]$ je eficientním řešením původní úlohy vicekriteriální optimalizace a takto dokonce vyčerpáme všechna její eficientní řešení. Zvolíme si tedy dostatečně hustou a reprezentativní množinu hodnot parametru λ a pro každý bod této množiny vyřešíme příslušnou optimalizační úlohu. K tomu použijeme proceduru *QPsolve* na řešení úloh KP knihovny *quadprog* v programu R. Tato procedura umožňuje zadat vektor a pozitivně definitní matici určující účelovou funkci úlohy a dále libovolné rovnosti a nerovnosti určující množinu přípustných řešení. Z hodnot $\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{V}\mathbf{x}}$ a $r(\mathbf{x}) = \mathbf{r}^T\mathbf{x}$ pro jednotlivá optimální řešení **x** pak sestavíme efektivní hranici portfólií v (σ, r)-rovině.

Value at Risk

Buď $\alpha \in (0,1)$. Pro dané portfólio **x** je $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathsf{x})$ definován jako největší hodnota výnosnosti, které portfólio **x** dosáhne s pravděpodobností alespoň α. Jde tedy vlastně o $(1-\alpha)$-kvantil rozdělení $\rho(\mathsf{x})$. Protože přesné rozdělení $\rho(\mathsf{x})$ neznáme, musíme se spokojit s jednou ze dvou obvyklých aproximací: Buď použijeme empirickou distribuční funkci $\rho(\mathsf{x})$ sestrojenou na základě dostupných dat (tzv. *neparametrický* VaR) nebo určíme příslušný kvantil ze znalosti střední hodnoty a rozptylu $\rho(\mathsf{x})$ na základě předpokladu normality (tzv. *parametrický* VaR), konkrétně

$$\mathrm{VaR} = r(\mathsf{x}) + \sigma(\mathsf{x}) \cdot u_{1-\alpha}\ ,$$

kde $u_{1-\alpha}$ je $1-\alpha$-kvantil rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$. Obě aproximace mají své výhody i nevýhody. Neparametrický VaR lépe odráží tvar skutečného rozdělení $\rho(\mathsf{x})$, ale k jeho použití je potřeba mít velký počet dat, zvláště pokud je α blízké 0 nebo 1. Parametrický VaR nevyžaduje tolik dat, jeho výpočet je jednodušší a je použitelný i když je α blízké 0 nebo 1. Je ovšem přirozeně nepřesný, pokud se skutečné rozdělení $\rho(\mathsf{x})$ příliš liší od normálního.

My použijeme pro porovnání vždy obě aproximace. Protože máme počítat 95% VaR a náš počet pozorování je 252, bude neparametrický VaR roven 13. nejhorší výnosnosti z 252 historických realizací ($\mathrm{round}(0.05 \cdot 252) = 13$). To je ještě relativně velký počet, takže by neparametrický VaR mohl dávat rozumné výsledky.

Případ a)

Množina přípustných řešení v případě a) je $X = \left\{ \mathsf{x} \in \mathsf{R}^8 : \sum_{j=1}^{8} x_j = 1, \mathsf{x} \geq 0 \right\}$. Odpovídá situaci bez možnosti krátkých prodejů, výpůjček nebo investic do bezrizikového aktiva (viz. ostatní případy). Evidentně jde o konvexní polyedr v prostoru R^8.

Případ b)

V tomto případě máme oproti předchozí situaci možnost investovat svůj kapitál nejen do některých z *J* akciových titulů, ale také do tzv. *bezrizikového aktiva*. To je investice, která obnáší pevný (nenáhodný) výnos r_0. Obvykle jde o bankovní vklady s pevným úrokem nebo nákup státních dluhopisů.

Tato možnost způsobí, že podmínka $\sum_{j=1}^{J} x_j = 1$ se změní na $\sum_{j=1}^{J} x_j \leq 1$, přičemž rozdíl $1 - \sum_{j=1}^{J} x_j$ je právě částka investovaná do bezrizikového aktiva. Maximalizovaná účelová funkce se změní na

$$\sum_{j=1}^{J} r_j x_j + r_0\left(1-\sum_{j=1}^{J} x_j\right) - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{V}\mathbf{x} = r_0 + \sum_{j=1}^{J} (r_j - r_0) x_j - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{V}\mathbf{x}\,.$$

Jedná se opět o úlohu KP, jen všechny složky vektoru **r** jsou sníženy o r_0, účelová funkce je naopak celá zvýšena o r_0. Množina přípustných řešení $X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^8 : \sum_{j=1}^{8} x_j \le 1, \mathbf{x} \ge 0 \right\}$ je stále konvexní polyedr v $\mathbf{R}^8$.

Musíme ještě určit konkrétní hodnotu r_0 výnosnosti bezrizikového aktiva. Jako nejrealističtější volba se nám jeví nabízené roční úrokové sazby u jednoletých termínovaných vkladů s pevnou úrokovou sazbou. Ta však obvykle závisí na velikosti ukládané částky, která se v našem případě může pohybovat od 0 do 2 mil. Kč. Nakonec jsme zvolili kompromisní hodnotu 1.2 %, tj. $r_0 = 0.012$.

Případ c)

V tomto případě máme oproti předchozí situaci navíc možnost půjčovat si za jistou úrokovou sazbu $r_{-1} \ge r_0$ dodatečný kapitál, a to až do výše 30 % našeho základního kapitálu o velikosti 1. Podmínka $\sum_{j=1}^{J} x_j \le 1$ se tedy změní na $\sum_{j=1}^{J} x_j \le 1.3$, takže bude $X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^8 : \sum_{j=1}^{8} x_j \le 1.3, \mathbf{x} \ge 0 \right\}$. Účelová funkce je rovna

$$\sum_{j=1}^{J} r_j x_j - r_{-1}\left(\sum_{j=1}^{J} x_j - 1\right)^{+} + r_0\left(1-\sum_{j=1}^{J} x_j\right)^{+} - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{V}\mathbf{x}\,.$$

Její první část ovšem není obecně lineární funkcí vektoru **x**, takže nejde o úlohu KP. V případě, kdy se výpůjční a depozitní sazba rovnají, tj. $r_{-1} = r_0$, se účelová funkce zjednoduší na tvar

$$\sum_{j=1}^{J} r_j x_j + r_0\left(1-\sum_{j=1}^{J} x_j\right) - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{V}\mathbf{x} = r_0 + \sum_{j=1}^{J} (r_j - r_0) x_j - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{V}\mathbf{x}$$

totožný s případem b), takže již jde o úlohu KP, kterou umíme řešit.

Případ c*)

Uvažujme nyní na chvíli situaci, kdy máme možnost pouze si vypůjčovat a nikoli ukládat. Účelová funkce bude

$$\sum_{j=1}^{J} r_j x_j - r_{-1}\left(\sum_{j=1}^{J} x_j - 1\right) - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{V}\mathbf{x} = r_{-1} + \sum_{j=1}^{J} (r_j - r_{-1}) x_j - \lambda \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{V}\mathbf{x}$$

a množina přípustných řešení $X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^8 : 1 \le \sum_{j=1}^{8} x_j \le 1.3, \mathbf{x} \ge 0 \right\}$. Toto tedy je, na rozdíl od obecné situace c), úloha KP.

Vraťme se teď k obecné situaci c) s ukládáním i vypůjčováním. Efektivní hranici portfólií můžeme v tomto případě určit následující úvahou. Je-li, jak předpokládáme, $r_{-1} \ge r_0$, nebude nikdy optimální současně si vypůjčit a uložit kapitál. Stačilo by totiž snížit o stejnou částku jak půjčovaný tak ukládaný kapitál a ušetřili bychom úměrnou částku díky rozdílu v úrokových mírách. Racionální investor si tedy vždy buď pouze půjčuje nebo pouze ukládá. Pokud vezmeme množinu eficientních portfólií v situaci b), sjednotíme jí s množinou eficientních portfólií v situaci c*) a z výsledné množiny vybereme v rámci ní eficientní portfólia, získáme hledanou množinu eficientních portfólií v situaci c).

Musíme ještě určit konkrétní hodnotu r_{-1} úrokové sazby, za kterou si můžeme vypůjčovat. Jako nejrealističtější volba se nám jeví nabízené roční úrokové sazby u jednoletých podnikatelských bankovních úvěrů. Zvolili jsme kompromisní hodnotu 12 %, tj. $r_{-1} = 0.12$.

Případ d)

Oproti případu a) máme nyní možnost provádět tzv. *krátké prodeje* (short sales allowed). Jde zjednodušeně o to, že akcie prodáme za současnou cenu a na konci období je nakoupíme za cenu platnou v tomto okamžiku. Spekulujeme tedy na pokles ceny dotyčných akcií. Jiný výklad je, že si prostě půjčujeme prostředky a úroková sazba je rovna výnosu dané akcie za dotyčné období.

To, že provádíme krátký prodej *j*-té akcie, vyjádříme zápornou hodnotou x_j. Krátké prodeje jednotlivých akciových titulů nesmí podle zadání přesáhnou 30 % z výchozího kapitálu o velikosti 1. Tedy místo původní podmínky $\mathbf{x} \ge 0$ máme nyní podmínku $\mathbf{x} \ge -0.3$ a $X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^8 : \sum_{j=1}^{8} x_j = 1, \mathbf{x} \ge -0.3 \right\}$. Účelová funkce bude stejná jako v případě a).

Případ e)

Zde je oproti situaci a) podmínka, že žádný titul nesmí tvořit více než 15 % celého portfólia. Účelová funkce tedy zůstává stejná jako v případě a), jen množina přípustných řešení je nyní $X = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^8 : \sum_{j=1}^{8} x_j = 1, 0 \le \mathbf{x} \le 0.15 \right\}$.

Výsledky

V této kapitole je přehled numerických výsledků pro jednotlivé situace a) až e). Kromě grafické prezentace celé efektivní hranice portfólií budou vždy podrobně rozebrána tři portfólia. Jednak portfólio s maximální střední výnosností bez ohledu na riziko, tj. pro případ $\lambda = 0$, jehož složení lze vždy odvodit jednoduchou úvahou. Dále portfólio s nejnižším rizikem (bez ohledu na výnosnost, tj. pro případ $\lambda = \infty$). A do třetice bude uvedeno eficientní portfólio s největším parametrickým 95% VaR, což vlastně odpovídá použití lineární užitkové funkce $u(\sigma, r) = r - 1.644854 \cdot \sigma$ pro výběr optimálního portfólia. U všech zmíněných portfólií bude kromě jejich složení (vektor **x**), střední výnosnosti *r* a míry rizika σ uveden 95% parametrický a neparametrický VaR. Na závěr vykreslíme efektivní hranice portfólií pro každý případ a) až e) pro snazší vzájemné porovnání.

Místo případu c) ze zadání bude vyhodnocen případ c*) dovolující pouze výpůjčky. Výsledky pro případ c) se pak dostanou syntézou výsledků v případě b) a c*), jak je vysvětleno v předchozí kapitole.

Případ a)

	složení portfólia			
	výnosnost	**riziko**	**neparam. VaR**	**param. VaR**
maximální výnosnost	ČEZ 1			
	1.398841	0.331202	0.992903	0.854062
max. param. VaR	ČEZ 0.756655, Unip 0.243345			
	1.355956	0.291203	0.91122	0.87697
minimální riziko	Tele 0.038532, Erste 0.360781, SSŽ 0.138456, VČP 0.462231			
	0.421728	0.030265	0.37083	0.371946

Případ b)

	složení portfólia			
	výnosnost	**riziko**	**neparam. VaR**	**param. VaR**
maximální výnosnost	ČEZ 1			
	1.398841	0.331202	0.992903	0.854062
max. param. VaR	ČEZ 0.7566551, Unip 0.2433449			
	1.355956	0.291203	0.91122	0.87697
minimální riziko	vše 0			
	0.012	0	0.012	0.012

PŚpad c*)

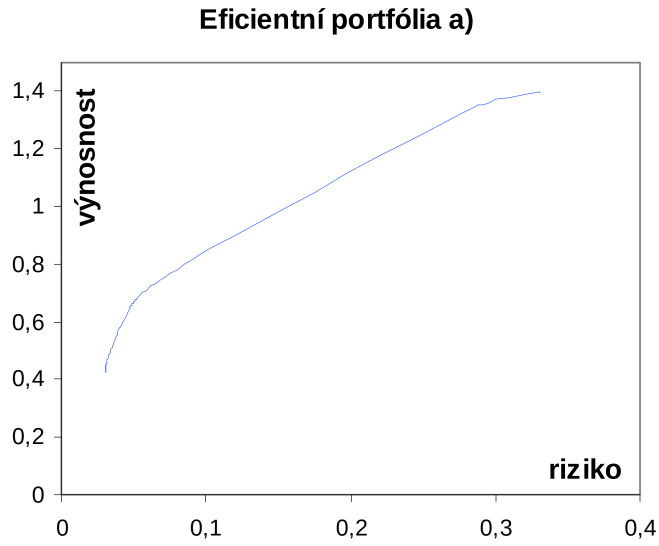
	sloģení portfólia			
	výnosnost	riziko	neparam. VaR	param. VaR
maximální výnosnost	ĻEZ 1.3			
	1.782493	0.430562	1.254774	1.074281
max. param. VaR	ĻEZ 1.005399, Unip 0.2946014			
	1.730576	0.38092	1.155649	1.104018
minimální riziko	Tele 0.038532, Erste 0.360781, SSĢ 0.138456, VĻP 0.462231			
	0.421728	0.030266	0.37083	0.371946

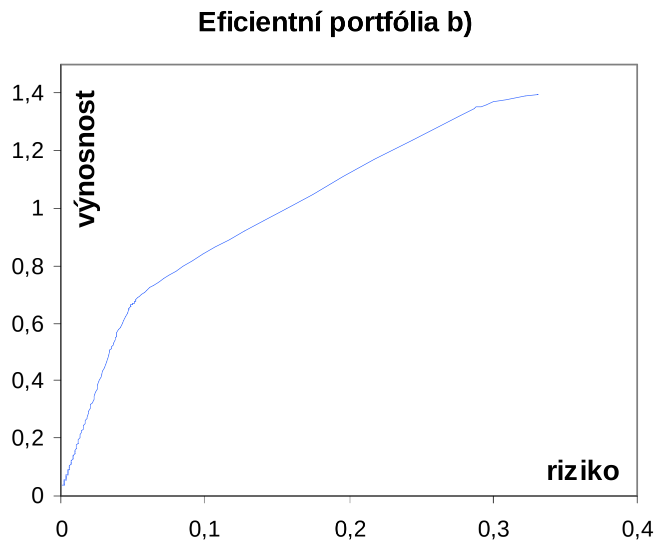
PŚpad d)

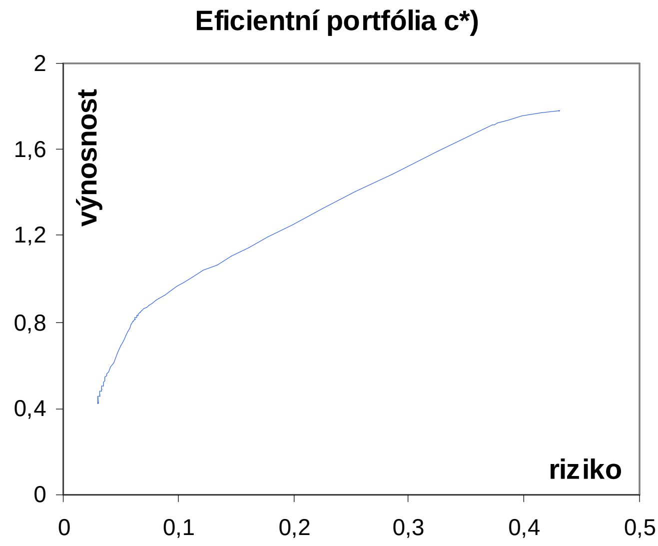
	sloģení portfólia			
	výnosnost	riziko	neparam. VaR	param. VaR
maximální výnosnost	ĻEZ 3.1, ostatní -0.3			
	3.247233	0.876317	2.154386	1.805820
max. param. VaR	ĻEZ 2.2335133, Unip 0.5664867, ostatní -0.3			
	3.094531	0.706922	2.080294	1.931748
minimální riziko	**x** = (0.0597, -0.0353, 0.4726, 0.1305, -0.1941, 0.1418, 0.0126, 0.4121)			
	0.381565	0.025294	0.337119	0.339961

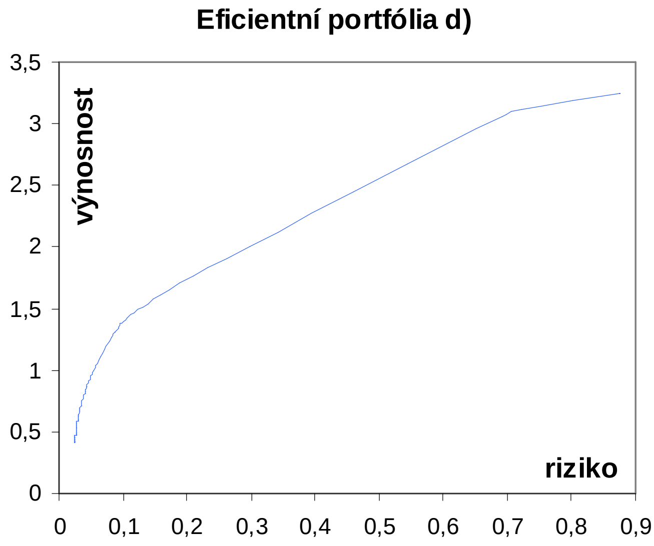
PŚpad e)

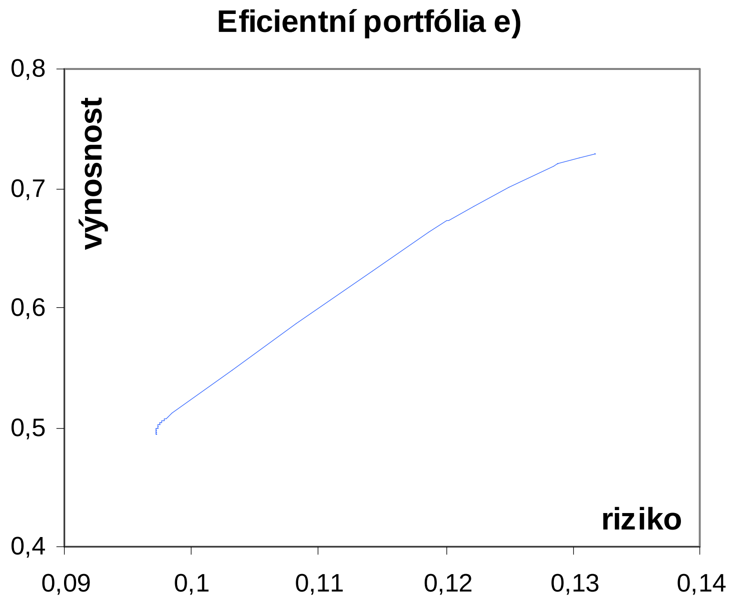
	sloģení portfólia			
	výnosnost	riziko	neparam. VaR	param. VaR
maximální výnosnost	KB 0, PM 0.1, ostatní 0.15			
	0.728523	0.13165	0.472421	0.511978
max. param. VaR	KB 0, PM 0.1, ostatní 0.15			
	0.728523	0.13165	0.472421	0.511978
minimální riziko	ĻEZ 0.020801, SSĢ 0.113013, Unip 0.116186, ostatní 0.15			
	0.493502	0.0971444	0.311948	0.333713

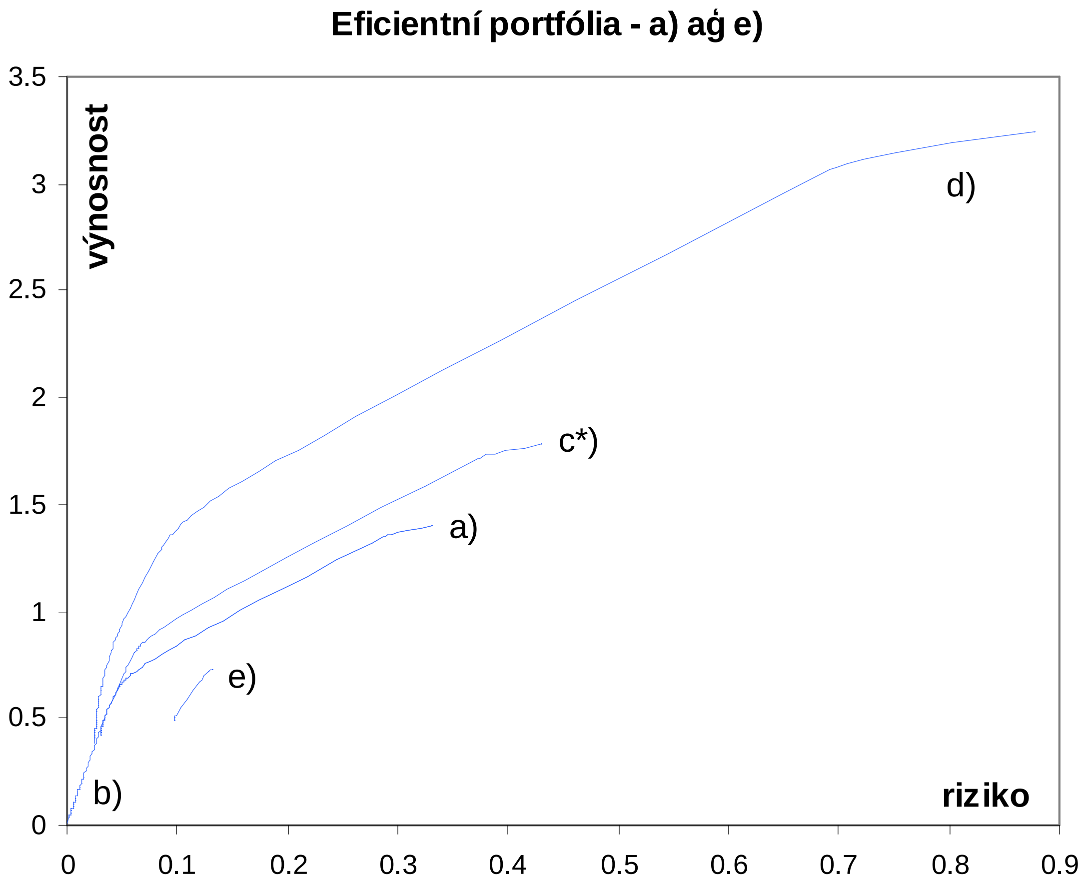

Eficientní portfólia a)
výnosnost
riziko
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4


Eficientní portfólia b)
výnosnost
riziko
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4


Eficientní portfólia c*)
výnosnost
riziko
2
1,6
1,2
0,8
0,4
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5


Eficientní portfólia d)
výnosnost
riziko
3,5
3
2,5
2
1,5
1
0,5
0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9


Eficientní portfólia e)
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
výnosnost
riziko
0,09
0,1
0,11
0,12
0,13
0,14


Eficientní portfólia - a) aģ e)
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
výnosnost
d)
c*)
a)
e)
b)
riziko
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9

Závěr

Numerické výsledky v jednotlivých částech a) až e) nejsou nijak v rozporu s naší intuicí. Efektivní hranice portfólií v případě b) je prodloužením hranice z případu a) do bodu odpovídajícímu bezrizikovému aktivu. Vysoké výnosnosti portfólií v případě d) jsou dány značnými rozdíly ve výnosnostech jednotlivých akciových titulů v našem koši a možností krátkých prodejů až do celkové výše $7 \cdot 0.3 = 2.1$. Protože jsme pracovali jen s 8 tituly, je požadavek z případu e) na maximálně 15% zastoupení jednotlivých titulů v portfóliu značně restriktivní. To má za následek velice krátkou efektivní hranici portfólií v tomto případě.

U většiny zkoumaných portfólií byl napočítaný parametrický VaR menší než jejich neparametrický VaR. To ukazuje na skutečnost, že rozdělení výnosností většiny portfólií má zřejmě kladnou šikmost (je "nahnuté" na levou stranu). Tento rozdíl byl méně patrný u více diverzifikovaných portfólií, která měla zřejmě rozdělení výnosností blíže k normálnímu (náznak CLV).

Portfólia s maximálním 95% parametrickým VaR byla ve všech případech velice blízko protfóliím s maximálním výnosem (ta vykazovala největší neparametrický VaR).

Obecně se dá říct, že použití Markowitzova modelu v naší úloze dalo rozumné výsledky, samozřejmě za předpokladu splnění svých důležitých předpokladů. Jako nejzávažnější problém se nám jeví otázka kvality odhadu vektoru **r** a matice **V**. Historické kurzy akcií totiž v sobě nesou informaci, která nemusí být vždy nutně dobrým vodítkem pro prognózování jejich budoucích hodnot. Hrozí nehomogenita jak v historických datech samotných, tak hlavně mezi minulostí a budoucností. Užitečná pro předvídání budoucího vývoje akciových kurzů by jistě byla znalost aktuální situace dané firmy a jejího nejbližšího vývoje.

Zdroje

www.akcie.com

www.miras.cz

Internetové stránky vybraných akciových společností

Internetové zpravodajské servery

Dupačová, J.: Markowitzův model optimální volby portfólia. Předpoklady, data, alternativy.

Cipra, T.: Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou. HZ, Praha 1995.

Markowitz, H.: Portfolio selection. The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, 1952.