Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

MARKOWITZŮV MODEL

Optimalizace II s aplikací ve financích

Lenka Slámová, Tereza Baumová

červen 2008

Zadání

Jste správcem akciových portfolií. Potřebujete, mimo jiné, připravit pro své klienty vhodná akciová portfolia pro investování 25 mil. Kč na období jednoho měsíce. Očekáváte, že se klient bude chtít poradit v otázce složení vhodného akciového portfolia a rozhodli jste se využít Markowitzův model pro selekci.

Zvolte vhodné tituly (8-10). Víte, že výběru titulů předchází globální a odvětvová analýza a proto vyberte tituly, které jsou v souladu s vaší predikcí vývoje na finančních trzích.

Úkoly

a) Na trhu nejsou povoleny krátké prodeje. Sestavte efektivní hranici portfolií (graficky prezentujte). Vyberte některá portfolia na efektivní hranici a uveďte jejich složení (váhy) a očekávané výnosnosti titulů zastoupených v portfoliu.

b) Jak se změní efektivní hranice, pokud budete mít možnost investovat do bezrizikového aktiva (depozita v bance, aktuální sazbu nalezněte sami).

c) Jak se změní efektivní hranice, pokud budete mít možnost výpůjček od správce portfolia až do 30 % hodnoty portfolia.

d) Co když budete mít povoleny krátké prodeje až do 30 % počátečního vkladu? Nakreslete efektivní hranici v tomto případě.

e) V souladu s vnitřní politikou investiční společnosti, kterou zastupujete, nesmí žádný z titulů portfolia přesáhnou 15% váhu v celkovém portfoliu. Nakreslete efektivní hranici při tomto omezení.

Dále spočtěte v případech a) - e) Value at Risk VaR(95%) pro vybraná efektivní portfolia.

Markowitzův model

Markowitzův model je jedním z přístupů, jak hledat optimální portfolio. Tento model předpokládá, že je investor racionální, tedy jeho cílem je maximalizovat zisk a minimalizovat riziko. Ziskem se v Markowitzově modelu rozumí střední hodnota náhodného výnosu a rizikem pak jeho směrodatná odchylka. Tento model má řadu zjednodušujících předpokladů - předpokládá ideální trh bez transakčních nákladů a bez arbitráže, neomezenou možnost investování a půjčování, neomezenou dělitelnost aktiv, předpokládá, že investoři preferují vyšší výnosy a nižší riziko a využívají k tomu shodné informace - hodnoty očekávaných výnosností akcií a rozptylů a kovariancí těchto výnosností.

Zaveďme si následující značení:

I	počet akcií, z nichž skládáme portfolio,
x_i	váha i-té akcie v portfoliu, $i = 1, \dots, I$
x_0	váha bezrizikového aktiva v portfoliu,
ρ_i	náhodný výnos i-té akcie ve zvoleném období, $i = 1, \dots, I$
r_i	očekávaný výnos i-té akcie ve zvoleném období, $i = 1, \dots, I$
r_p	minimální požadovaný výnos portfolia ve zvoleném období,
r_0	výnos bezrizikového aktiva ve zvoleném období.

Vektor vah označíme $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_I)'$, vektor náhodných výnosů $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_I)'$. Rozdělení náhodného vektoru ρ je charakterizováno známým vektorem středních hodnot $E(\rho) = \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_I)'$ a varianční maticí $\mathrm{var}(\rho) = \mathbf{V} = [\mathrm{cov}(\rho_i, \rho_j)]_{i,j=1}^{I}$.

Výnos portfolia s vahami $\mathbf{x}$ budeme chápat jako střední hodnotu celkové výnosnosti

$$r(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{I} x_i r_i = \mathbf{r}'\mathbf{x}$$

a **riziko** tohoto portfolia chápeme ve smyslu Markowitzova modelu jakožto směrodatnou odchylku celkové výnosnosti - odmocninu z rozptylu

$$\sigma^2(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} = \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}.$$

Při hledání optimálního portfolia ve smyslu Markowitzova modelu pak musíme řešit optimalizační úlohu vícekriteriálního programování

$$\begin{aligned} &\max\ \mathbf{r}'\mathbf{x} \\ &\min\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ &\text{za podmínek} \\ &\quad \mathbf{x} \in \chi, \end{aligned} \tag{1}$$

kde množina χ je určena požadavkem $\mathbf{1}'\mathbf{x} = 1$ a případně dalšími podmínkami na složení portfolia.

Jinou možností je řešit zjednodušenou úlohu nelineárního programování ve tvaru

$$\max_{\mathbf{x}\in\chi}\ \lambda\mathbf{r}'\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x}, \tag{2}$$

kde $\lambda \geq 0$ je parametr modelující investorův vztah k riziku.

Úloha, kterou použijeme při hledání optimálního portfolia my, je následujícího tvaru

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ &\text{za podmínek} \\ &\quad \mathbf{x} \in \chi, \\ &\quad \mathbf{r}'\mathbf{x} \geq r_p, \end{aligned} \tag{3}$$

kde r_p je zvolená hodnota minimálního požadovaného výnosu.

Naším úkolem je pro jednotlivé úlohy najít efektivní hranice, tj. množinu portfolií, které jsou **eficientní**. Řekneme, že portfolio je eficientní vzhledem ke střední hodnotě a rozptylu, jestliže neexistuje jiné portfolio, jehož výnos by byl větší nebo roven výnosu uvažovaného portfolia a jehož riziko by bylo menší nebo rovno riziku uvažovaného portfolia, s alespoň jednou nerovností ostrou. Efektivní hranice odpovídá optimálním řešením úlohy(3) pro různé nastavené hodnoty $r_p \geq r_{min}$, kde r_{min} je výnos portfolia $\mathbf{x}_G$, které je optimálním řešením úlohy (4) bez podmínek na očekávanou výnosnost

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{x}'\mathbf{V}\mathbf{x} \\ &\text{za podmínek} \\ &\quad \mathbf{x} \in \chi. \end{aligned} \tag{4}$$

Nyní již můžeme matematicky vyjádřit tvar optimalizačních úloh v případech a) - e).

Úloha a

Nejsou povoleny krátké prodeje, to znamená, že váhy jednotlivých akcií v portfoliu musí být nezáporné.

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ &\text{za podmínek} \\ &\quad \textstyle\sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ &\quad x_i \geq 0, \;\; i = 1, \ldots, I, \\ &\quad \textstyle\sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p. \end{aligned} \tag{5}$$

Úloha b

Nejsou povoleny krátké prodeje a máme možnost investovat do bezrizikového aktiva. Zavedeme novou proměnnou x_0, která bude vyjadřovat, jakou část investujeme do bezrizikového aktiva. Bezrizikový výnos značíme r_0.

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ &\text{za podmínek} \\ &\quad x_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ &\quad x_i \geq 0, \;\; i = 0, \ldots, I, \\ &\quad x_0 r_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p. \end{aligned} \tag{6}$$

Úloha c

Nejsou povoleny krátké prodeje, máme možnost investovat do bezrizikového aktiva a máme možnost výpůjček od správce portfolia až do 30 % hodnoty portfolia. Zavedeme novou proměnnou x_v, která bude vyjadřovat velikost půjčky. Proměnná x_v může nabývat hodnot v intervalu $[0, 0.3]$, přičemž $x_v = 0$ pokud si nic nepůjčujeme a $x_v = 0.3$, pokud možnosti půjčky využijeme naplno a půjčíme si celých 30 % hodnoty portfolia. Výpůjční sazbu značíme r_v. Výnos portfolia je pak roven $x_0 r_0 + \sum x_i r_i - x_v r_v$.

$$\begin{aligned} &\min \textstyle\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ &\text{za podmínek} \\ &\quad x_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{I} x_i = 1 + x_v, \\ &\quad x_i \geq 0, \;\; i = 0, \ldots, I, \\ &\quad x_v \geq 0, \\ &\quad x_v \leq 0.3, \\ &\quad x_0 r_0 + \textstyle\sum_{i=1}^{I} r_i x_i - x_v r_v \geq r_p. \end{aligned} \tag{7}$$

Úloha d

Máme povoleny krátké prodeje, a to až do 30 % počátečního vkladu. To znamená, že váhy x_i mohou být i záporné, ale součet záporných částí vah $\sum_{i=1}^{I} x_i^-$ ($x^- = -\min(0, x)$) nesmí přesáhnout hodnotu 0.3.

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ \text{za podmínek} \\ \quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ \quad \sum_{i=1}^{I} x_i^- \leq 0.3, \\ \quad \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p. \end{array} \tag{8}$$

Úloha e

Žádný z titulů nesmí přesáhnout 15% váhu v portfoliu. Toto omezení se jednoduše vyjádří tak, že $x_i \leq 0.15$ pro každé i.

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ \text{za podmínek} \\ \quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \ \ i = 1, \ldots, I, \\ \quad x_i \leq 0.15, \ \ i = 1, \ldots, I, \\ \quad \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p. \end{array} \tag{9}$$

Výběr akcií

Vzhledem k tomu, že investiční horizont je jeden měsíc, je třeba k tomu, abychom mohly odhadnout kovariance výnosností jednotlivých titulů, minimálně I^2 pozorování měsíčních výnosů, kde I je počet akcií. Budeme investovat do $I = 10$ akcií, to znamená, že potřebujeme minimálně 100 měsíčních výnosů, tj. data za 8 let a 4 měsíce. Z důvodu nerozvinutosti českého trhu, kdy se po takto dlouhou dobu obchoduje jen malý počet akcií, rozhodly jsme se vybrat akcie zahraniční.

Americké akcie jsme zavrhly, z důvodu hrozící recese by to nebyla dobrá investice. Vybíraly jsme tedy akcie evropských firem, které podnikají také ve střední a východní Evropě. Vzhledem k tomu, že tyto oblasti jsou stále tzv. "emerging markets", tedy rozvojové trhy, lze u těchto firem očekávat růst právě díky zvyšujícím se ziskům ze střední a východní Evropy.

Vybraly jsme akcie ze 4 sektorů tak, aby z každého sektoru byly zastoupeny minimálně dvě společnosti, a zvýšila se tím tak možnost diverzifikace mezi odvětvími. Vybraly jsme následující sektory a společnosti:

- Finanční instituce - banky a pojišťovny
  - Commerzbank (Německo) - zkratka CBK
  - Erste Bank (Rakousko) - zkratka EBS
  - Vienna Insurance Group (Rakousko) - zkratka VIG
- Elektrárenské společnosti
  - E.ON (Německo) - zkratka EON
  - RWE (Německo) - zkratka RWE
- Automobilové společnosti
  - Volkswagen (Německo) - zkratka VW
  - Renault (Francie) - zkratka REN
  - Fiat (Itálie) - zkratka FIA
- Oil&Gas společnosti zaměřené na těžbu a zpracování ropy

– OMV (Rakousko) - zkratka OMV
– MOL (Maďarsko) - zkratka MOL

Soustředily jsme se také na tzv. 12-ti měsíční cílové ceny, které vyjadřují názor analytiků, na jakém kurzu by se měla akcie pohybovat v horizontu jednoho roku. Na základě této cílové ceny analytik doporučí akcie kupovat, držet nebo prodávat. V tabulce je vyjádřeno, jaké procento analytiků doporučuje akcie kupovat, držet nebo prodávat. Vybraly jsme takové akcie, u nichž většina analytiků dává doporučení kupovat nebo držet, a naznačuje tak, že by akcie mohla v následujících měsících posilovat.

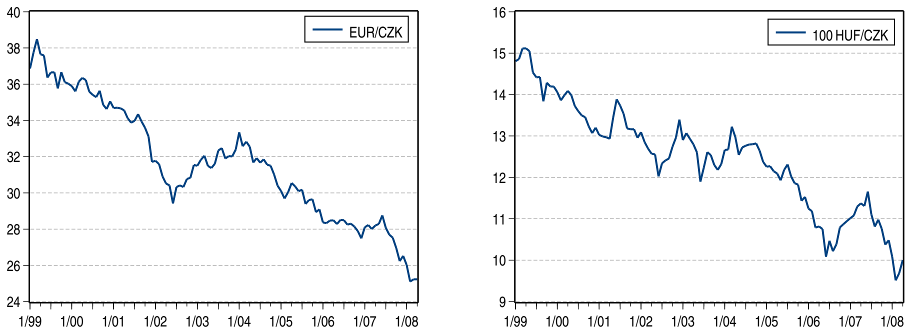
	Kupovat	Držet	Prodávat
CBK	47.06 %	44.12 %	8.82 %
EBS	73.91 %	17.39 %	8.70 %
VIG	63.64 %	27.27 %	9.09 %
EON	82.93 %	17.07 %	0.00 %
RWE	46.15 %	35.90 %	17.95 %
VW	14.29 %	37.14 %	48.57 %
FIA	70.83 %	16.67 %	12.50 %
REN	43.75 %	37.50 %	18.75 %
OMV	60.00 %	25.00 %	15.00 %
MOL	41.18 %	52.94 %	5.88 %

Tabulka 1: Doporučení analytiků na vybrané akcie.

Stáhnutí dat

Ze serveru Bloomberg jsme pro těchto 10 akcií stáhly data od ledna 1999 do konce dubna 2008, celkově hodnoty akciových kurzů za 112 měsíců. Mírnou komplikací u akcií z Francie, Německa, Rakouska a Itálie byl přechod z národních měn na společnou měnu EURO k 1.1.2001. Nicméně kurz EURa k ostatním měnám byl stanovován již od začátku roku 1999, a tento problém za nás tedy vyřešil Bloomberg sám, neboť kurzy akcií jsou od 1.1.1999 přepočítané na současnou měnu obchodování, kterou je u všech akcií vyjma MOL EURO. Společnost MOL se obchoduje v maďarských forintech (HUF). Kurz všech akcií jsme přepočítávaly na české koruny (CZK), kromě akciových kurzů jsme tedy stáhly i vývoj kurzů EUR/CZK a HUF/CZK (nepřímá kotace, tj. pokud kurz EUR/CZK = 30, pak 1EUR = 30CZK) od ledna 1999 do dubna 2008, které jsou zakresleny na obrázku 1.

Na obrázku 2 jsou znázorněny vývoje akciových kurzů společností (v měnách obchodování) od 1/1999 do 4/2008.



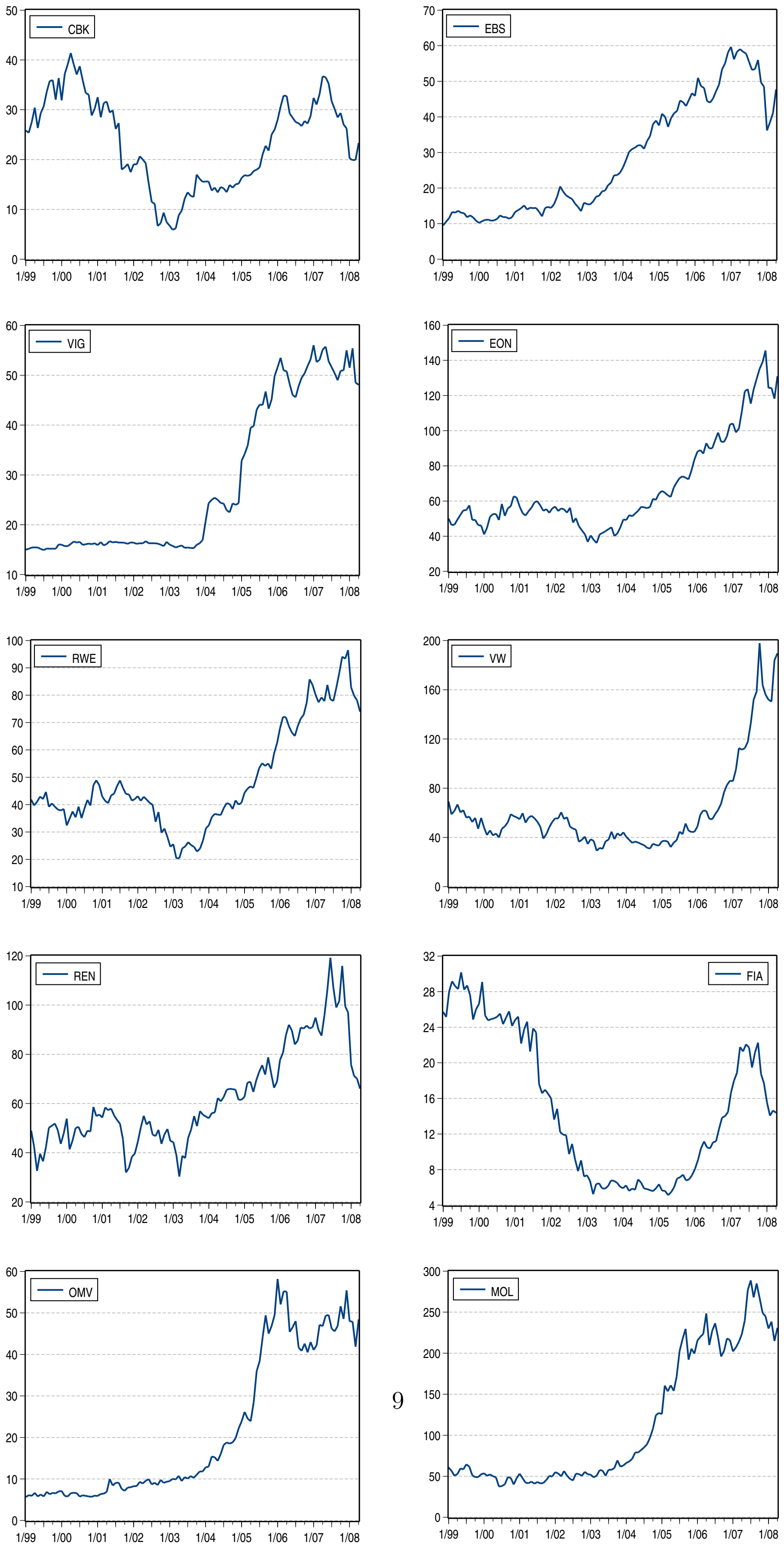
Obrázek 1: Vývoj měnových kurzů EUR/CZK a HUF/CZK.

Dividendy a štěpení akcií

Dalším problémem bylo štěpení akcií, ale i tento problém vyřešil Bloomerg sám - kurzy akcií do minulosti přepočítává na současný počet akcií. Dále bylo třeba získat informace o výši dividend. Tato data jsme stáhly rovněž z Bloombergu. V následující tabulce 2 jsou uvedeny informace o výši vyplacené dividendy v jednotlivých letech a měsíci, kdy nastává ex-dividend day (rozhodný den pro výplatu dividendy). Pro jednoduchost předpokládáme, že rozhodný den je vždy ve stejném měsíci, a to v tom, ve kterém nastal v roce 2007.

	CBK	EBS	VIG	EON	RWE	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Měsíc	4	5	5	4	3	3	4	4	4	4
Měna	EUR	EUR	EUR	EUR	EUR	EUR	EUR	EUR	EUR	HUF
1999	1.10	0.29	0.33	1.53	1.31	1.10	0.57	1.07	0.23	90.00
2000	1.14	0.31	0.31	1.79	1.43	1.10	0.57	0.95	0.24	55.00
2001	1.43	0.31	0.31	1.93	1.43	1.71	0.57	1.05	0.43	55.00
2002	0.40	0.31	0.31	1.60	1.00	1.30	0.29	1.06	0.43	55.00
2003	0.10	0.31	0.31	1.75	1.10	1.30	0.29	1.27	0.35	55.00
2004	0.10	0.37	0.45	2.00	1.25	1.05	0.29	1.40	0.40	57.86
2005	0.25	0.50	0.55	2.35	1.50	1.05	0.29	1.80	0.44	167.42
2006	0.50	0.55	0.66	7.00	1.75	1.15	0.29	2.40	0.90	321.14
2007	0.75	0.65	0.82	3.35	3.50	1.25	0.16	3.10	1.05	507.96

Tabulka 2: Výše vyplacených dividend v jednotlivých letech.



Obrázek 2: Vývoj akciových kurzů našich 10 společností.

Vstupní data a odhad parametrů

Výpočet měsíčních výnosů

Vstupními daty Markowitzova modelu jsou odhadnuté očekávané výnosy (výběrový průměr pozorovaných výnosů) a odhadnutá kovarianční matice výnosů (výběrová kovarianční matice pozorovaných výnosů). Na základě našich $T = 112$ pozorování akciových kurzů pro I akcií můžeme spočítat pozorovaný výnos i-té akcie v t-tém měsíci $r_{i,t}$ pro $i = 1, \dots, I$ a $t = 2, \dots, T$.

Nejdříve ale musíme přepočítat akciové kurzy a dividendy z měny obchodování na české koruny. Nechť $P^C_{i,t}$ je kurz a $D^C_{i,t}$ dividenda i-té akcie na konci měsíce t v měně obchodování a C_t je kurz české koruny k měně obchodování na konci měsíce t, pak kurz i-té akcie na konci měsíce t v českých korunách je dán vzorcem

$$P_{i,t} = P^C_{i,t} C_t,$$

a dividenda odpovídající i-té akcii vyplacená v měsíci t v českých korunách je dána vzorcem

$$D_{i,t} = D^C_{i,t} C_t.$$

Pak pozorovaný výnos i-té akcie za měsíc t je dán vzorcem

$$r_{i,t} = \frac{P_{i,t} - P_{i,t-1} + D_{i,t}}{P_{i,t-1}} \cdot 100, \quad i = 1, \dots, I, t = 2, \dots, T$$

kde $P_{i,t}$ je kurz i-té akcie na konci měsíce t v českých korunách a $D_{i,t}$ je dividenda odpovídající i-té akcii vyplacená v měsíci t v českých korunách. Výnos akcie vyjde v procentech. Vzhledem k tomu, že máme k dispozici $T = 112$ pozorování akciových kurzů dostaneme tak pro každou akcii 111 pozorování náhodné veličiny ρ_i.

Je třeba se zamyslet, jakým způsobem započítat do výnosů dividendy. Podle klasického přístupu se dividenda započítává pouze v měsíci, kdy nastal ex-dividend day, neboť po tomto datu by měla cena akcie klesnout o výši dividendy. To odráží jistým způsobem fakt, že investoři dividendu očekávají a její výše je tak v ceně akcie již zahrnuta. Proto $D_{i,t}$ je rovno výši vyplacené dividendy pokud je t měsícem výplaty dividendy a rovno nule jinak.

Očekávaný výnos a varianční matice

Po výpočtu pozorovaných měsíčních výnosů již můžeme odhadnout vektor očekávaných výnosů $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_I)'$ a kovarianční matici výnosů $\mathbf{V} = [V_{ij}]_{i,j=1}^{I}$. Očekávaný výnos budeme odhadovat pouze na základě dat od roku 2003 (pro $t \geq t_1 = 48$), neboť lze předpokládat, že nedávný vývoj popisuje chování akciových výnosů lépe než vývoj "historický". K odhadování použijeme software R, který tyto hodnoty spočte na základě následujících vzorců pro výběrový průměr a výběrovou kovarianční matici

$$
\begin{aligned}
r_i &= \frac{1}{T-t_1} \sum_{t=t_1+1}^{T} r_{i,t}, \;\; i = 1, \ldots, I \\
V_{ij} &= \frac{1}{T-2} \sum_{t=2}^{T} (r_{i,t} - \bar{r_i})(r_{j,t} - \bar{r_j}), \;\; i,j = 1, \ldots, I.
\end{aligned}
$$

kde $\bar{r_i}$ je průměrný výnos i-té akcie od roku 1999.

Vektor odhadnutých výnosů akcií

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} \text{CBK} & \text{EBS} & \text{VIG} & \text{EON} & \text{RWE} & \text{VW} & \text{FIA} & \text{REN} & \text{OMV} & \text{MOL} \end{array} \\
\mathbf{r} = & \begin{pmatrix} 2.109 & 1.684 & 1.679 & 2.136 & 1.864 & 2.817 & 1.416 & 0.888 & 2.823 & 2.374 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Vidíme, že nejvýnosnější jsou akcie společnosti OMV a Volkswagen, naopak nejmenší výnos mají akcie společnosti Renault.

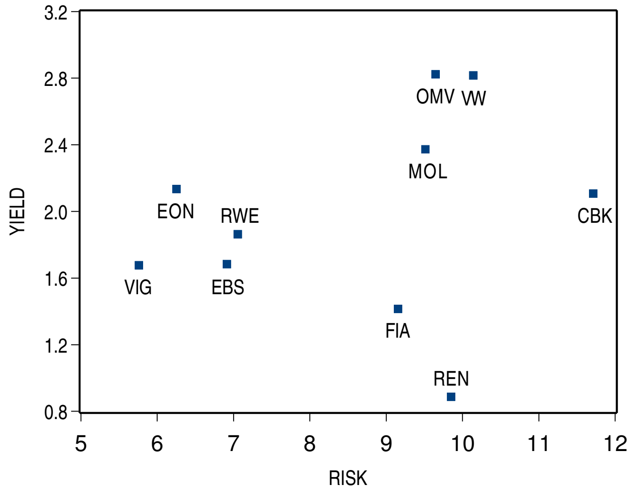
Odhadnutá kovarianční matice výnosů akcií

$$
\mathbf{V} = \begin{pmatrix}
137.23 & 30.51 & 9.67 & 27.32 & 30.46 & 45.54 & 48.40 & 54.09 & 26.72 & 24.82 \\
30.51 & 47.80 & 6.90 & 9.00 & 9.47 & 13.76 & 8.65 & 14.48 & 16.79 & 14.91 \\
9.67 & 6.90 & 33.19 & 7.84 & 11.60 & 4.70 & 7.68 & 7.21 & 14.97 & 8.28 \\
27.32 & 9.00 & 7.84 & 39.12 & 27.12 & 21.21 & 16.53 & 16.00 & 11.91 & 14.00 \\
30.46 & 9.47 & 11.60 & 27.12 & 49.76 & 30.15 & 18.68 & 19.58 & 15.40 & 6.04 \\
45.54 & 13.76 & 4.70 & 21.21 & 30.15 & 102.80 & 39.77 & 51.51 & 22.17 & 16.35 \\
48.40 & 8.65 & 7.68 & 16.53 & 18.68 & 39.77 & 83.81 & 33.78 & 18.39 & 15.86 \\
54.09 & 14.48 & 7.21 & 16.00 & 19.58 & 51.51 & 33.78 & 97.01 & 32.19 & 25.38 \\
26.72 & 16.79 & 14.97 & 11.91 & 15.40 & 22.17 & 18.39 & 32.19 & 93.07 & 22.63 \\
24.82 & 14.91 & 8.28 & 14.00 & 6.04 & 16.35 & 15.86 & 25.38 & 22.63 & 90.47
\end{pmatrix}
$$

V této matici jsou na diagonále rozptyly výnosů jednotlivých akcií, označme je $\sigma_i^2 = V_{ii}$, pro $i = 1, \ldots, 10$. Vektor směrodatných ochylek σ obsahuje míry rizika jednotlivých akcií.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} \text{CBK} & \text{EBS} & \text{VIG} & \text{EON} & \text{RWE} & \text{VW} & \text{FIA} & \text{REN} & \text{OMV} & \text{MOL} \end{array} \\
\sigma = & \begin{pmatrix} 11.715 & 6.913 & 5.761 & 6.255 & 7.054 & 10.139 & 9.155 & 9.849 & 9.647 & 9.511 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Na obrázku 3 jsou v rovině dvojic bodů $[r, \sigma]$ zakresleny závislosti výnosů akcií na jejich riziku.



Obrázek 3: Závislost výnosu na riziku akcie

Odhadnutá korelační matice výnosů akcií

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.38 & 0.14 & 0.37 & 0.37 & 0.38 & 0.45 & 0.47 & 0.24 & 0.22 \\ 0.38 & 1.00 & 0.17 & 0.21 & 0.19 & 0.20 & 0.14 & 0.21 & 0.25 & 0.23 \\ 0.14 & 0.17 & 1.00 & 0.22 & 0.29 & 0.08 & 0.15 & 0.13 & 0.27 & 0.15 \\ 0.37 & 0.21 & 0.22 & 1.00 & 0.61 & 0.33 & 0.29 & 0.26 & 0.20 & 0.24 \\ 0.37 & 0.19 & 0.29 & 0.61 & 1.00 & 0.42 & 0.29 & 0.28 & 0.23 & 0.09 \\ 0.38 & 0.20 & 0.08 & 0.33 & 0.42 & 1.00 & 0.43 & 0.52 & 0.23 & 0.17 \\ 0.45 & 0.14 & 0.15 & 0.29 & 0.29 & 0.43 & 1.00 & 0.37 & 0.21 & 0.18 \\ 0.47 & 0.21 & 0.13 & 0.26 & 0.28 & 0.52 & 0.37 & 1.00 & 0.34 & 0.27 \\ 0.24 & 0.25 & 0.27 & 0.20 & 0.23 & 0.23 & 0.21 & 0.34 & 1.00 & 0.25 \\ 0.22 & 0.23 & 0.15 & 0.24 & 0.09 & 0.17 & 0.18 & 0.27 & 0.25 & 1.00 \end{pmatrix}$$

Úrokové sazby

Dalšími vstupními parametry modelů jsou úrokové sazby - bezriziková úroková sazba r_0 a výpujční sazba r_v.

Bezriziková úroková sazba je depozitní sazba, se kterou se nám úročí například vklad v bance. Vzhledem k tomu, že investujeme do zahraničních akcií, budeme obchodovat v zahraniční měně - EUR. Družstevní záložna Fio nabízí termínovaný vklad s obnovou na dobu 1 měsíce vedený v EUR s úrokovou sazbou 3.48% p.a. Ta odpovídá měsíční depozitní sazbě $r_0 = 0.29\%$.

Společnost brokerjet.cz nabízí svým klientům pro obchodování s cennými papíry tzv. maržový účet. Poskytuje tak svému klinetovi úvěr na obchodování s cennými papíry, klient své investice částečně hradí z půjčených peněz, a ručí za ně nakoupenými akciemi. Díky pákovému efektu může být zisk (na druhou stranu stejně tak i ztráta) několikrát znásobené. Odhlédneme-li od poplatků za vedení maržového účtu, jediné, co nás tato půjčka bude stát, je úrok z vypůjčených peněz. brokerjet.cz nabízí svým klientům úvěr v EUR s úrokovou sazbou 9.0% p.a. Ta odpovídá měsíční výpujční sazbě $r_v = 0.75\%$.

Řešení úloh

Úlohy a) až e) jsme řešily v programu GAMS jako úlohy nelineárního programování.

Pro každé vybrané eficientní portfolio jsme dále spočetly Value at Risk. Označme ztrátu portfolia $-\rho$. Value at Risk je míra rizika definována vztahem $\mathsf{P}\left(-\rho \leq \mathrm{VaR}_\alpha\right) = \alpha$, tzn. VaR_α je hodnota taková, že ztráta portfolia bude menší nebo rovna VaR_α s pravděpodobností α blízko 1 (a tudíž větší než VaR_α s malou pravděpodobností 1-α). Je to tedy 100α-procentní kvantil rozdělení ztrát $-\rho$.

Parametrický VaR: Pro tuto míru rizika předpokládáme, že ztráta portfolia $-\rho$ má rozdělení $N\left(-r, \sigma^2\right)$. Pak

$$\mathsf{P}\left(-\rho \leq \mathrm{VaR}_\alpha\right) = \mathsf{P}\left(\frac{-\rho + r}{\sigma} \leq \frac{\mathrm{VaR}_\alpha + r}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\mathrm{VaR}_\alpha + r}{\sigma}\right) = \alpha$$

a tudíž $\mathrm{VaR}_{0.95} = -r + \sigma u_{0.95}$, kde $u_{0.95}$ je 95% kvantil normovaného normálního rozdělení.

Neparametrický VaR: Pro dané portfolio můžeme z pozorovaných ztrát jednotlivých akcií $-r_{it}$ v časech $t = 1, \ldots, T$ spočíst ztráty portfolia $Z_1, \ldots, Z_T$. Neparametrický $\mathrm{VaR}_{0.95}$ pak získáme jako empirický 95% kvantil, konkrétně jsme ho počítaly v programu R příkazem

```
>quantile(x,prob=0.95,names=TRUE,type=7),
```

kde x je vektor $\left(Z_{(1)}, \ldots, Z_{(T)}\right)$, tedy vektor ztrát daného portfolia srovnaných podle velikosti.

Úloha a

Formulace základní úlohy Markowitzova modelu bez možnosti krátkých prodejů:

$$\begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ \text{za podmínek} \\ \quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \;\; i = 1, \ldots, I, \\ \quad \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p. \end{array} \tag{10}$$

Nejprve jsme hledaly r_{min} a r_{max}, mezi kterými lze volit hodnotu r_p. r_{min} je výnos portfolia x_G, které se nalezne vyřešením úlohy minimalizující riziko bez ohledu na výši výnosu:

$$\begin{aligned}&\min \ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij}\\ &\text{za podmínek}\\ &\quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1,\\ &\quad x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, I.\end{aligned}$$

r_{max} je maximální výnos portfolia bez ohledu na riziko, tedy r_{max} je řešení úlohy

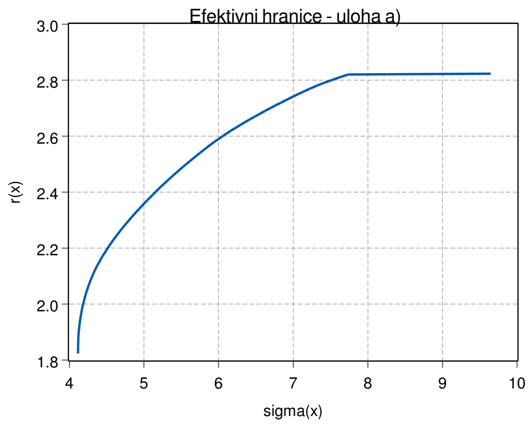
$$\begin{aligned}&\max \ \sum_{i=1}^{I} r_i x_i\\ &\text{za podmínek}\\ &\quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1,\\ &\quad x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, I.\end{aligned}$$

Tyto dvě úlohy jsme řešily rovněž v programu GAMS jako úlohy nelineárního a lineárního progarmování. Výsledné hodnoty:

r_{min}	r_{max}
1.8237	2.8231

Protože pro $r_p > r_{max}$ nemá úloha (10) přípustné řešení a pro $r_p < r_{min}$ bude podmínka $\mathbf{r}'\mathbf{x} \geq r_p$ splněna jako ostrá nerovnost, různá eficientní řešení zadané úlohy jsme hledaly jejím řešením přes síť hodnot r_p z intervalu $[\, r_{min}, r_{max}]$.

Na obrázku 4 je nakreslena efektivní hranice pro úlohu a.



Obrázek 4: Efektivní hranice v úloze a

V tabulkách jsou uvedena složení dvou eficientních portfolií, odhady jejich parametrů a VaR_α.

parametry	Portfolio a1	Portfolio a2
$r(\mathbf{x})$	1.9	2.56
$\sigma(\mathbf{x})$	4.1264	5.8460
parametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	4.8873	7.0558
neparametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	5.9860	8.9612

Tabulka 3: Charakteristiky dvou vybraných portfolií

	CBK	EBS	VIG	EON	RWE
Váhy	0.00	0.20	0.35	0.22	0.04
Investované částky	0	5 000 000	8 750 000	5 500 000	1 000 000
	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Váhy	0.04	0.05	0.00	0.03	0.07
Investované částky	1 000 000	1 250 000	0	750 000	1 750 000

Tabulka 4: Portfolio a1

	CBK	EBS	VIG	EON	RWE
Váhy	0.00	0.00	0.00	0.28	0.00
Investované částky	0	0	0	7 000 000	0
	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Váhy	0.25	0.00	0.00	0.32	0.15
Investované částky	6 250 000	0	0	8 000 000	3 750 000

Tabulka 5: Portfolio a2

Úloha b

Formulace úlohy s možností investice do bezrizikového aktiva s úrokovou mírou r_0, bez možnosti krátkých prodejů:

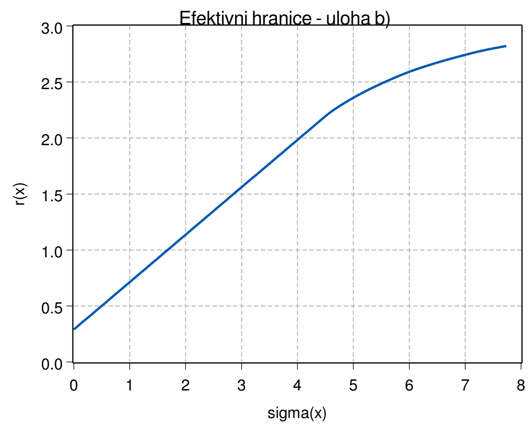
$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\
&\text{za podmínek} \\
&\quad x_0 + \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\
&\quad x_i \geq 0, \quad i = 0, \ldots, I, \\
&\quad x_0 r_0 + \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p.
\end{aligned} \tag{11}$$

r_{min} a r_{max} jsme nalezly stejně jako v úloze a) řešením úloh:

$$\begin{aligned}
&\min \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\
&\text{za podmínek} \\
&\quad x_0 + \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\
&\quad x_i \geq 0, \quad i = 0, \ldots, I.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\max \; r_0 x_0 + \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \\
&\text{za podmínek} \\
&\quad x_0 + \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\
&\quad x_i \geq 0, \quad i = 0, \ldots, I.
\end{aligned}$$

Jejich hodnoty vyšly $r_{min} = 0.2900$ a $r_{max} = 2.8231$.
Na obrázku 5 je nakreslena efektivní hranice pro úlohu b.



Obrázek 5: Efektivní hranice v úloze b

V tabulkách jsou opět dvě eficientní portfolia, jejich parametry a míry rizika.

parametry	Portfolio b1	Portfolio b2
$r(\mathbf{x})$	0.5430	2.0610
$\sigma(\mathbf{x})$	0.5978	4.1848
parametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	0.44034	4.8224
neparametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	0.6744	6.4601

Tabulka 6: Charakteristiky dvou vybraných portfolií

	riskfree	CBK	EBS	VIG	EON	RWE
Váhy	0.87	0.00	0.01	0.03	0.04	0.00
Investované částky	21 750 000	0	250 000	750 000	1 000 000	0
	VW	FIA	REN	OMV	MOL	–
Váhy	0.02	0.00	0.00	0.02	0.01	–
Investované částky	500 000	0	0	500 000	250 000	–

Tabulka 7: Portfolio b1

	riskfree	CBK	EBS	VIG	EON	RWE
Váhy	0.06	0.00	0.10	0.23	0.26	0.0000
Investované částky	1 500 000	0	2 500 000	5 750 000	6 500 000	0
	VW	FIA	REN	OMV	MOL	–
Váhy	0.12	0.00	0.00	0.13	0.10	–
Investované částky	3 000 000	0	0	3 250 000	2 500 000	–

Tabulka 8: Portfolio b2

Úloha c

Formulace úlohy s možností investice do bezrizikového aktiva s úrokovou mírou r_0, s možností výpůjčky do 30% kapitálu s úrokovou mírou r_v a bez možnosti krátkých prodejů:

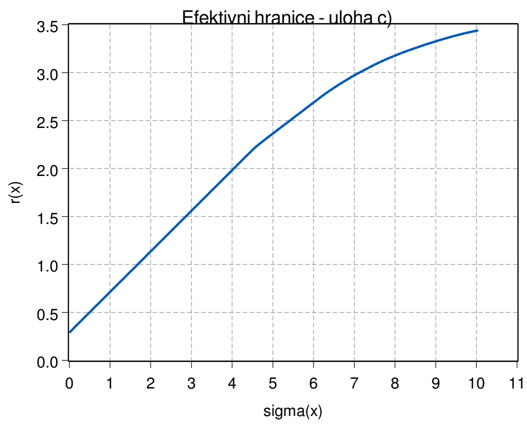
$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ \text{za podmínek} \\ \quad x_0 + \sum_{i=1}^{I} x_i = 1 + x_v, \\ \quad x_i \geq 0, \ \ i = 0, \dots, I, \\ \quad x_v \geq 0, \\ \quad x_v \leq 0.3, \\ \quad x_0 r_0 + \sum_{i=1}^{I} r_i x_i - x_v r_v \geq r_p. \end{array} \tag{12}$$

r_{min} a r_{max} se získají stejně jako v úloze a řešením úloh:

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ \text{za podmínek} \\ \quad x_0 + \sum_{i=1}^{I} x_i = 1 + x_v, \\ \quad x_v \geq 0, \ x_v \leq 0.3, \\ \quad x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, I. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max \ x_0 r_0 + \sum_{i=1}^{I} r_i x_i - x_v r_v \\ \text{za podmínek} \\ \quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ \quad x_v \geq 0, \ x_v \leq 0.3, \\ \quad x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, I. \end{array}$$

Výsledné hodnoty $r_{min} = 0.2900$ a $r_{max} = 3.4451$.
Na obrázku 6 je nakreslena efektivní hranice pro úlohu c.



Obrázek 6: Efektivní hranice v úloze c

Vybraná dvě portfolia, jedno s využitím a druhé bez využití možnosti výpůjčky, jsou charakterizována v následujících tabulkách.

parametry	Portfolio c1	Portfolio c2
$r(\mathbf{x})$	0.83	3.09
$\sigma(\mathbf{x})$	1.3421	7.1925
parametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	1.3776	8.7406
neparametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	1.8666	8.0825

Tabulka 9: Charakteristiky dvou vybraných portfolií

	půjčka	riskfree	CBK	EBS	VIG	EON
Váhy	0.00	0.70	0.00	0.03	0.08	0.08
Investované částky	0	17 500 000	0	750 000	2 000 000	2 000 000
	RWE	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Váhy	0.00	0.04	0.00	0.00	0.04	0.03
Investované částky	0	1 000 000	0	0	1 000 000	750 000

Tabulka 10: Portfolio c1

	půjčka	riskfree	CBK	EBS	VIG	EON
Váhy	0.30	0.00	0.00	0.00	0.08	0.37
Investované částky	-7 500 000	0	0	0	2 000 000	9 250 000
	RWE	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Váhy	0.00	0.30	0.00	0.00	0.36	0.19
Investované částky	0	7 500 000	0	0	9 000 000	4 750 000

Tabulka 11: Portfolio c2

Úloha d

Formulace základní úlohy Markowitzova modelu s možností krátkých prodejů:

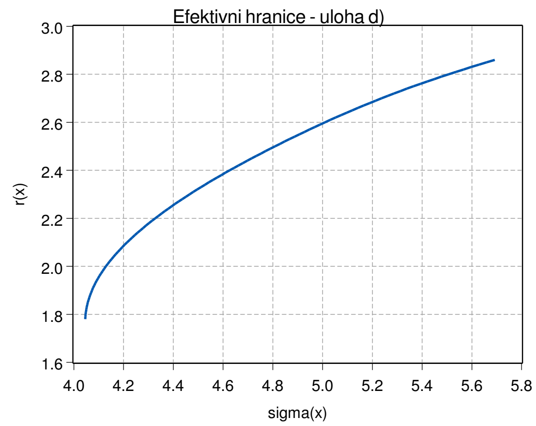
$$
\begin{array}{l}
\min \ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\
\text{za podmínek} \\
\quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\
\quad \sum_{i=1}^{I} x_i^- \leq 0.3, \\
\quad \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p.
\end{array} \tag{13}
$$

r_{min} a r_{max} jsme získaly řešením úloh:

$$
\begin{array}{l}
\min \ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\
\text{za podmínek} \\
\quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\
\quad \sum_{i=1}^{I} x_i^- \leq 0.3.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\max \ \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \\
\text{za podmínek} \\
\quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\
\quad \sum_{i=1}^{I} x_i^- \leq 0.3.
\end{array}
$$

Výsledné hodnoty $r_{min} = 1.7678$ a $r_{max} = 2.8689$.
Na obrázku 7 je nakreslena efektivní hranice pro úlohu d.



Obrázek 7: Efektivní hranice v úloze d

V následujících tabulkách jsou popsána dvě eficientní portfolia s různou mírou využití možnosti krátkých prodejů.

parametry	Portfolio d1	Portfolio d2
$r(\mathbf{x})$	1.85	2.55
$\sigma(\mathbf{x})$	4.0563	4.9071
parametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	4.8221	5.5215
neparametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	5.6072	6.7721

Tabulka 12: Charakteristiky dvou vybraných portfolií

	CBK	EBS	VIG	EON	RWE
Váhy	-0.07	0.22	0.33	0.23	0.05
Investované částky	-1 750 000	5 500 000	8 250 000	5 750 000	1 250 000
	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Váhy	0.04	0.08	0.02	0.03	0.07
Investované částky	1 000 000	2 000 000	500 000	750 000	1 750 000

Tabulka 13: Portfolio d1

	CBK	EBS	VIG	EON	RWE
Váhy	0.00	0.13	0.28	0.32	-0.03
Investované částky	0	3 250 000	7 000 000	8 000 000	-750 000
	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Váhy	0.23	-0.03	-0.21	0.18	0.13
Investované částky	5 750 000	-750 000	-5 250 000	4 500 000	3 250 000

Tabulka 14: Portfolio d2

Úloha e

Formulace úlohy bez krátkých prodejů s takovým omezením, že žádná akcie nesmí být v portfoliu zastoupena více než patnácti procenty:

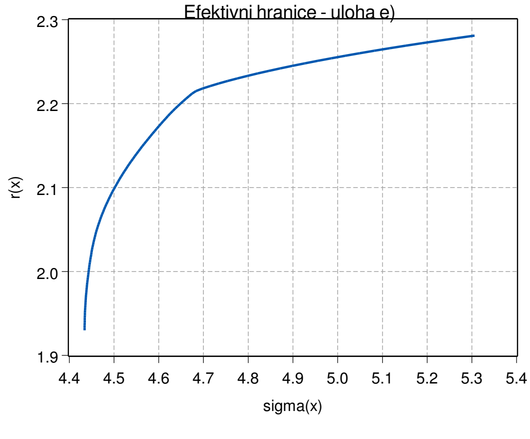
$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ \text{za podmínek} \\ \quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, I, \\ \quad x_i \leq 0.15, \ \ i = 1, \dots, I, \\ \quad \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \geq r_p. \end{array} \tag{14}$$

Hodnoty r_{min} a r_{max} jsme získaly řešením následujících úloh:

$$\begin{array}{l} \min \ \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{I} x_i x_j V_{ij} \\ \text{za podmínek} \\ \quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, I, \\ \quad x_i \leq 0.15 \ \ i = 1. \dots, I. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max \ \sum_{i=1}^{I} r_i x_i \\ \text{za podmínek} \\ \quad \sum_{i=1}^{I} x_i = 1, \\ \quad x_i \geq 0, \ \ i = 1, \dots, I, \\ \quad x_i \leq 0.15 \ \ i = 1. \dots, I. \end{array}$$

Výsledné hodnoty $r_{min} = 1.9297$ a $r_{max} = 2.2869$.
Na obrázku 8 je nakreslena efektivní hranice pro úlohu e.



Obrázek 8: Efektivní hranice v úloze e

Vzhledem k přidané značně omezující podmínce na složení portfolií se zmenšil interval $[r_{min}, r_{max}]$ a ve výsledných portfoliích není dosahováno takových výnosů, jako v předchozích úlohách. Vybraná dvě portfolia jsou popsána v následujících tabulkách.

parametry	Portfolio e1	Portfolio e1
$r(\mathbf{x})$	1.96	2.27
$\sigma(\mathbf{x})$	4.4360	5.1887
parametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	5.3366	6.2627
neparametrický $\mathrm{VaR}_{0.05}$	7.9480	8.6625

Tabulka 15: Charakteristiky dvou vybraných portfolií

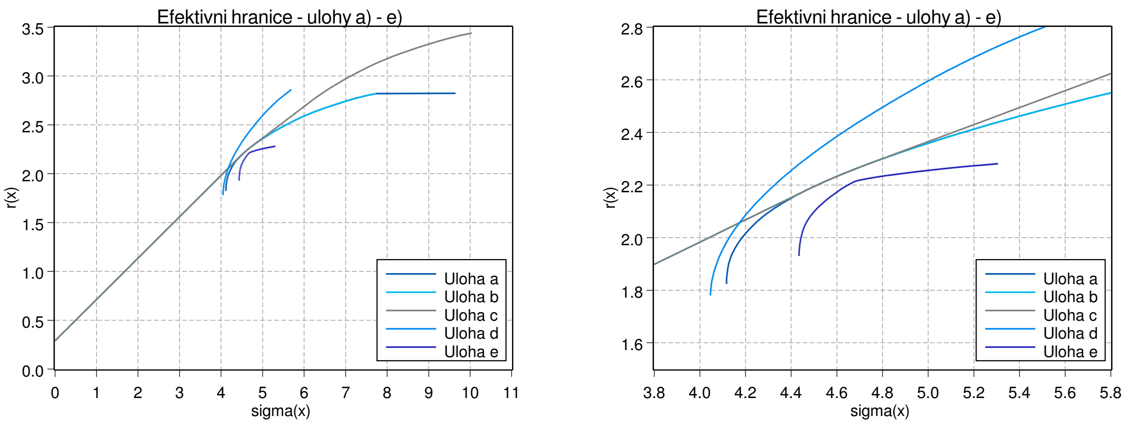
	CBK	EBS	VIG	EON	RWE
Váhy	0.00	0.15	0.15	0.15	0.15
Investované částky	0	3 750 000	3 750 000	3 750 000	3 750 000
	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Váhy	0.03	0.11	0.03	0.09	0.14
Investované částky	750 000	2 750 000	750 000	2 250 000	3 500 000

Tabulka 16: Portfolio e1

	CBK	EBS	VIG	EON	RWE
Váhy	0.12	0.00	0.13	0.15	0.15
Investované částky	3 000 000	0	3 250 000	3 750 000	3 750 000
	VW	FIA	REN	OMV	MOL
Váhy	0.15	0.00	0.00	0.15	0.15
Investované částky	3 750 000	0	0	3 750 000	3 750 000

Tabulka 17: Portfolio e2

Na následujících obrázcích 9 jsou pro srovnání vykresleny efektivní hranice pro všechny úlohy.



Obrázek 9: Efektivní hranice v úlohách a) - e).