SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, Kamenice 3, 4. patro, dv.č.424

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

XI. STABILITA

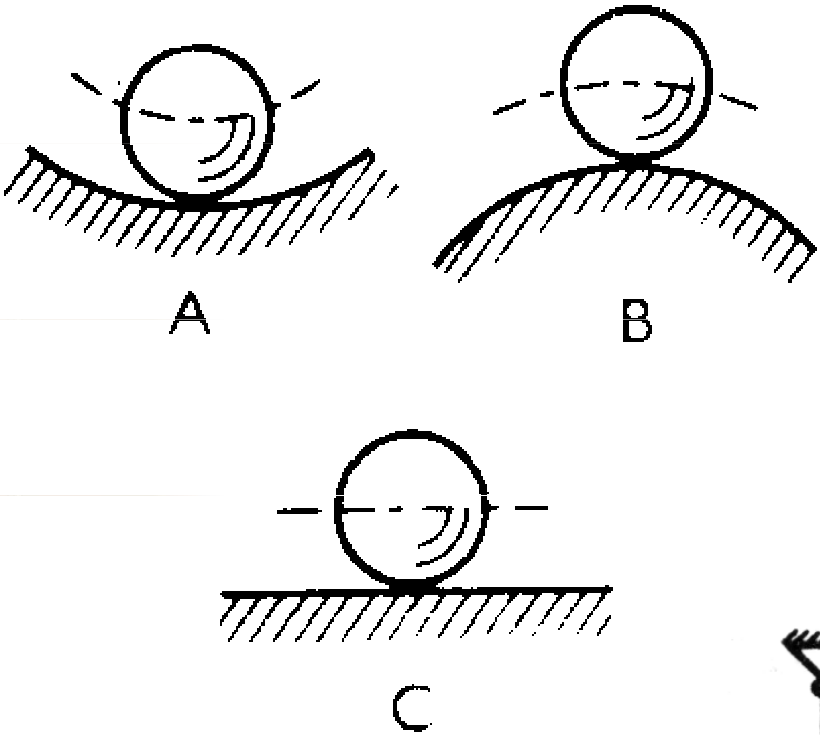
MU

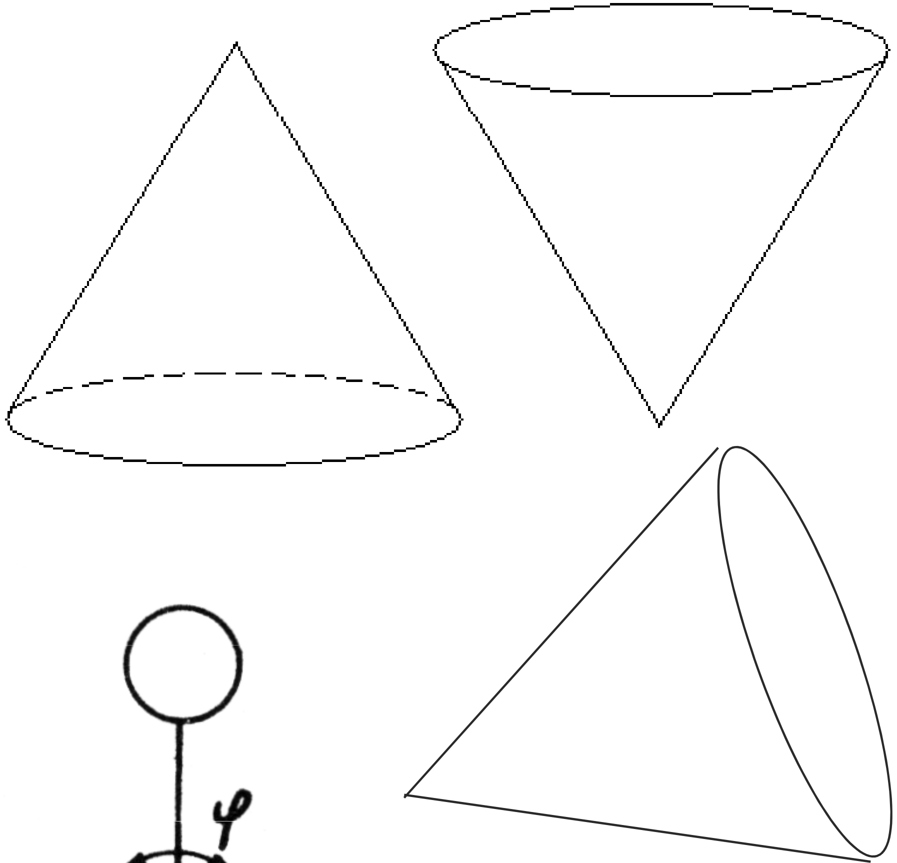
IBA

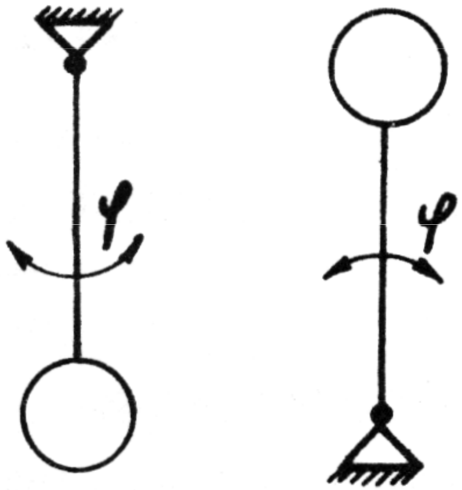
KDY JE A KDY NENÍ SYSTÉM STABILNÍ

- ☑ **Stabilita** - vlastnost systému, kterou můžeme charakterizovat jeho schopností udržet své chování či rysy (parametry) v předepsaných mezích i za případného vnějšího rušivého působení.
- ☑ **Rovnováha** - relativně stálý stav systému, vzniklý vyrovnáním vlivů na systém působících.

KDY JE A KDY NENÍ SYSTÉM STABILNÍ







STABILITA

- **Ljapunovská stabilita**: Rovnovážný stav x_e je ljapunovsky stabilní právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro libovolný počáteční stav x_0, který leží v okolí δ rovnovážného stavu, tj.

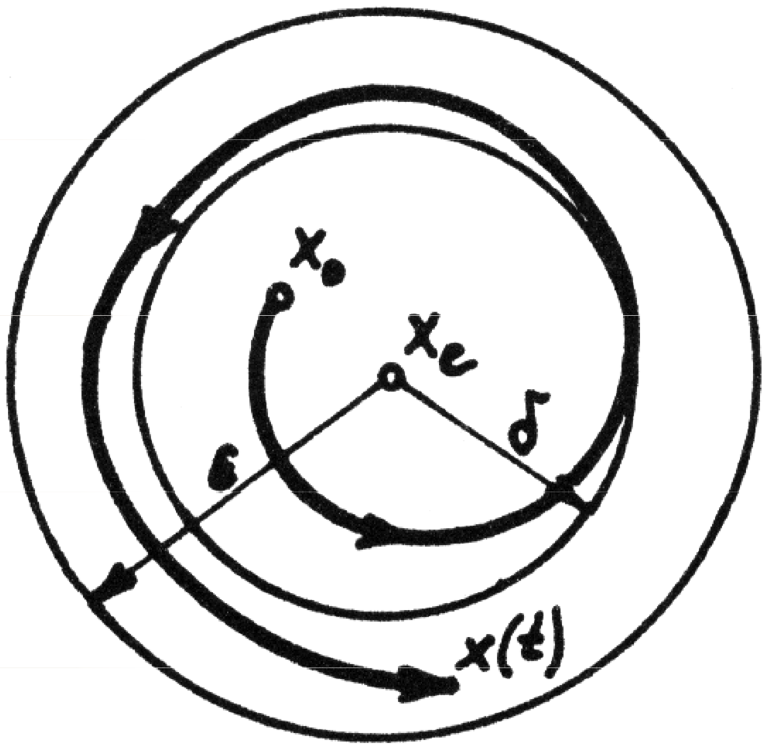
$$\|x_0 - x_e\| < \delta$$

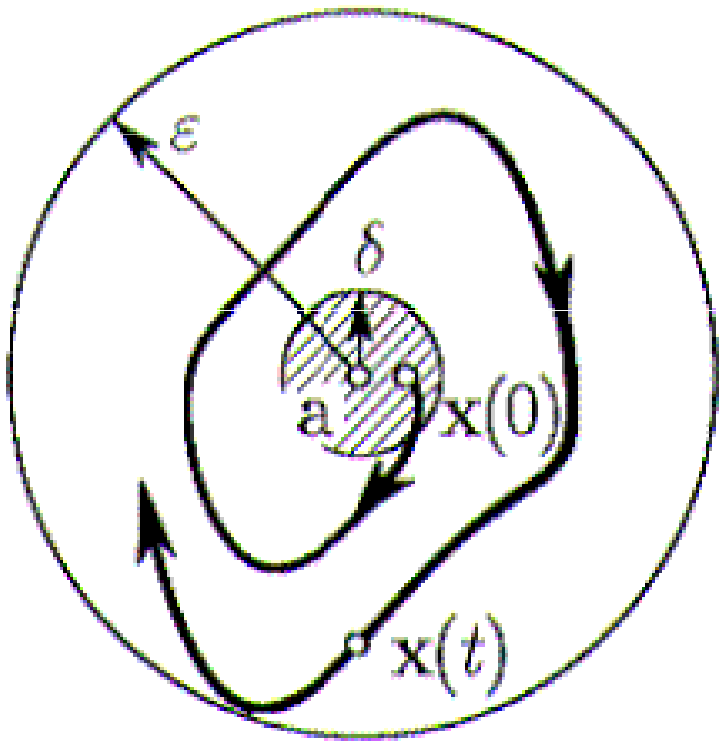
platí, že všechny stavy x(t), které jsou řešením systému, leží v blízkosti rovnovážného stavu, tj.

$$\|x(t) - x_e\| < \varepsilon$$

STABILITA

- ☑ Ljapunovská stabilita





STABILITA

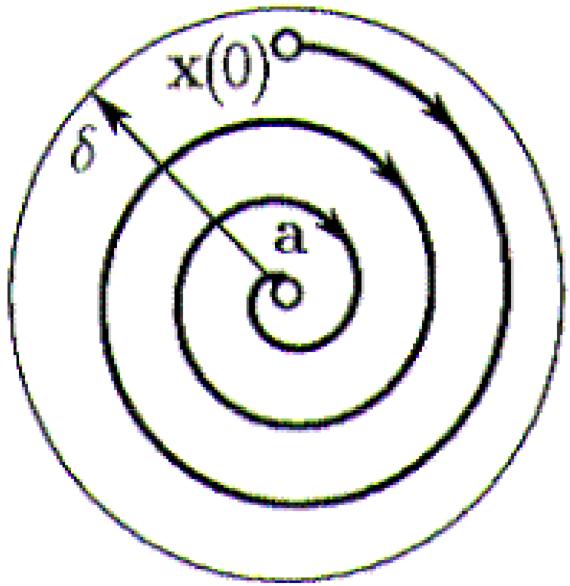
- Ljapunovská stabilita
  - Nevyžadujeme, aby blízké řešení konvergovalo do rovnovážného stavu, ale pouze vyžadujeme, aby se mu příliš nevzdalovalo.

- Kvaziasymptotická stabilita:
- Rovnovážný stav x_e je kvaziasymptoticky stabilní právě tehdy, když existuje takové číslo $\delta > 0$, že každý stav $x(t)$ systému, který leží v δ okolí rovnovážného stavu, konverguje pro $t \to \infty$ k tomuto rovnovážnému stavu, neboli $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_e$.

STABILITA

- Asymptotická stabilita:

  Rovnovážný stav je asymptoticky stabilní právě tehdy, když je ljapunovsky stabilní i kvaziasymptoticky stabilní.



STABILITA

- ☑ Stabilitu můžeme definovat i z „vnějšího pohledu" a to tak, že na každý omezený vstup (co do hodnot) bude systém reagovat omezeným výstupem (co do hodnot) (BIBO - Bounded Input – Bounded Output, ohraničený vstup – ohraničený výstup) .
- ☑ Podle této definice lze ověřit pouze nestabilitu.
- ☑ Nutnou a postačující podmínkou pro BIBO stabilitu je absolutní integrovatelnost jeho impulsní charakteristiky, tj. musí platit

$$\int_0^\infty |g(t)|\, dt < \infty$$

- Pro diskrétní systémy platí obdobná tvrzení.

KDY JE A KDY NENÍ SYSTÉM STABILNÍ

dva základní přístupy k určení stability:

- ☑ stabilita vůči počátečnímu stavu (daná konvergencí přirozené odezvy);
- ☑ stabilita vynuceného pohybu;

STABILITA VYNUCENÉHO POHYBU

- ☑ tendence systému reagovat přiměřeně na podnět konečné délky a po jeho zániku se vrátit do výchozího stavu (není nezbytnou podmínkou

DEFINICE:

Systém je stabilní, pokud na každý ohraničený vstup x(t) [x(nT)] (co do hodnot) reaguje rovněž ohraničeným výstupem y(t) [y(nT)]

(dle této definice lze ověřit pouze nestabilitu)

STABILITA VYNUCENÉHO POHYBU

- asymptoticky stabilní systém je systém, jehož přirozená odezva časem zaniká

mějme **lineární** systém pracující ve spojitém čase 2. řádu definovaný přenosovou funkcí

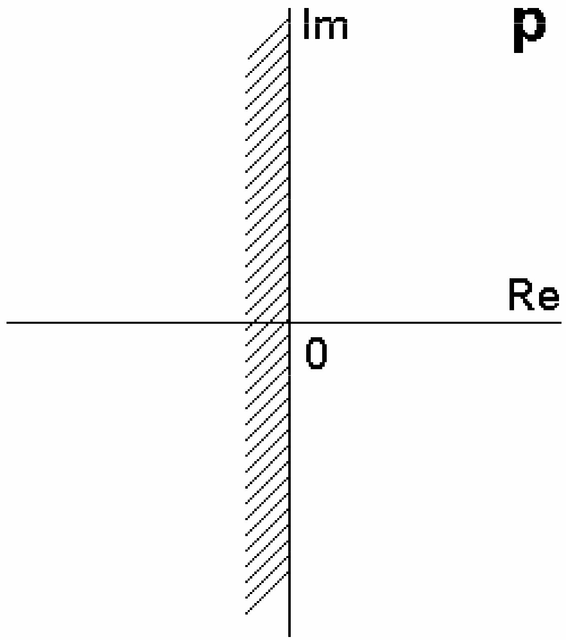
$$H(p) = \frac{K}{p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{K}{(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{A}{(p - p_1)} + \frac{B}{(p - p_1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{p - p_1}\right) \approx A.e^{p_1 t}$$

$$h(t) = A.e^{p_1 t} + B.e^{p_2 t}$$

NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY

- Oblast, ve které leží póly stabilního systému, je v komplexní rovině levá polorovina bez imaginární osy.
- Jsou-li póly systému na imaginární ose, říkáme, že je **systém na mezi stability**.



NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY

- *Příklad*: Mějme minimální realizaci systému s přenosovou funkcí

$$G(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p+1)^2(2p+3)(0{,}1p+1)(p^2+2p+2)}$$

NUTNÉ A POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY

- *Příklad*: Mějme minimální realizaci systému s přenosovou funkcí

$$G(p) = \frac{p^2 + 2p + 3}{(p+1)^2(2p+3)(0{,}1p+1)(p^2+2p+2)}$$

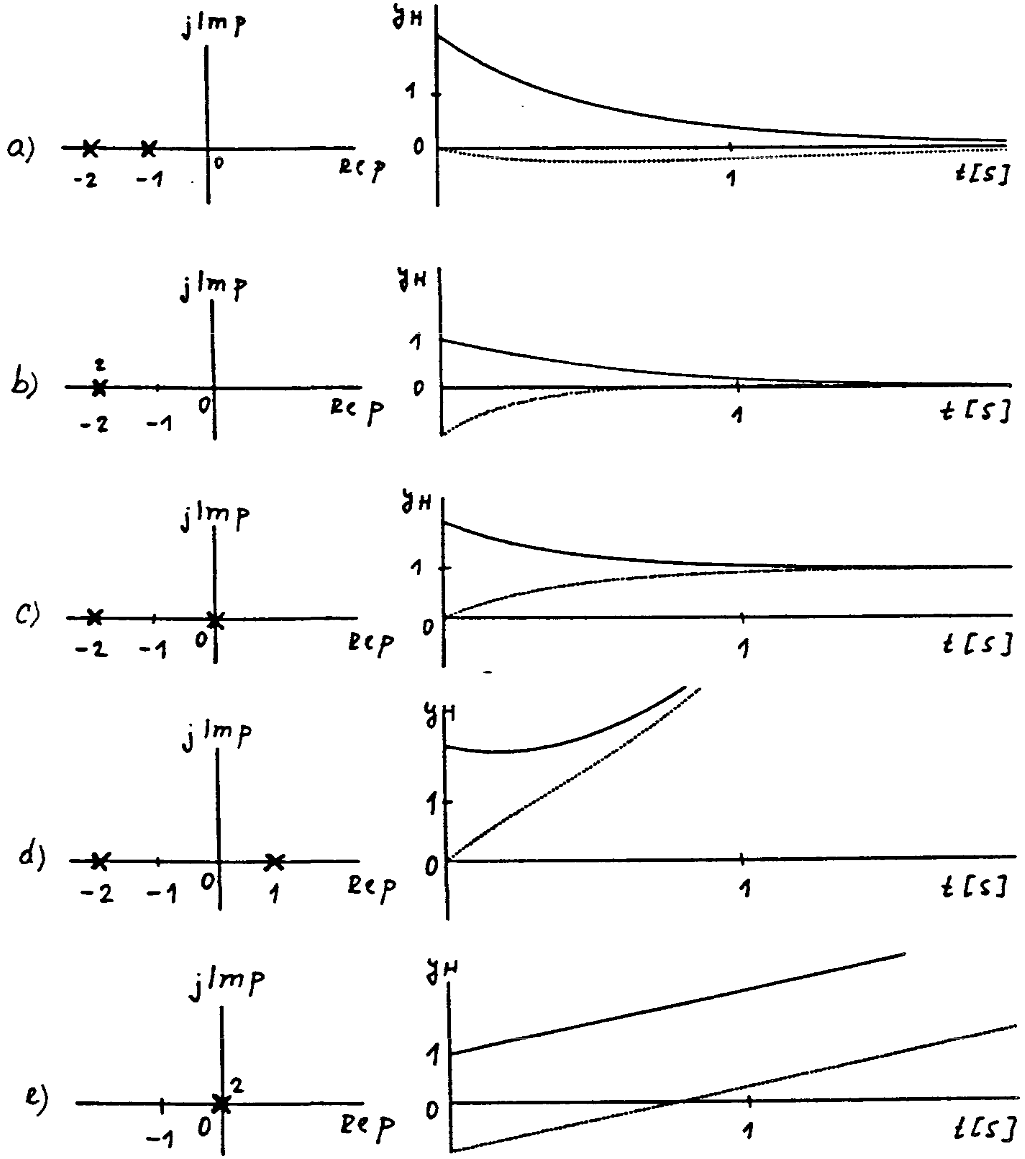
Póly přenosové funkce jsou:

$$p_{1,2} = -1 \qquad p_3 = -\frac{3}{2} \qquad p_4 = -\frac{1}{0{,}1}$$

$$p_5 = -1 - j \quad p_6 = -1 + j$$

Tento systém je ljapunovsky i asymptoticky stabilní

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení reálných pólů a různé integrační konstanty C_1 a C_2. Plná čára: $C_1 = C_2 = 1$. Tečkovaná čára: $C_1 = -1$, $C_2 = 1$.

a) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$

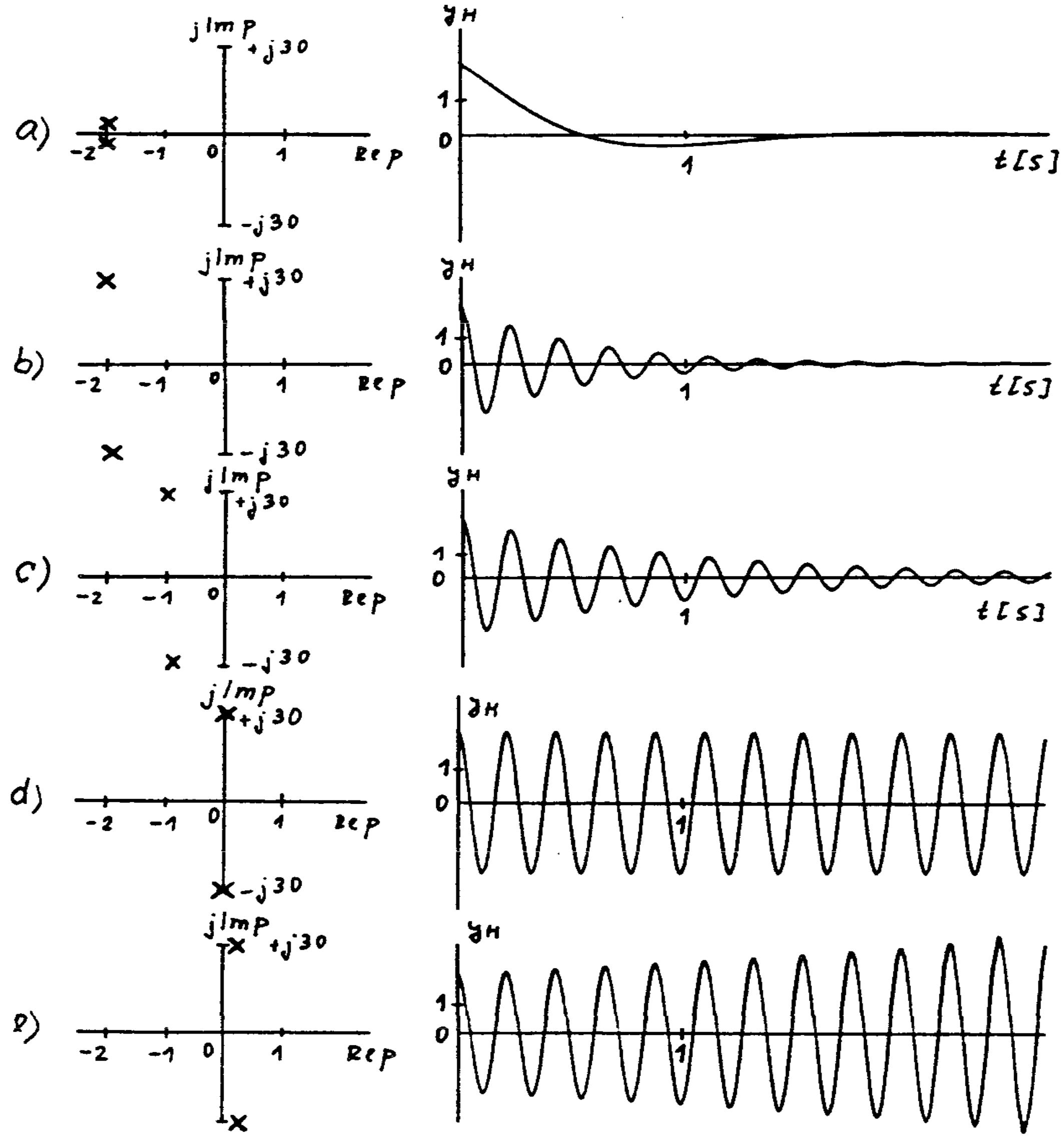
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$

c) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2$

d) $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ $\quad y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

e) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ $\quad y_H(t) = C_1 + C_2 t$

STABILITA VŮČI POČÁTEČNÍMU STAVU



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení komplexních pólů a integrační konstanty $C_1 = C_2 = 1$.

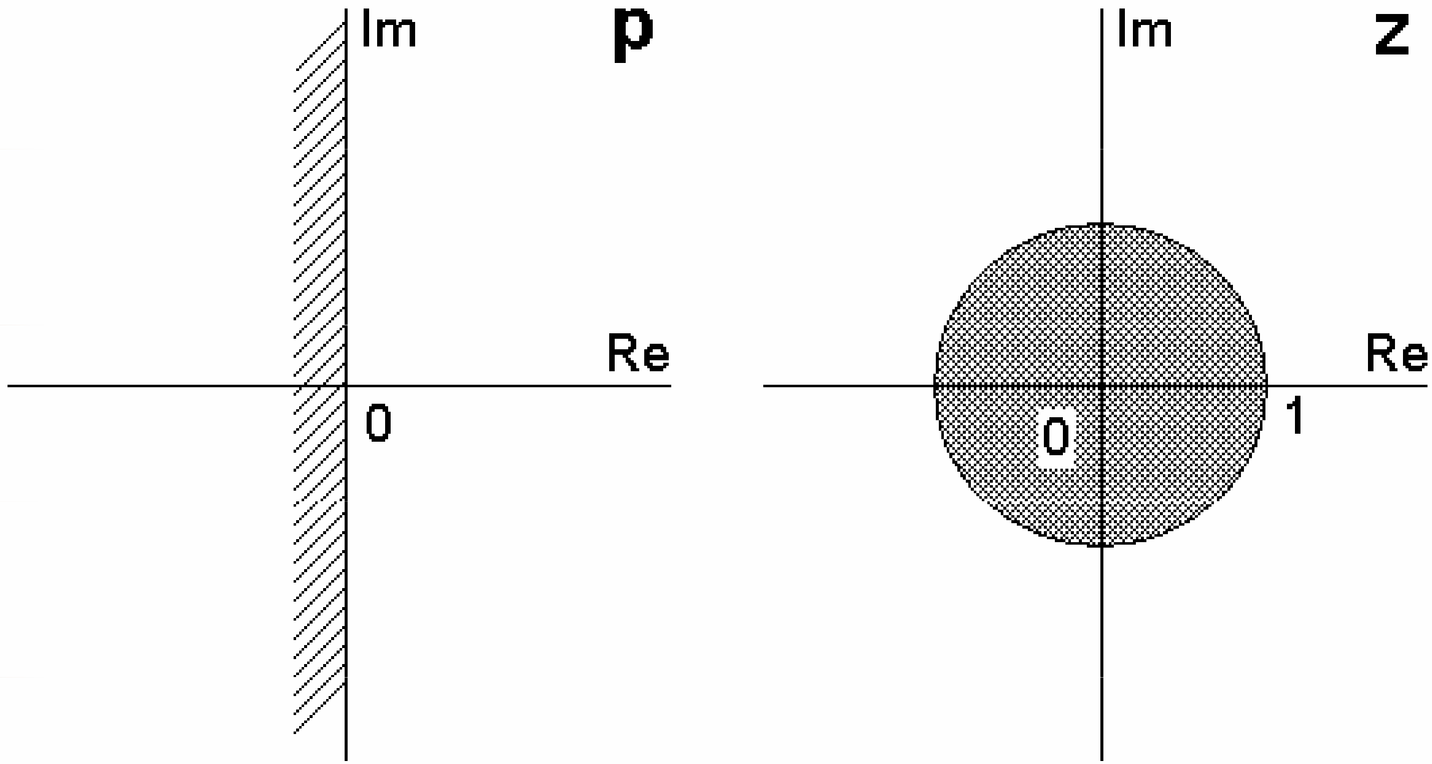
a)	$\lambda_1 = -2 + j3,\ \lambda_2 = -2 - j3$	$y_H(t) = 2e^{-2t}\cos(3t)$
b)	$\lambda_1 = -2 + j30,\ \lambda_2 = -2 - j30$	$y_H(t) = 2e^{-2t}\cos(30t)$
c)	$\lambda_1 = -1 + j30,\ \lambda_2 = -1 - j30$	$y_H(t) = 2e^{-t}\cos(30t)$
d)	$\lambda_1 = j30,\ \lambda_2 = -j30$	$y_H(t) = 2\cos(30t)$
e)	$\lambda_1 = 0.2 + j30,\ \lambda_2 = 0{,}2 - j30$	$y_H(t) = 2e^{0.2t}\cos(30t)$

STABILITA DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ

- ☑ Stabilitu diskrétních systémů vyšetřujeme pomocí pólů systému respektive vlastních čísel matice systému.

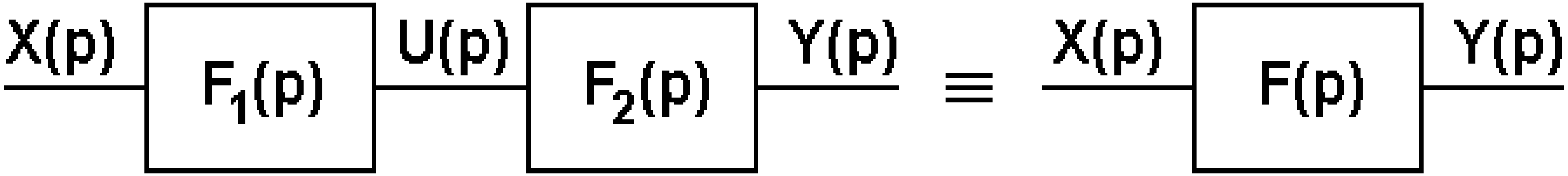
- ☑ Lineární stacionární systém je asymptoticky stabilní právě tehdy, jsou-li póly systému v absolutní hodnotě menší než 1,resp. vlastní čísla matice systému M.

STABILITA DISKRÉTNÍCH SYSTÉMŮ



XII.
SPOJOVÁNÍ SYSTÉMŮ
ZPĚTNÁ VAZBA

SÉRIOVÉ (KASKÁDNÍ) ZAPOJENÍ

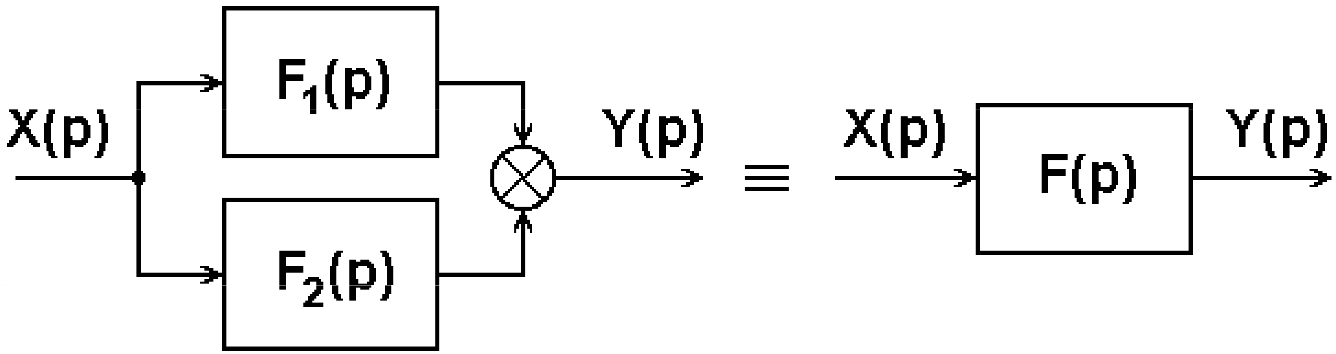


$$F_1(p) = \frac{U(p)}{X(p)} \qquad F_2(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \qquad F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} \cdot \frac{U(p)}{U(p)} = \frac{U(p)}{X(p)} \cdot \frac{Y(p)}{U(p)} = F_1(p).F_2(p)$$

$$F(p) = \prod_{i=1}^{N} F_i(p)$$

PARALELNÍ ZAPOJENÍ

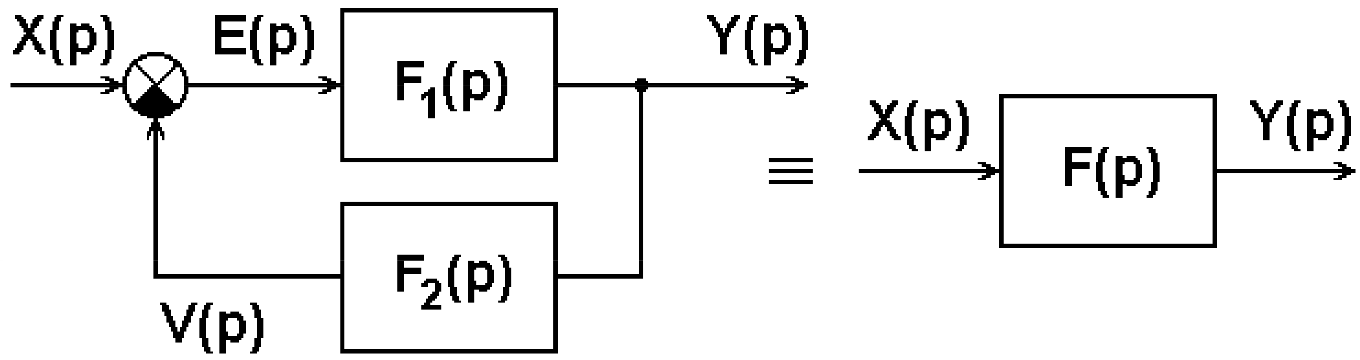


$$F_1(p) = \frac{Y_1(p)}{X(p)} \quad F_2(p) = \frac{Y_2(p)}{X(p)} \qquad F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{Y_1(p) + Y_2(p)}{X(p)} = F_1(p) + F_2(p)$$

$$F(p) = \sum_{i=1}^{N} F_i(p)$$

ZPĚTNOVAZEBNÍ ZAPOJENÍ



$$F_1(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} \qquad F_2(p) = \frac{V(p)}{Y(p)} \qquad F(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

$$E(p) = X(p) - V(p) \qquad X(p) = E(p) + V(p)$$

ZPĚTNOVAZEBNÍ ZAPOJENÍ

$$F(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{Y(p)}{E(p)+V(p)}=\frac{Y(p)}{E(p)+V(p)}\cdot\frac{\frac{1}{E(p)}}{\frac{1}{E(p)}}=\frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1+\frac{V(p)}{E(p)}}=\frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1+\frac{V(p)}{E(p)}\cdot\frac{Y(p)}{Y(p)}}=$$

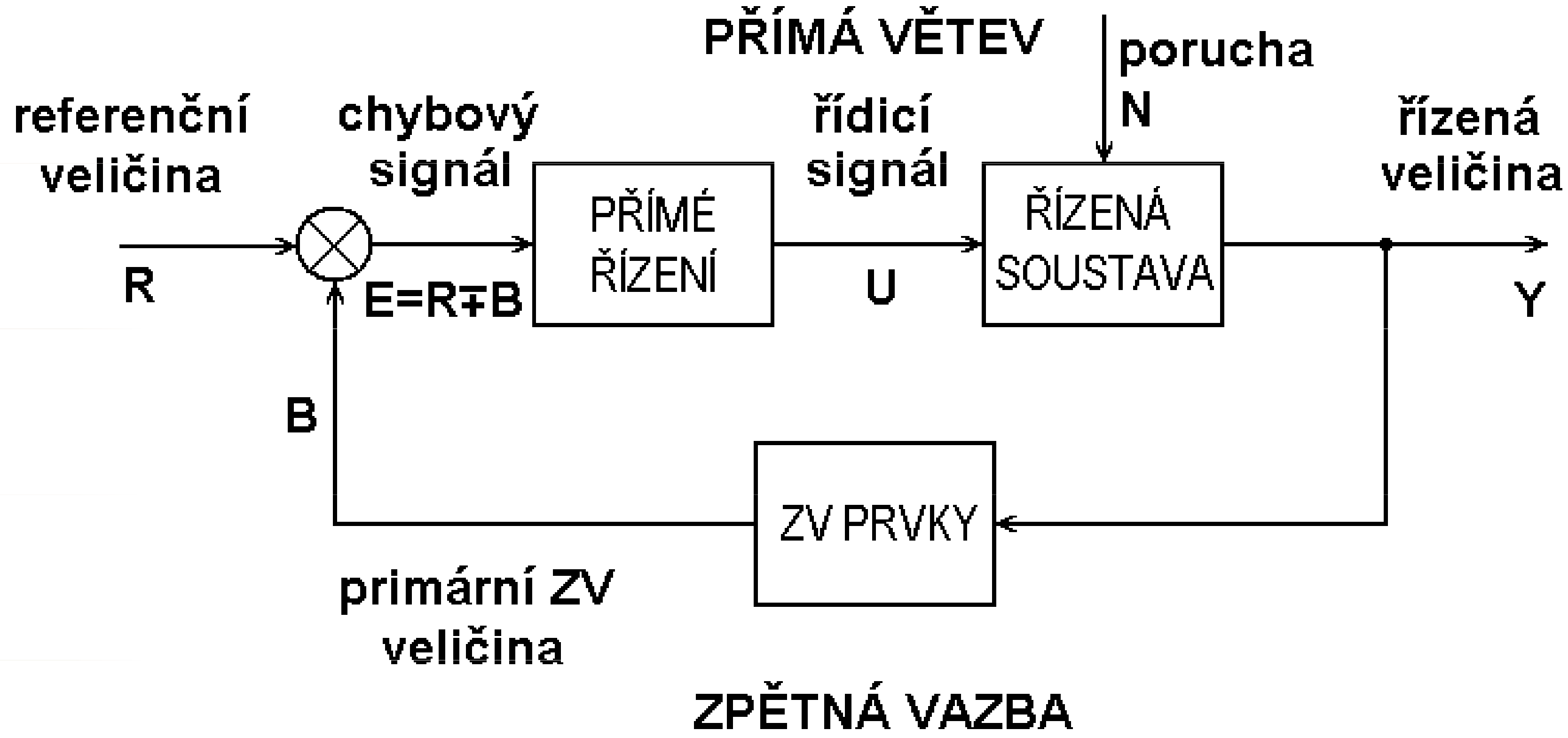
$$=\frac{\frac{Y(p)}{E(p)}}{1+\frac{Y(p)}{E(p)}\cdot\frac{V(p)}{Y(p)}}=\frac{F_1(p)}{1+F_1(p).F_2(p)}$$

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{1-F_1(p).F_2(p)}$$

kladná ZV

$$F(p)=\frac{\text{celková přenosová funkce přímé větve}}{1\mp\text{součin celkových přenosových funkcí přímé a zpětné větve}}$$

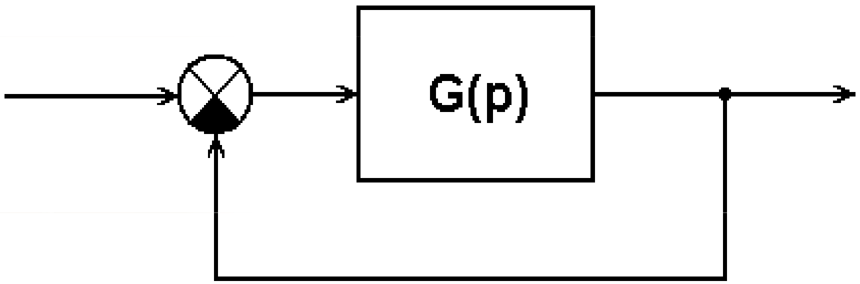
ZPĚTNÁ VAZBA
PRINCIP REGULACE



ZPĚTNÁ VAZBA
VLASTNOSTI

- zvýšená přesnost – např. schopnost věrně reprodukovat vstup;
- snížená citlivost poměru výstup/vstup na změny parametrů systému;
- snížený vliv nelinearit;
- snížený vliv vnějších poruch a šumu;
- širší rozsah frekvenčního pásma;
- tendence k oscilacím a nestabilitě;

PŘÍKLAD ROZŠÍŘENÍ FREKVENČNÍHO PÁSMA



$$G(p) = \frac{1}{p+1} \qquad G(\omega) = \frac{1}{j\omega+1}$$

$$H(\omega) = \frac{G(\omega)}{1+G(\omega)} = \frac{\frac{1}{j\omega+1}}{1+\frac{1}{j\omega+1}} = \frac{\frac{1}{j\omega+1}}{\frac{j\omega+1+1}{j\omega+1}} = \frac{1}{j\omega+2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}j\omega+1}$$

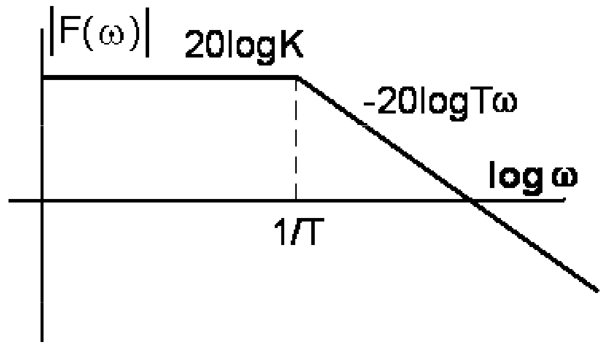
SYSTÉM SE SETRVAČNOSTÍ 1.ŘÁDU

☑ modulová logaritmická frekvenční charakteristika

$$\left|F(\omega)\right|_{dB} = 20\log\left|(F(\omega)\right| = 20\log K - 20\log\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

➔ pro ω « 1/T je $(T\omega)^2 \ll 1$ a tedy

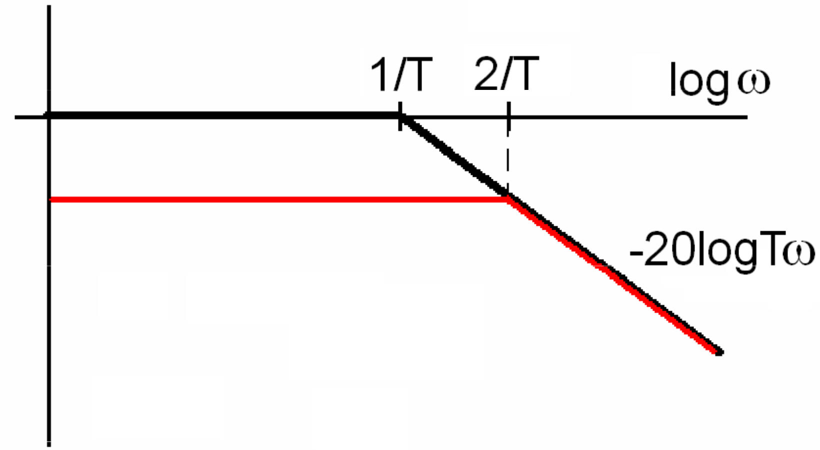
$$\left|F(\omega)\right|_{dB} = 20\log K$$



➔ pro ω » 1/T je $(T\omega)^2 \gg 1$ a tedy

$$\left|F(\omega)\right|_{dB} = 20\log K - 20\log T\omega$$

PŘÍKLAD ROZŠÍŘENÍ FREKVENČNÍHO PÁSMA

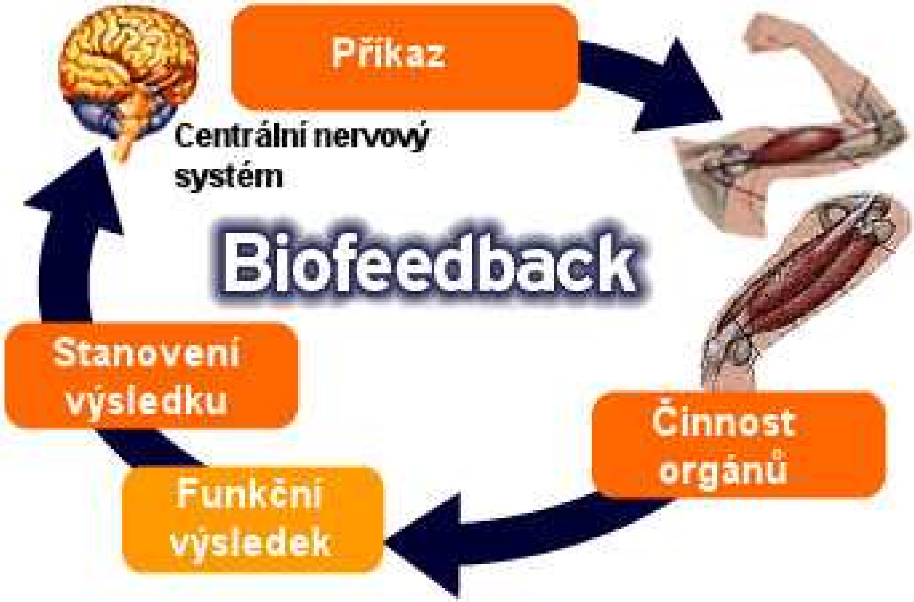


$$H(\omega)\big|_{dB} = 20\log K - 20\log T\omega$$

$$H(\omega)\big|_{dB} = 20\log\frac{K}{2} - 20\log\frac{T}{2}\omega = 20\log K - \cancel{20\log 2} - 20\log T\omega + \cancel{20\log 2}$$

BIOLOGICKÁ ZPĚTNÁ VAZBA

Biologická zpětná vazba je mechanismus, který prostřednictvím měření a smyslově vnímatelného znázornění stavu určitého subsystému lidského organismu umožňuje tento stav změnit volní činnosti vyšetřované osoby.



Může-li si člověk prostřednictvím určitého přístroje uvědomit stav či změnu stavu svého organismu (které by si normálně nevšimnul), např. generování EEG signálu s převažujícím výskytem složek o frekvencích z intervalu 8 – 12 Hz – rytmus alfa, pak se může naučit tento stav do určité míry ovlivňovat.

BIOLOGICKÁ ZPĚTNÁ VAZBA

- Veličiny, které mohou být biologickou zpětnou vazbou vědomě modifikovány, jsou např. klidové svalové napětí, srdeční rytmus, tlak krve, periferní tok krve (vasokonstrikce, resp. vasodilatace), kožní odpor či EEG signál.
- Znázornění hodnoty sledované veličiny je především vizuální (poloha ukazatele, umístění bodu na ploše obrazovky) nebo akustické (výška či hlasitost tónu). V poslední době se prosazuje forma jednoduchých počítačových her.
- Možnost (schopnost) ovlivňovat stav vlastního organismu umožňuje využít tohoto principu v terapii psychických poruch různého typu.

Příprava nových učebních materiálů
pro obor Matematická biologie

je podporována projektem ESF

č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318

„VÍCEOBOROVÁ INOVACE STUDIA MATEMATICKÉ BIOLOGIE"

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ