



# SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTEMY



**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

[holcik@iba.muni.cz](mailto:holcik@iba.muni.cz), Kamenice 3, 4. patro, dv.č.424

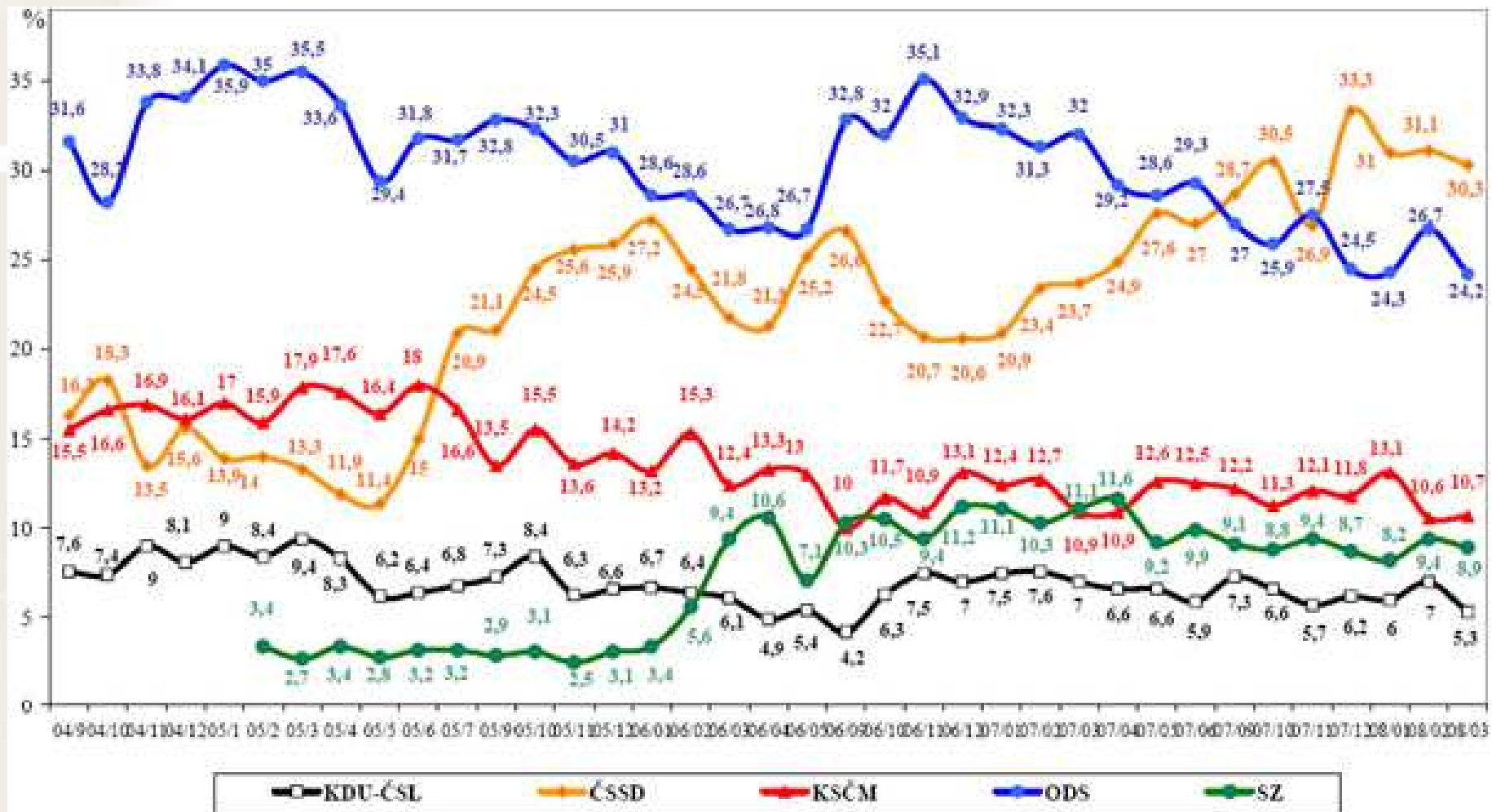


INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

# IV. FREKVENČNÍ TRASFORMACE

∞ SPOJITÉ SIGNÁLY ∞

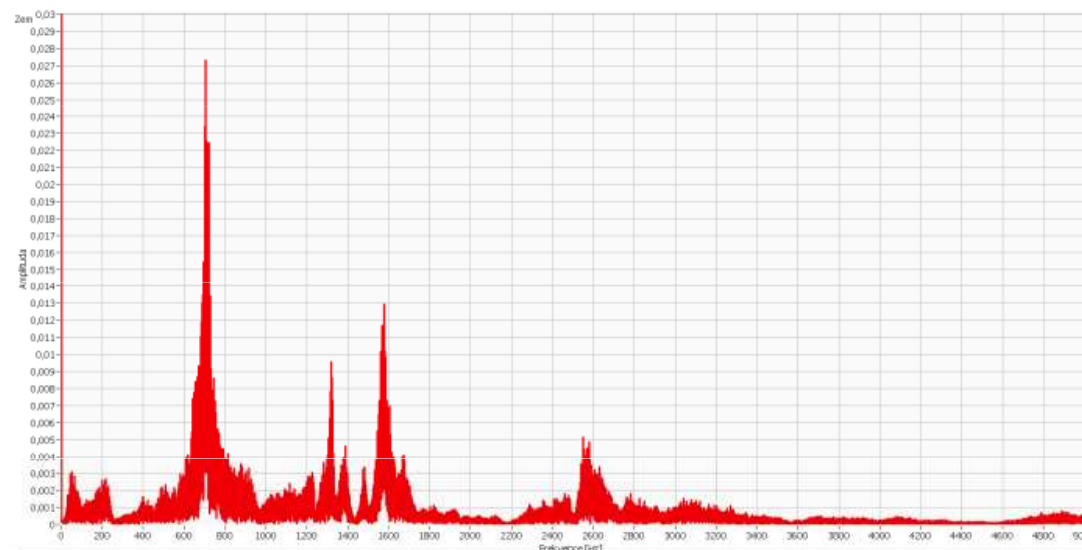
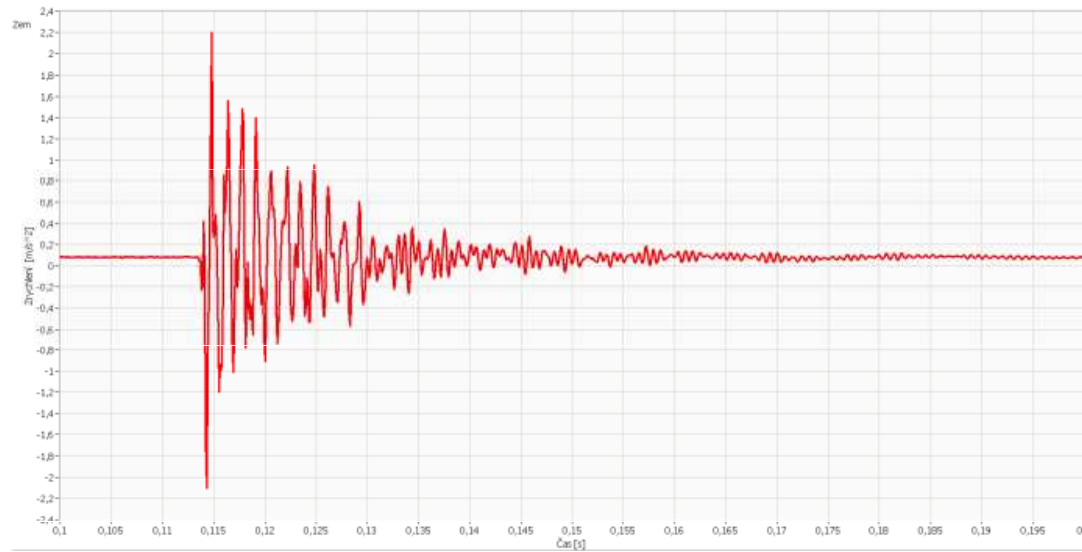
# ČASOVÁ ŘADA



Zdroj: STEM, Trendy 2004/9 - 2008/03

Preference politických stran v ČR v období od 8/2004 do 3/2008

# OSCILACE



# !!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!



**Frekvenční spektrum** signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

**! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !**

# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

- ✓ Fourierova analýza – snaha vyjádřit (rozložit, rozvinout) signál jako součet jednoduchých funkcí (harmonických signálů, složek).
- ✓ počty těchto harmonických složek, jejich amplitudy, frekvence a fázové posuny charakterizují analyzovaný signál.
- ✓ Fourierova řada
- ✓ Fourierův integrál, Fourierova transformace
- ✓ Fourierovy řady mohou být vyjádřeny buď v **trigonometrickém** nebo **komplexním** tvaru.
- ✓ zpracovávat můžeme spojité nebo diskrétní signály.

# TAYLORŮV ROZVOJ

Nechť funkce  $f(x)$  má v okolí  $U(x_0)$  bodu  $x_0$  derivace až do řádu  $n+1$  včetně

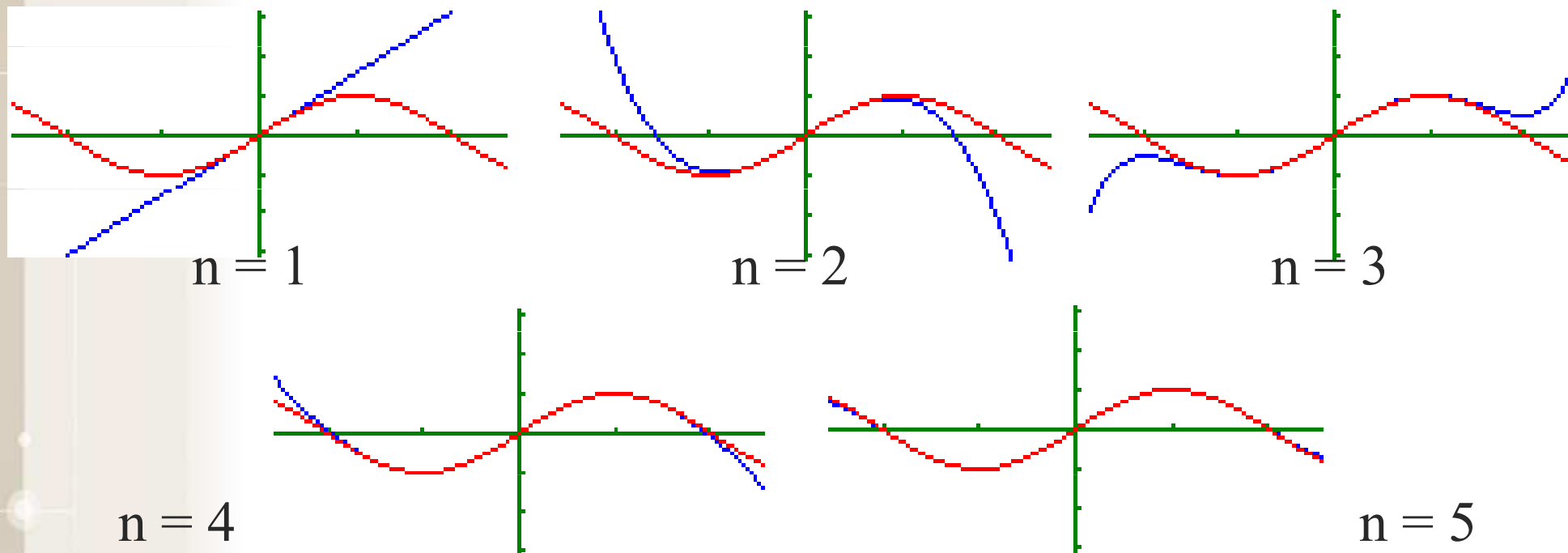
Taylorova řada

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1} (x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x)$$

Maclaurinova řada, tj. Taylorova řada pro  $x_0 = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_n(x)$$

# TAYLORŮV ROZVOJ FUNKCE $y = \sin(x)$ PRO $x = 0$

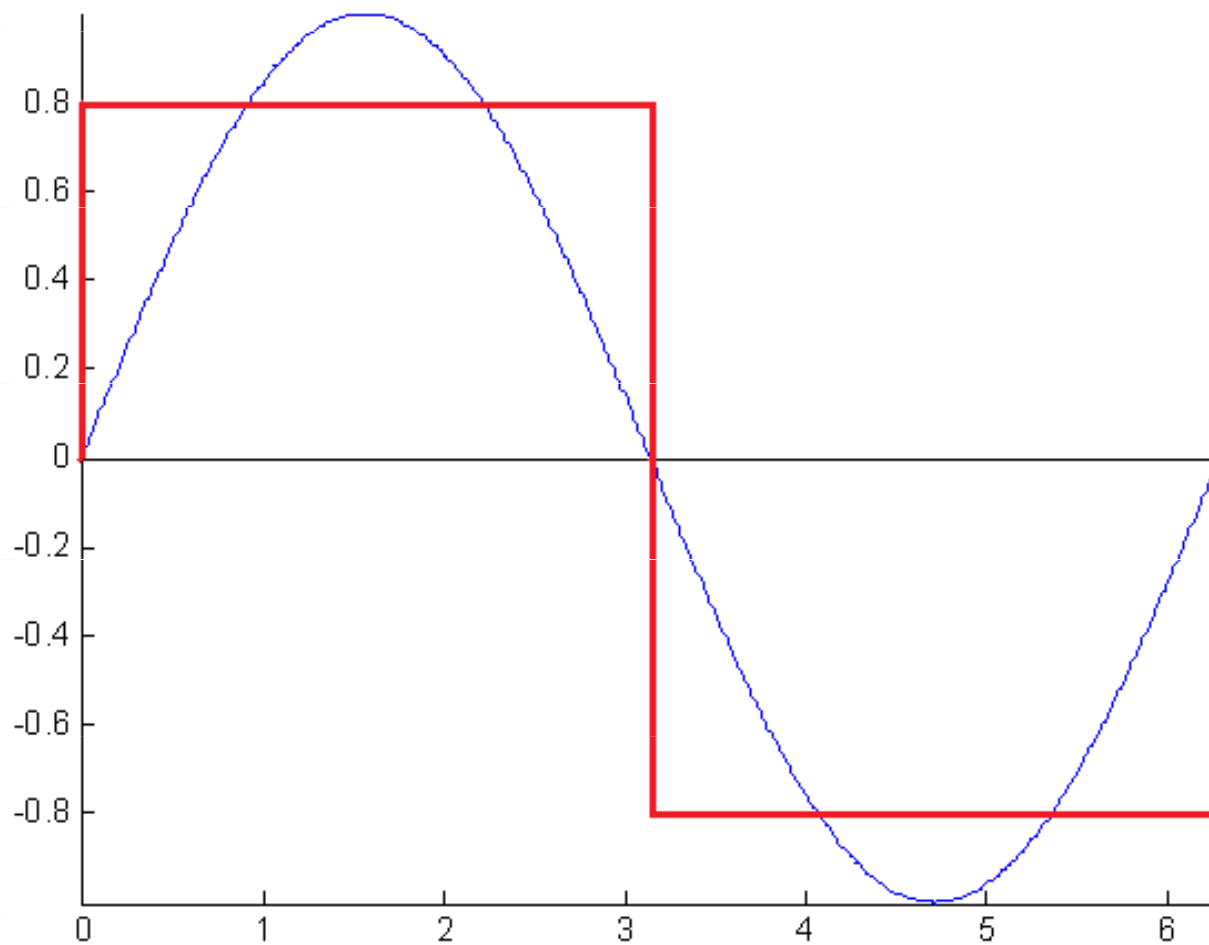


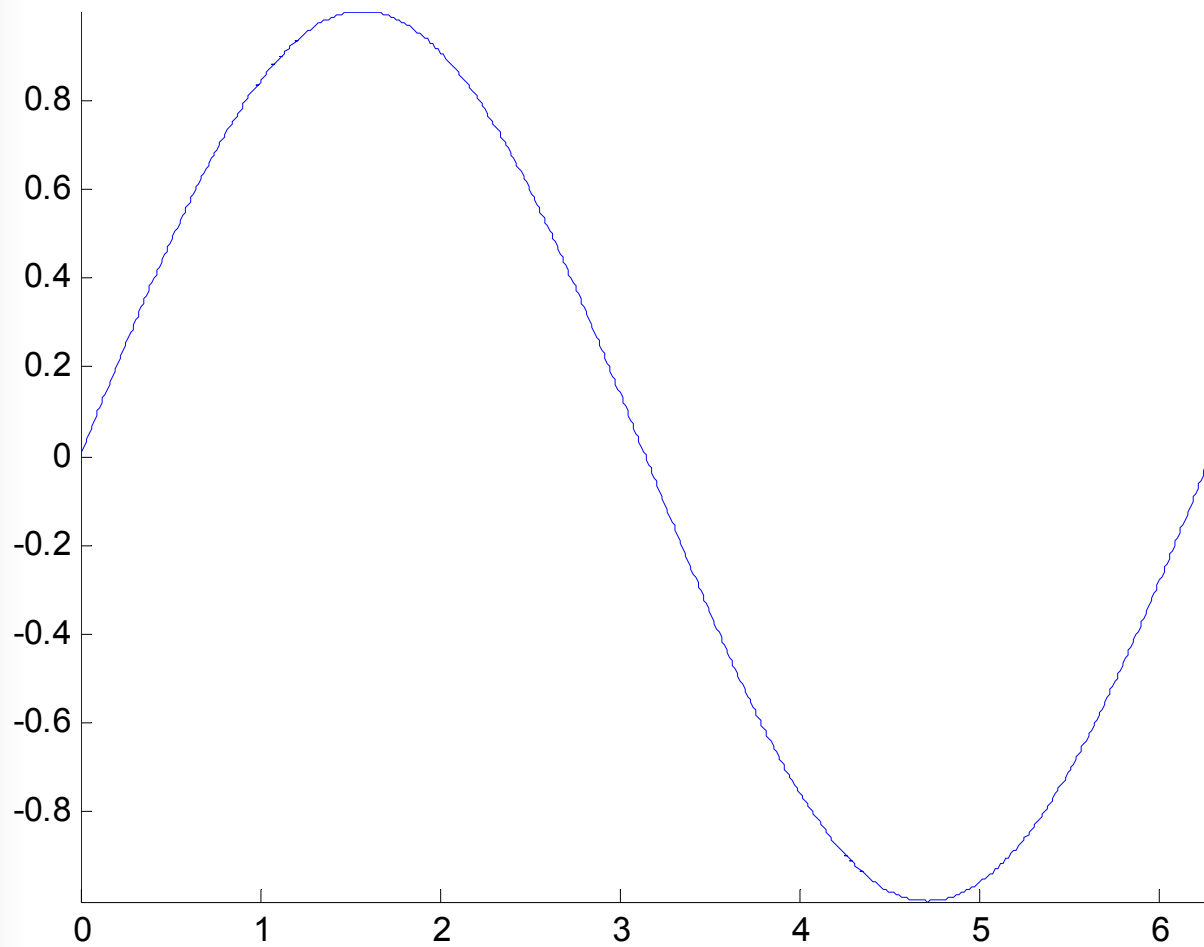
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

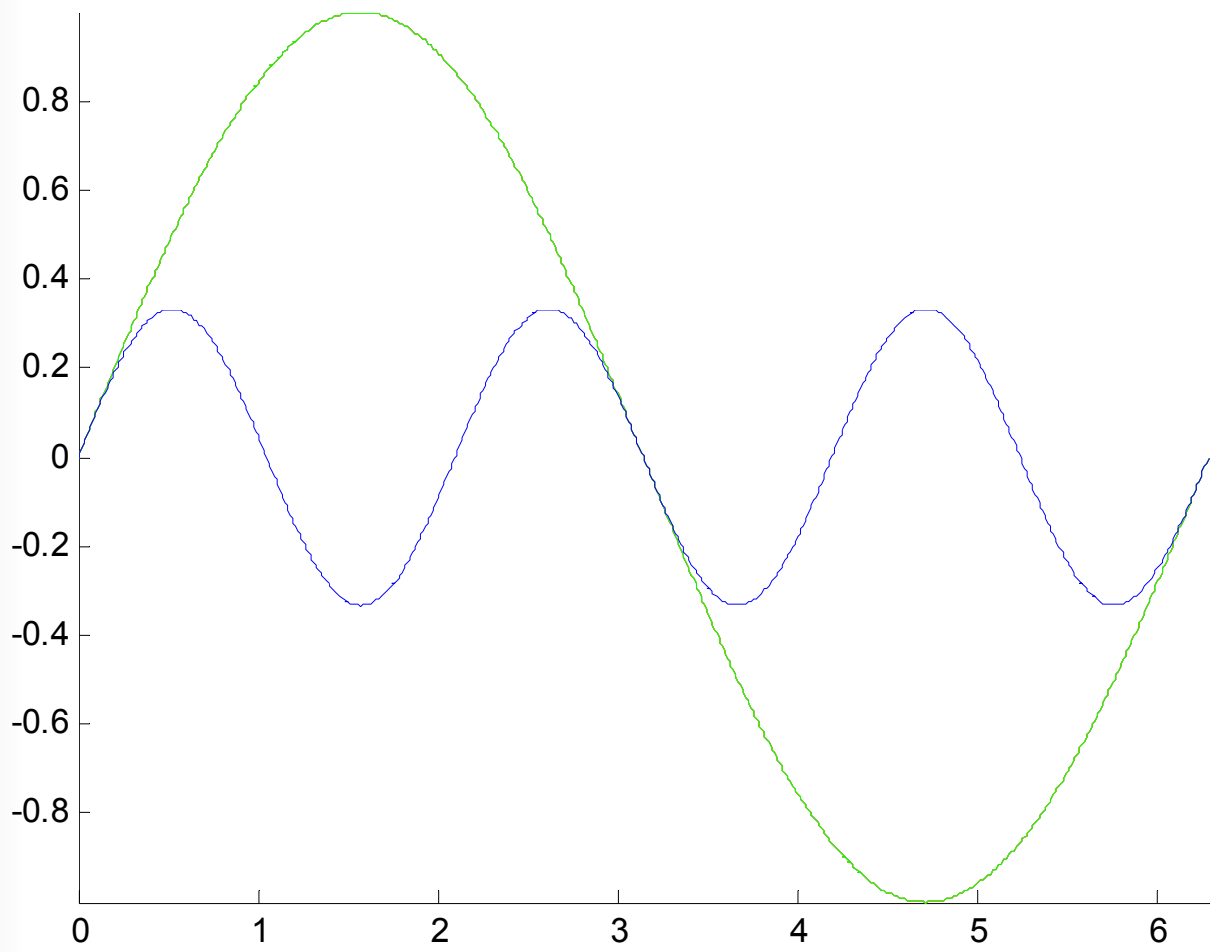


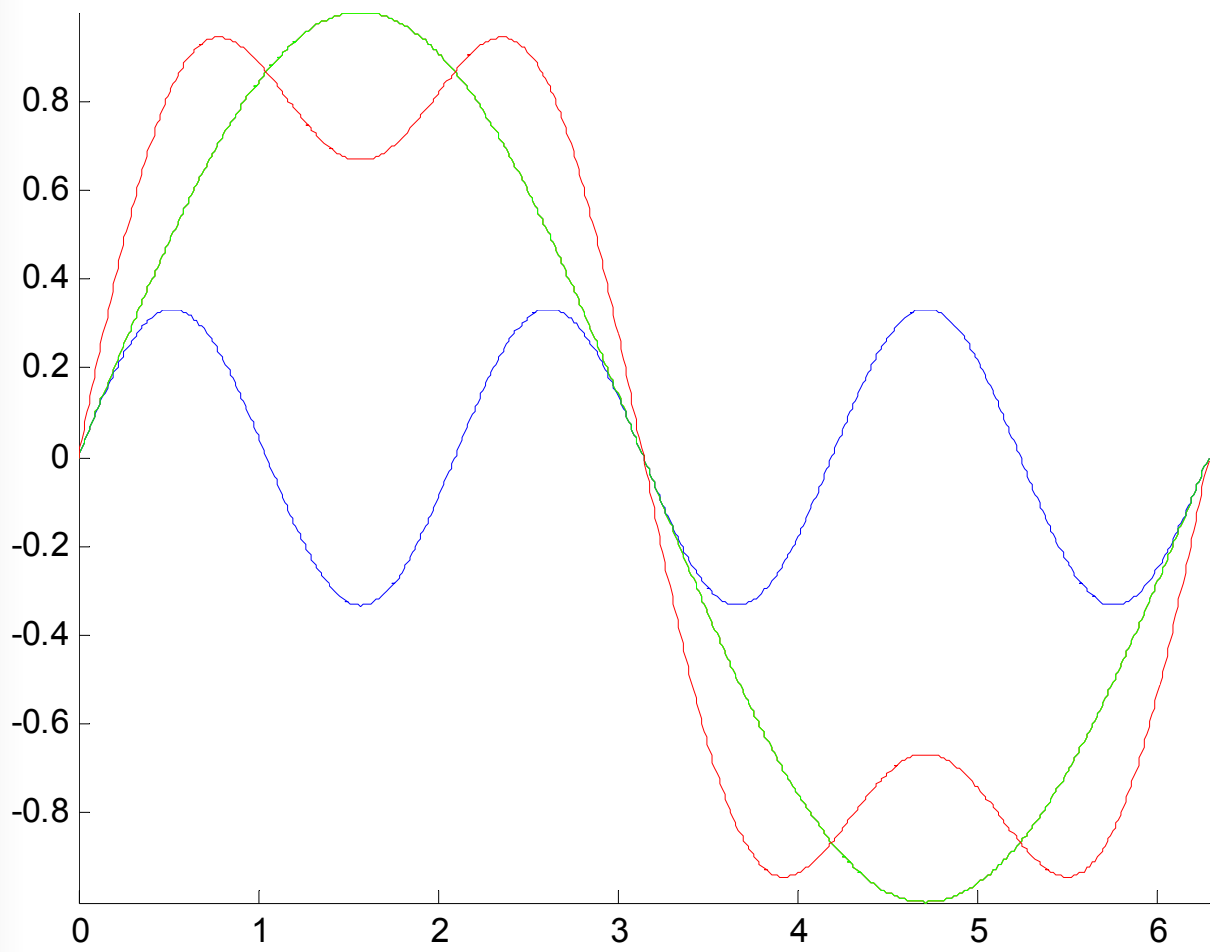
# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY FOURIEROVY ŘADY

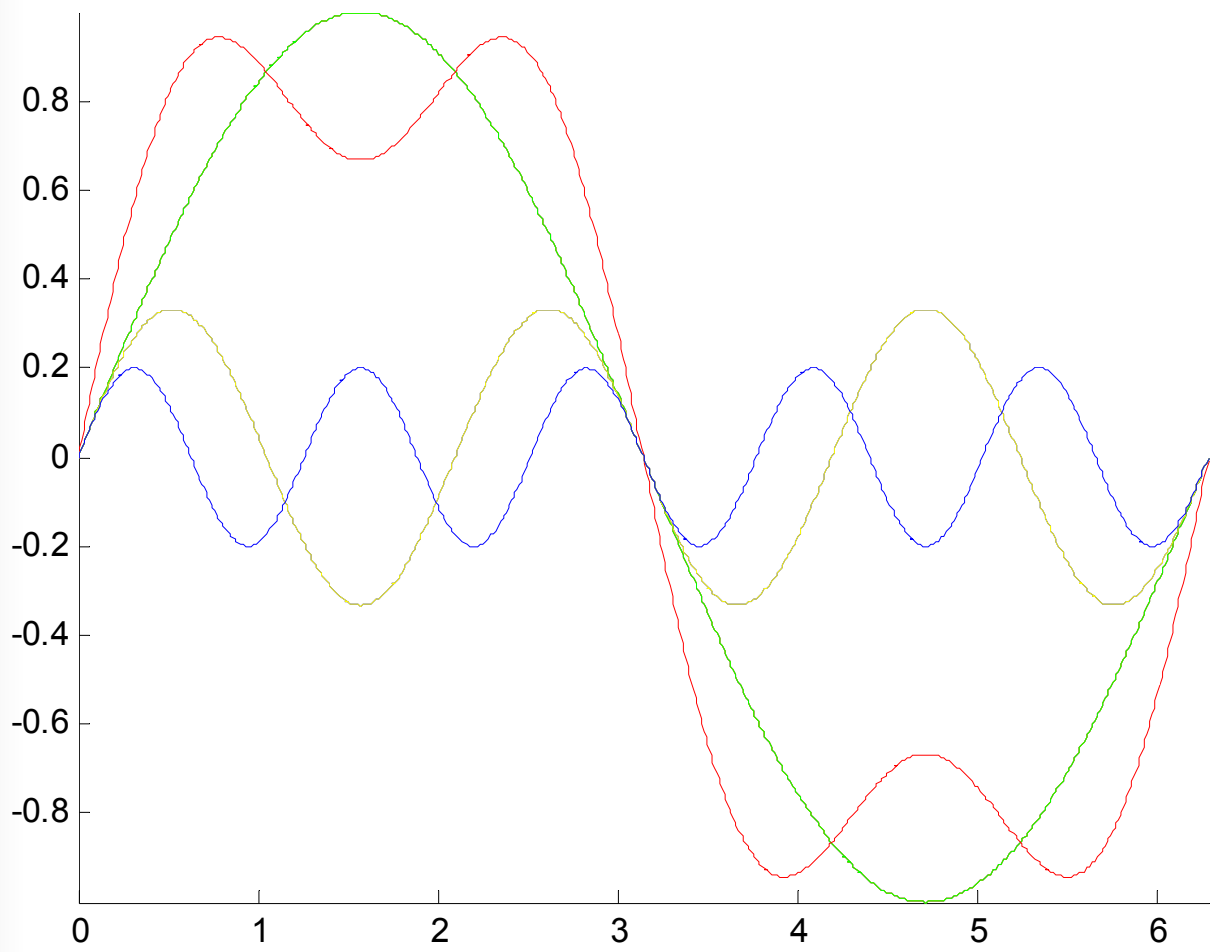
- ✓ poznali jsme, že funkci je možné vyjádřit jako **mocninou řadu**
- jinou možností je vyjádřit funkci jako trigonometrickou řadu (tj. jako součet harmonických signálů (funkcí)).
- pomocí trigonometrických řad lze vyjádřit obsáhlejší třídu funkcí než mocninnými řadami.

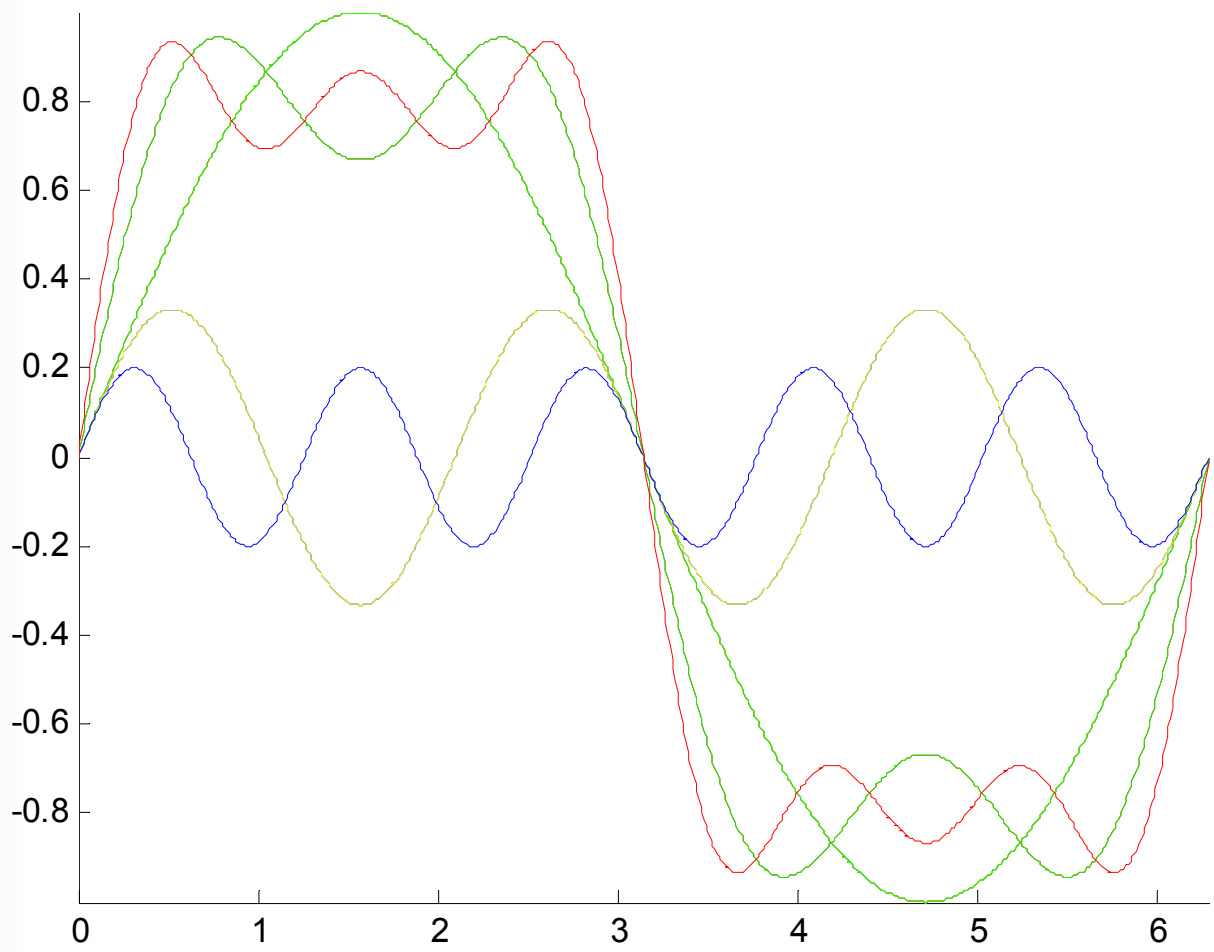


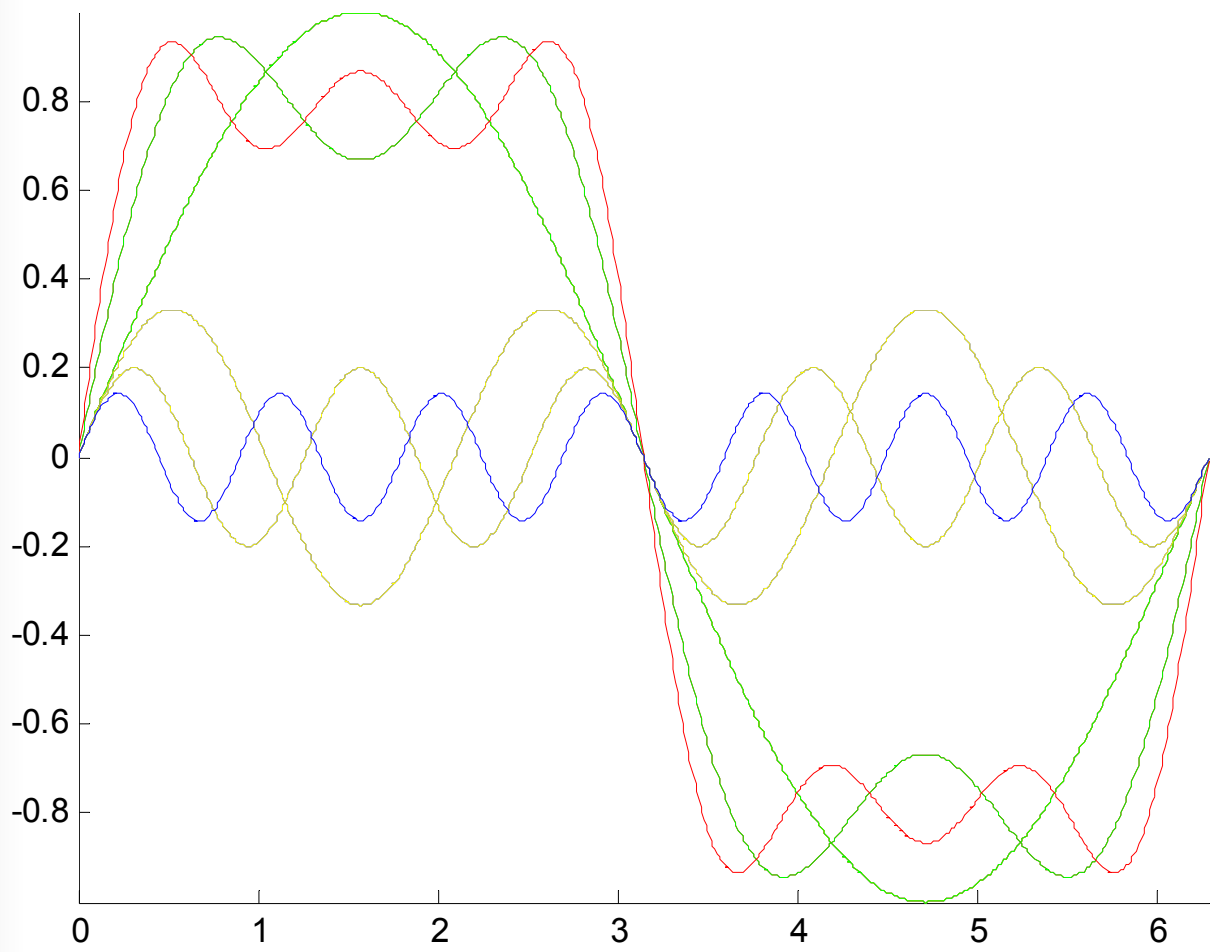




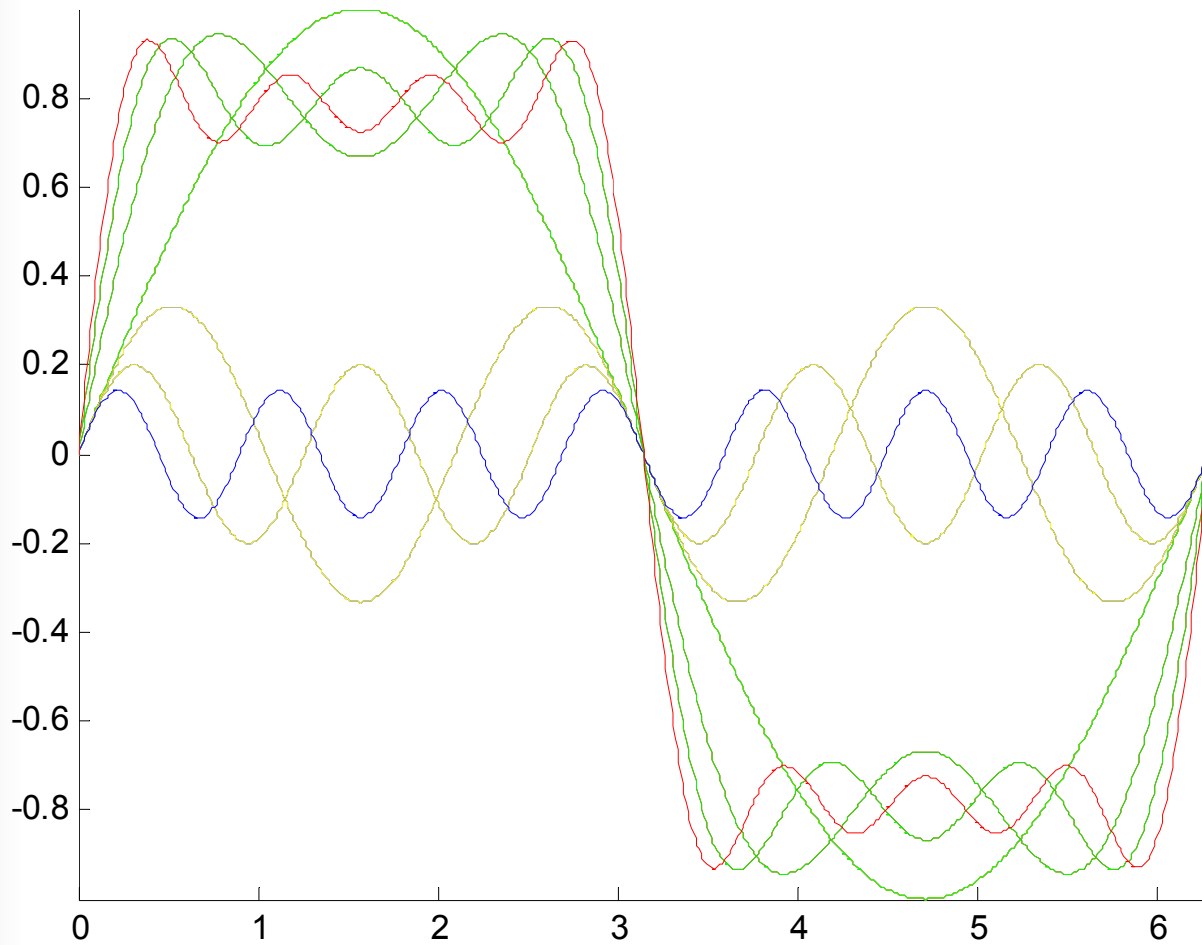


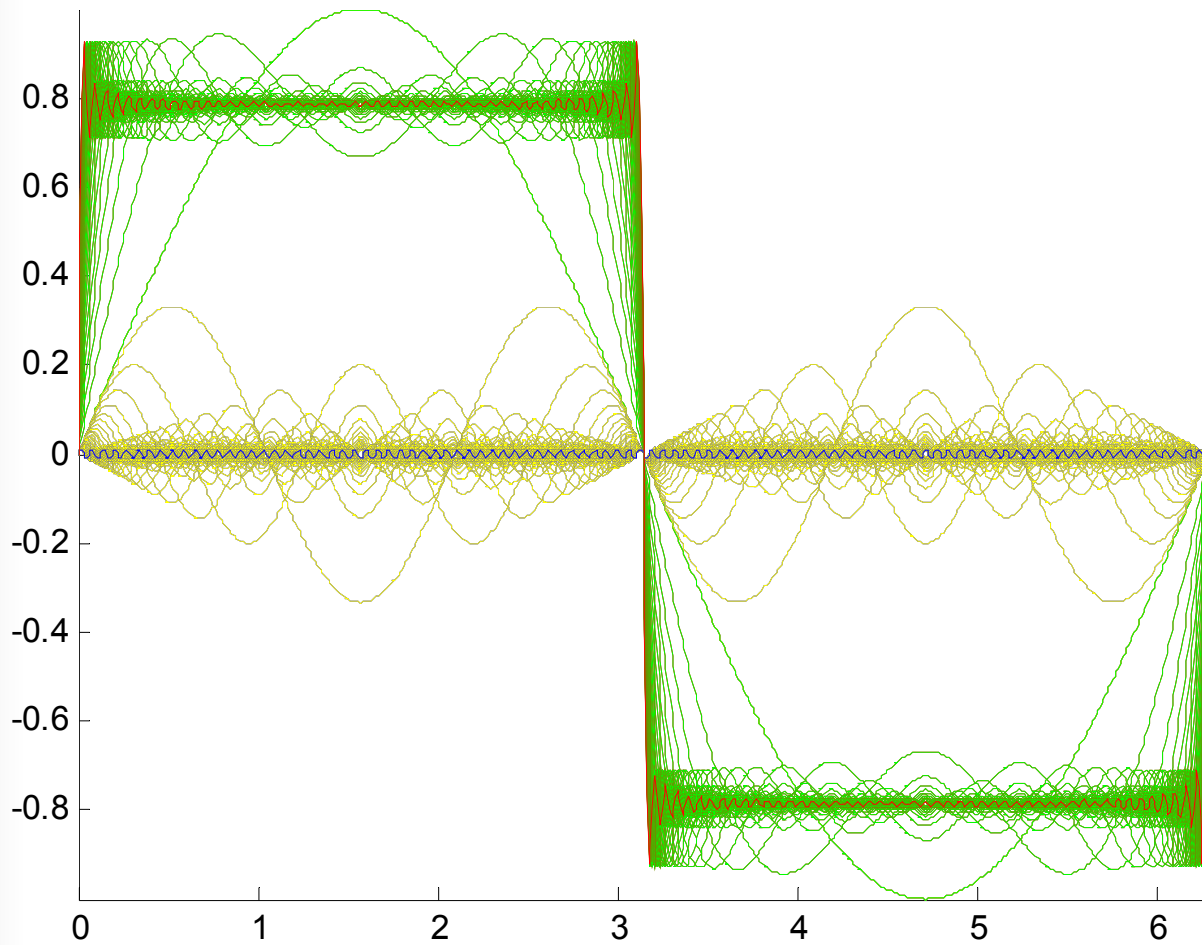












# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

### Trigonometrická řada

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- uvedený vztah můžeme psát pouze tehdy, jestliže řada na pravé straně konverguje.
- konverguje-li řada, potom je její součet periodickou funkcí proměnné  $x$  s periodou  $2\pi$ .

# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

- ☑ každou periodickou funkci  $f(x) = f(x+kX)$ , která splňuje tzv. **Dirichletovy podmínky** lze vyjádřit uvedenou trigonometrickou řadou, kde se koeficienty (**amplitudy**)  $a_n, b_n$  vypočítají ze vztahů

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

- ☑ každou periodickou funkci  $f(x) = f(x+kX)$ , která splňuje tzv. **Dirichletovy podmínky** lze vyjádřit uvedenou trigonometrickou řadou, kde se koeficienty (**amplitudy**)  $a_n, b_n$  vypočítají ze vztahů

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**co tyto vztahy znamenají?  
jak je interpretovat?**

# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

### Dirichletovy podmínky

➤ Funkce musí být absolutně integrovatelná přes jednu periodu tj.

$$\int_t^{t+T} |f(t)| dt < \infty ;$$

➤ Funkce musí mít na intervalu  $(t; t + T)$  konečný počet nespojitostí a konečný počet maxim i minim.

- Dirichletovy podmínky jsou postačující, nikoliv nutné.
- Všechny fyzikálně realizovatelné funkce splňují D.p.

# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

- ✓ uvedená trigonometrická řada s koeficienty určenými z výše uvedených vztahů se nazývá (**trigonometrická**) **Fourierova řada** (příslušná k funkci  $f$ ).
- ✓ Fourierova řada se zjednoduší, je-li funkce  $f$  lichá nebo sudá.

- ✓ Pro lichou funkci platí

$$a_n = 0 \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$f(x) = b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \dots$$

# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

- Pro sudou funkci platí

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots$$



# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

*Příklad 1:* Rozviňme funkci  $f(x) = x$  ve Fourierovu řadu.

Funkce  $f(x)$  je lichá, a proto  $a_n = 0$ . Koeficienty  $b_n$  spočítáme ze vztahu

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

Integrací per partes dostaneme

$$\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[ -\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{n}$$

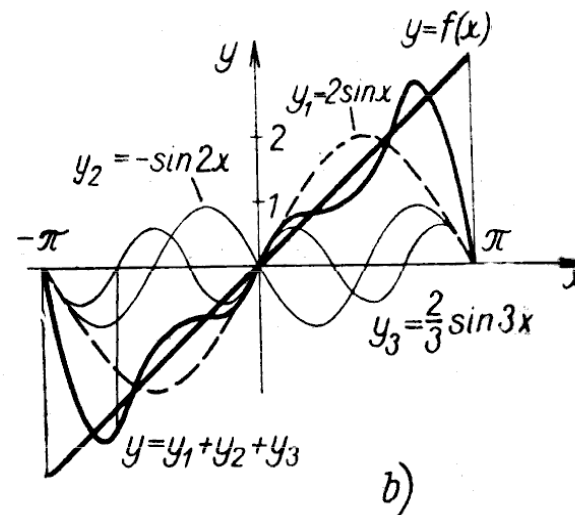
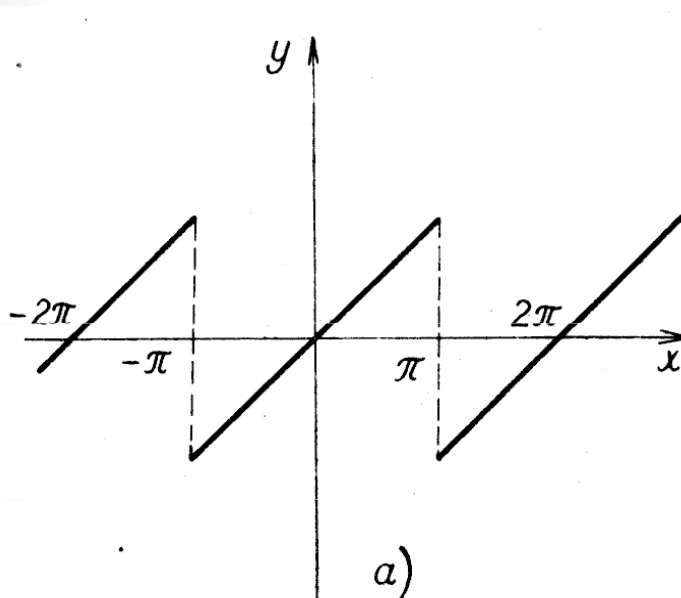
# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

Koeficient  $b_n$  je tedy  $b_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{n}$

Výsledná Fourierova řada má tvar

$$f(x) = x = 2 \left( \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots \right)$$

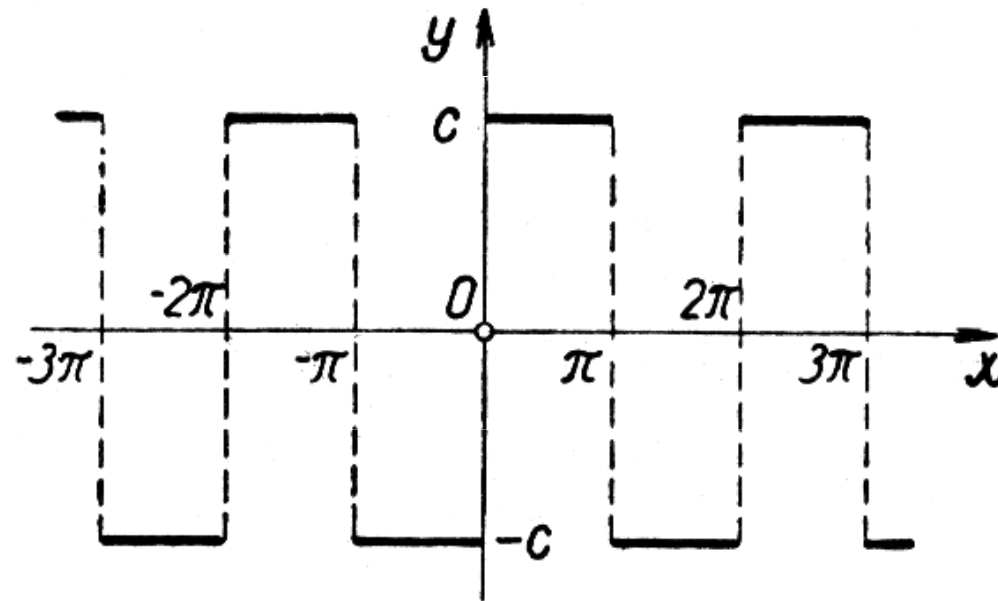


# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

*Příklad 2:* Rozviňme ve Fourierovu řadu funkci

$$f(x) = \begin{cases} -c & \text{pro } -\pi < x < 0 \\ c & \text{pro } 0 < x < \pi \end{cases}$$



# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

- Funkce  $f(x)$  je lichá, a proto  $a_n = 0$ . Koeficienty  $b_n$  spočítáme takto

$$b_n = -\frac{c}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 \sin nx \, dx - \int_0^{\pi} \sin nx \, dx \right) = -\frac{2c}{n\pi} [\cos nx]_0^{\pi}$$

- Pro  $n$  sudé je  $b_n = 0$ , pro  $n$  liché je

$$b_n = \frac{4c}{n\pi}$$

- Výsledná Fourierova řada má tvar

$$f(x) = \frac{4c}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right)$$

# ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

## FOURIEROVY ŘADY

- ☑ Zevšeobecnění pro funkce s periodou  $T$ .

Fourierova řada (příslušná k funkci  $f$ ) má tvar

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t \right)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

# FOURIEROVA ŘADA V KOMPLEXNÍM TVARU

- ☑ každou periodickou funkci  $f(t+kT)=f(t)$ , (která vyhovuje Dirichletovým podmínkám), můžeme rozložit ve Fourierovu řadu

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \quad \Omega = 2\pi/T$$

kde  $c_n$  jsou komplexní **Fourierovy koeficienty**

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

$\Omega$  – úhlový kmitočet základní harmonické složky (**základní harmonická**);

# FOURIEROVA ŘADA V KOMPLEXNÍM TVARU

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

pro  $n = 0$  je

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot dt \quad ,$$

což je střední hodnota funkce  $f(t)$ .

Pro reálné funkce  $f(t)$  je  $c_{-n} = c_n^*$ .

# HARMONICKÁ FOURIEROVA ŘADA

$$s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(n\Omega t - \psi_n))$$

kde výraz

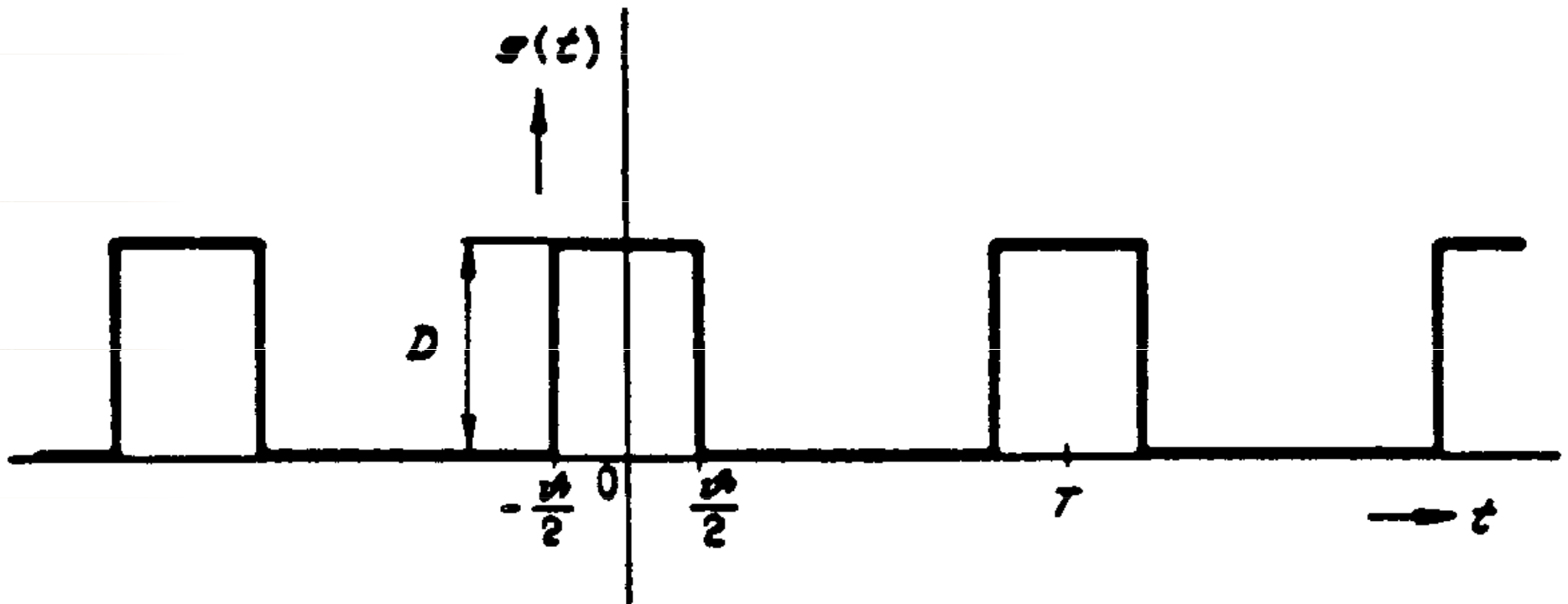
$$c_n \cos(n\Omega t - \psi_n)$$

nazýváme n-tou harmonickou složkou signálu  $s(t)$



# PŘÍKLADY

## SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU



# PŘÍKLADY

## SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU

Pomocný výpočet:

$$I(n\omega) = \int_{-a}^a e^{\pm jn\omega t} dt$$

Pro  $n = 0$  je

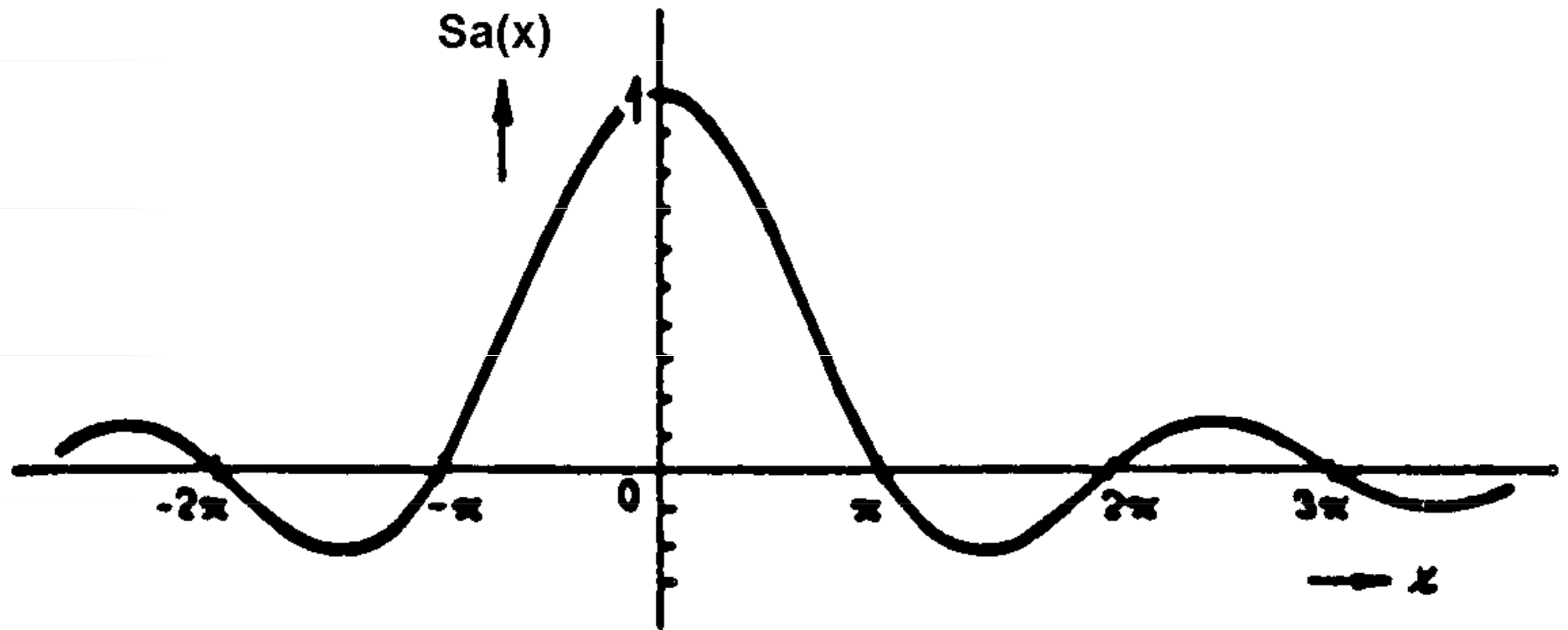
$$I(0) = 2a$$

Pro  $n \neq 0$

$$I(n\omega) = \left[ \frac{e^{\pm jn\omega t}}{\pm jn\omega} \right]_{-a}^a = \frac{e^{jn\omega a} - e^{-jn\omega a}}{jn\omega} = \frac{2}{n\omega} \cdot \frac{e^{jn\omega a} - e^{-jn\omega a}}{2j} = 2a \cdot \frac{\sin n\omega a}{n\omega a}$$

# PŘÍKLADY

## SPEKTRUM OBDELNÍKOVÉHO PULSU



# PŘÍKLADY

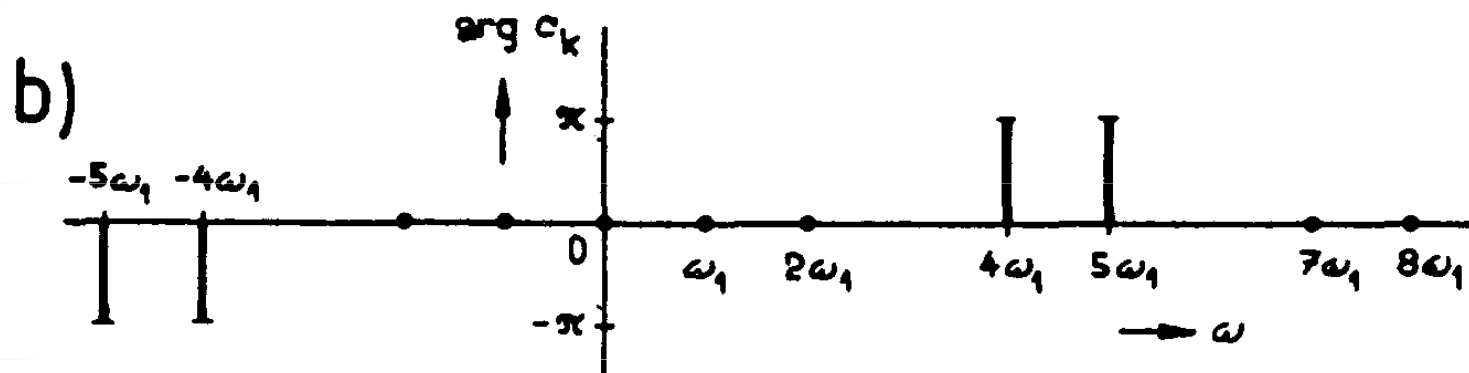
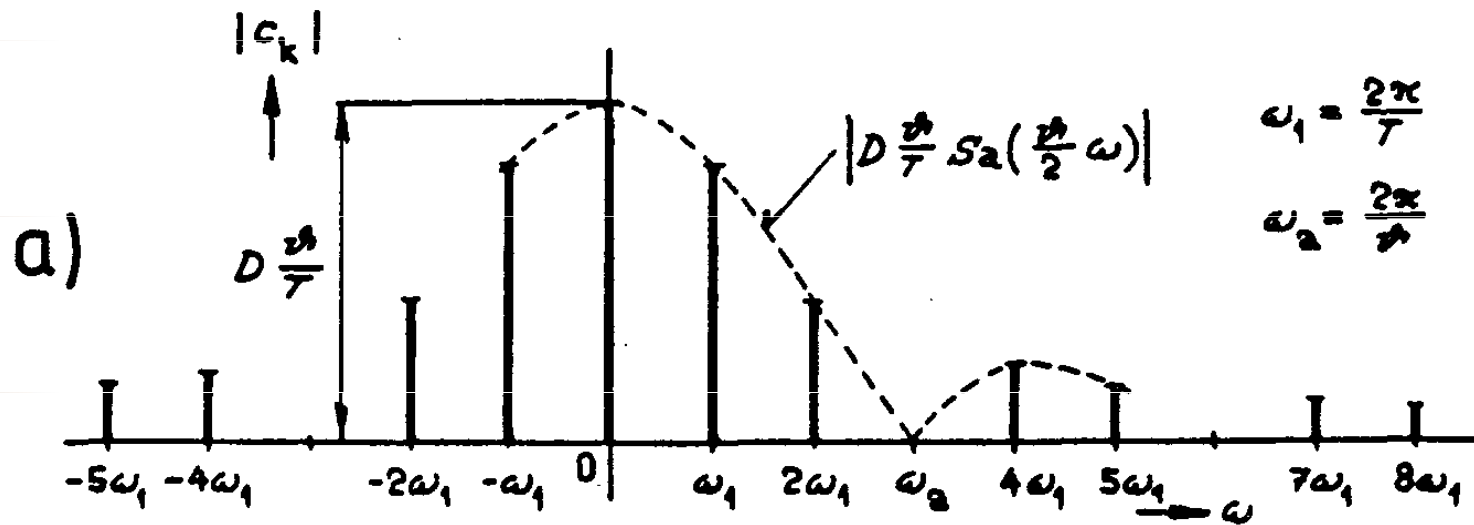
## SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU

Šířka impulsů –  $\vartheta$ , výška –  $D$ , perioda  $T$

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} D \cdot e^{-jn\Omega t} dt = \frac{D}{T} \int_{-\vartheta/2}^{\vartheta/2} e^{-jn\Omega t} dt = \\ &= \dots = \frac{D}{T} \cdot 2 \cdot \frac{\vartheta}{2} \cdot \text{Sa}\left(\frac{\vartheta}{2} n\Omega\right) = D \cdot \frac{\vartheta}{T} \cdot \text{Sa}\left(\frac{\vartheta}{2} n\Omega\right)\end{aligned}$$

# PŘÍKLADY

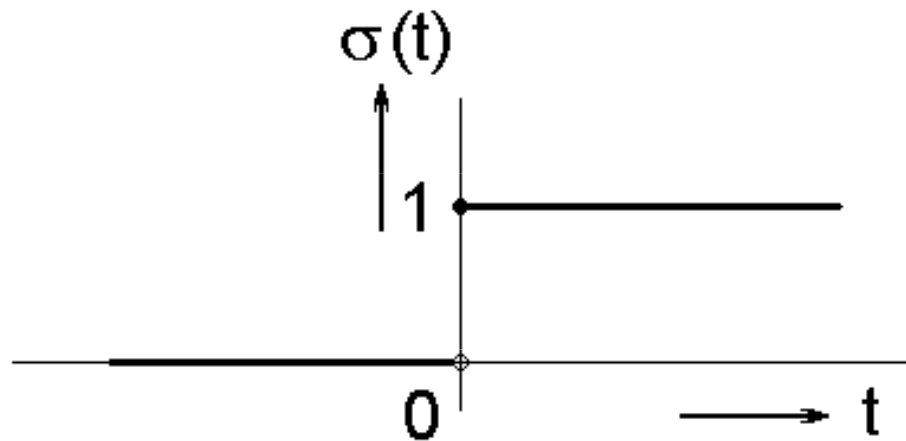
## SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO PULSU



# JEDNORÁZOVÉ SIGNÁLY

- ☑ jednotkový skok (Heavisidova funkce)

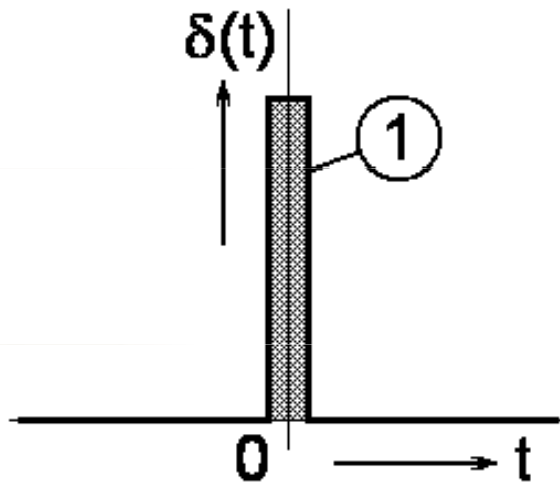
$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



# JEDNORÁZOVÉ SIGNÁLY

- ✓ jednotkový impuls (Diracův impuls) -  $\delta(t)$   
splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \delta(t - \tau) dt = s(\tau)$$

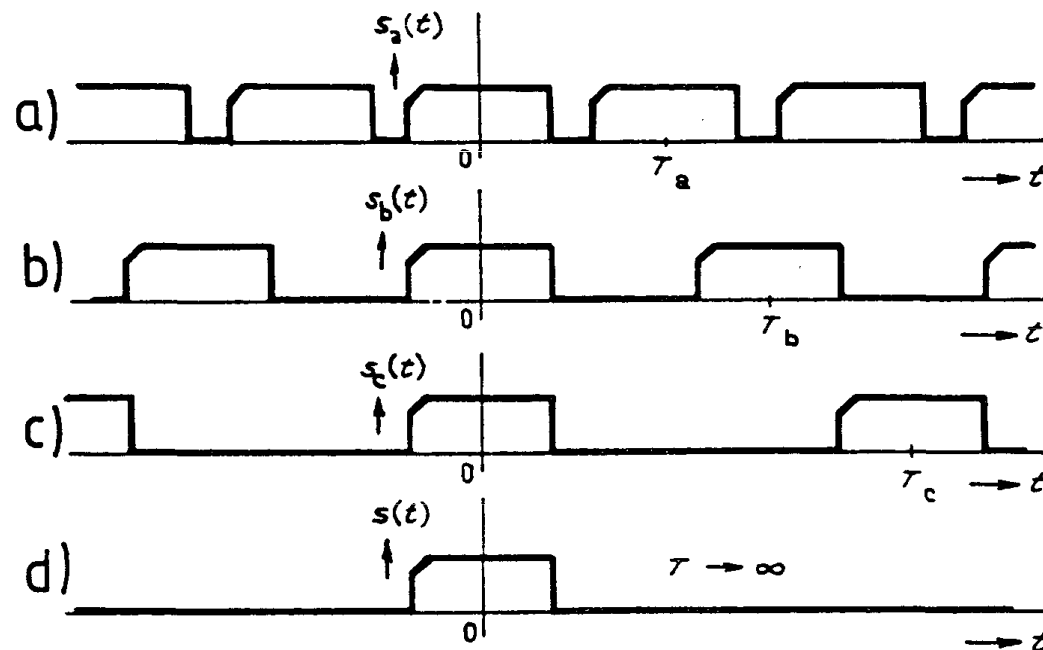


## zjednodušeně:

jednotkový impuls  $\delta(t)$  je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impuls, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky  $\Rightarrow$  **mohutnost** je jednotková

# FOURIEROVA TRANSFORMACE

- ✓ zavádí spektrální popis jednorázových (aperiodických) signálů – můžeme jej získat z Fourierovy řady limitním prodloužením periody signálu  $T \rightarrow \infty$





# FOURIEROVA TRANSFORMACE

- ☑ kmitočet základní harmonické složky

$$\Omega = 2\pi/T$$

když  $T \rightarrow \infty$ , pak  $\Omega \rightarrow d\omega \rightarrow 0$

Graficky to představuje zhušťování spektrálních čar s prodlužující se periodou až v limitním případě je vzdálenost mezi spektrálními čarami nulová. Pro aperiodický signál budou spektrální čáry na sebe navazovat -  $n\Omega \rightarrow \omega$

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{jn\Omega t}$$

Suma ve výše uvedeném vztahu přechází v integrál s mezemi od  $-\infty$  do  $\infty$ .

# FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

pro  $T \rightarrow \infty$  je  $T = 2\pi/d\omega$ , meze integrálu budou pro nekonečně trvající signál od  $-\infty$  do  $\infty$ . Pro  $T \rightarrow \infty$  budou rovněž amplitudy spojitého spektra jednorázového impulsu nekonečně malé. Dosadíme za  $c_n$  do vztahu na předchozím obrázku

# FOURIEROVA TRANSFORMACE

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right) \cdot e^{j\omega t}$$

Označme

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

**Fourierova  
transformace**

Funkci  $S(\omega)$  nazveme **spektrální funkcí signálu**. Ta už nevyjadřuje skutečné zastoupení jednotlivých harmonických složek signálu, nýbrž jen jejich poměrné zastoupení.

Fourierova transformace převádí signál (funkci)  $s(t)$  z časové domény na funkci  $S(\omega)$  v kmitočtové oblasti.

# FOURIEROVA TRANSFORMACE

Pro časovou funkci můžeme psát vztah

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

**zpětná Fourierova transformace**

# FOURIEROVA TRANSFORMACE

## VLASTNOSTI

Princip superpozice ( ! podmínka linearity ! )

$$s_1(t) + s_2(t) \sim S_1(\omega) + S_2(\omega)$$

$$a \cdot s(t) \sim a \cdot S(\omega)$$

Lineární kombinaci signálů odpovídá lineární kombinace jejich spekter

Změna znaménka

$$s(-t) \sim S^*(\omega)$$

Změna měřítka

$$s(t/a) \sim a \cdot S(a\omega), \text{ kde } a > 0$$

# FOURIEROVA TRANSFORMACE

## VLASTNOSTI

### Translace funkce

$$s(t-\tau) \sim S(\omega).e^{-j\omega\tau}$$

### Transpozice spektra

$$S(\omega-\Omega) \sim s(t).e^{-j\Omega t}$$

### Konvoluce funkcí

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^t s_1(x).s_2(t-x).dx \approx S_1(\omega).S_2(\omega)$$

# PŘÍKLADY

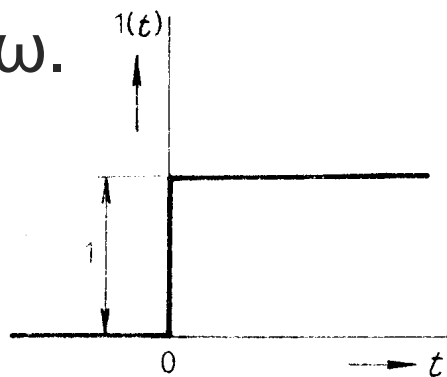
## SPEKTRUM JEDNOTKOVÉHO SKOKU

Jednotkový skok  $\sigma(t)$  nevyhovuje podmínce absolutní integrovatelnosti, nemá Fourierův integrál.

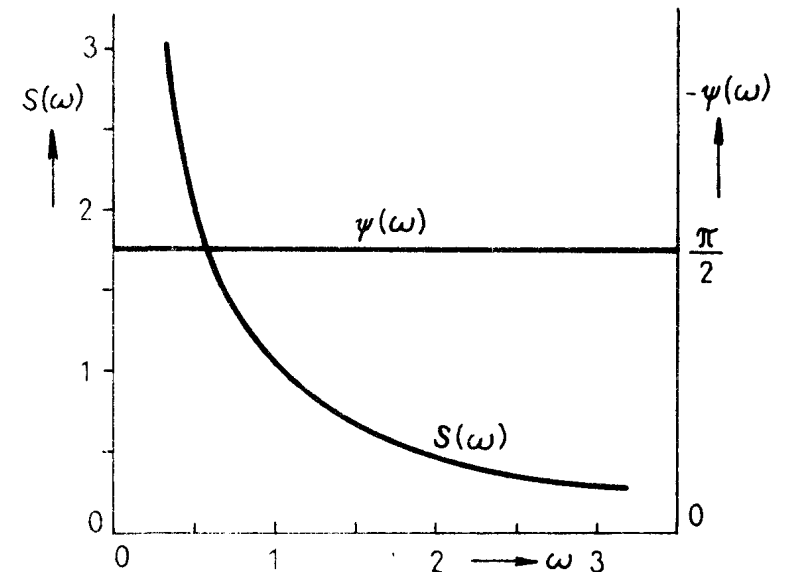
Pomůžeme si pomocí funkce  $A \cdot e^{-\beta t}$ .

Pro  $A=1$  a  $\beta=0$  je tato funkce ekvivalentní jednotkovému skoku.

Platí tedy, že  $S(\omega) = 1/j\omega$ .



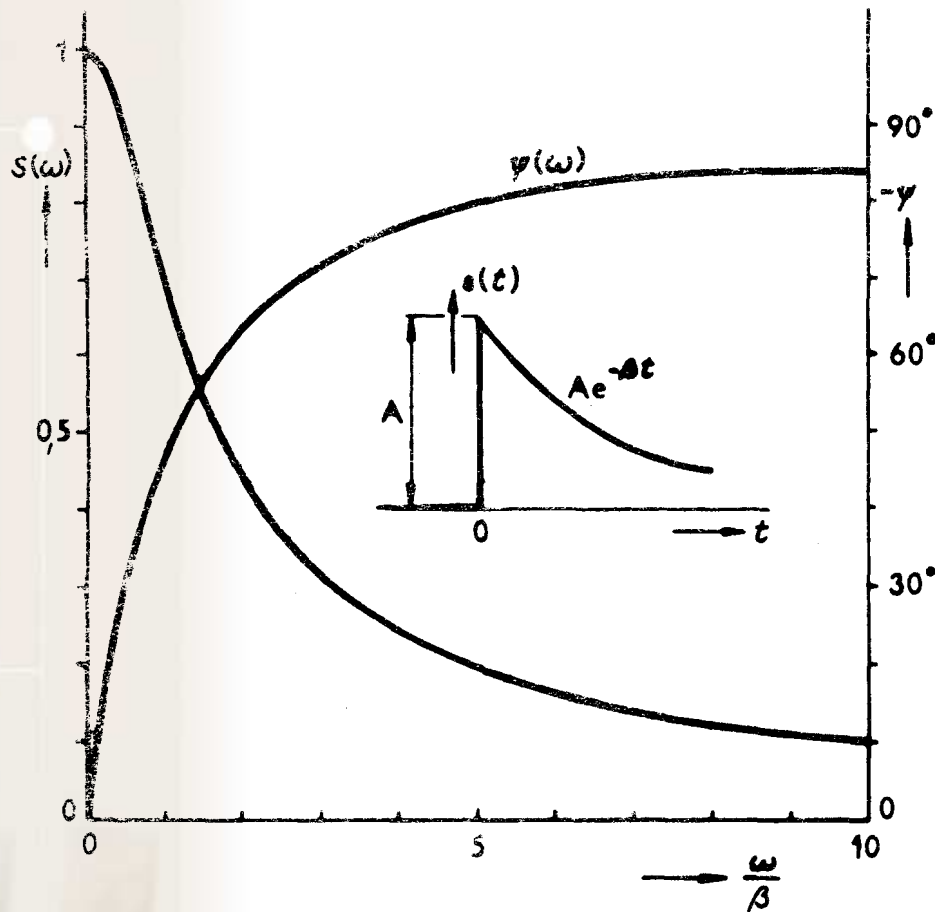
a)



b)

# PŘÍKLADY

## SPEKTRUM JEDNOTKOVÉHO SKOKU



$$s(t) = A \cdot e^{-\beta t} \quad \text{pro } t \geq 0$$

$$s(t) = 0 \quad \text{pro } t < 0$$

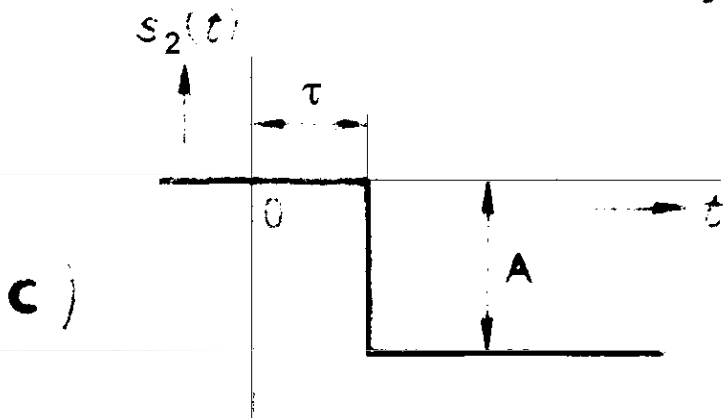
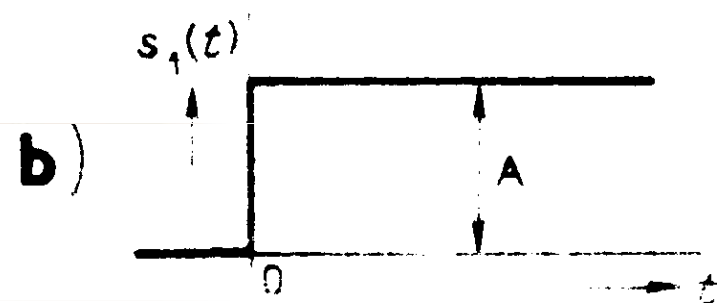
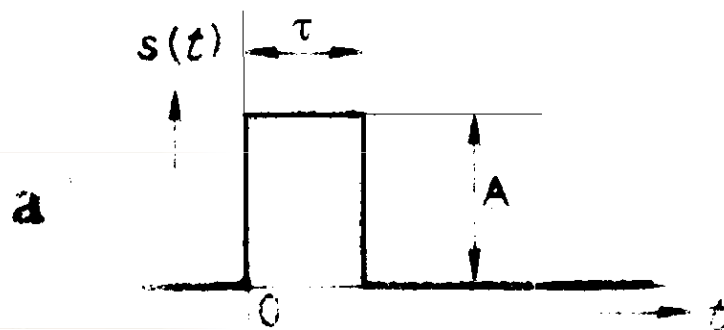
$$S(\omega) = \int_0^{\infty} A \cdot e^{-\beta t} \cdot e^{-j\omega t} dt =$$

$$= \frac{A}{\beta + j\omega}$$



# PŘÍKLADY

## SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO IMPULSU



$$s(t) = A \cdot \sigma(t) - A \cdot \sigma(t - \tau)$$

$$S(\omega) = A \cdot \left( \frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau} \right) =$$

$$= A \cdot \frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} \cdot e^{-j\omega\tau/2} =$$

$$= \frac{2A}{\omega} \cdot \sin \frac{\omega\tau}{2} \cdot e^{-j\omega\tau/2} =$$

$$= A \cdot \tau \cdot \frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \cdot e^{-j\omega\tau/2}$$

# PŘÍKLADY

## SPEKTRUM OBDÉLNÍKOVÉHO IMPULSU

$$|S(\omega)| = A \cdot \tau \cdot \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

Průchody nulou pro

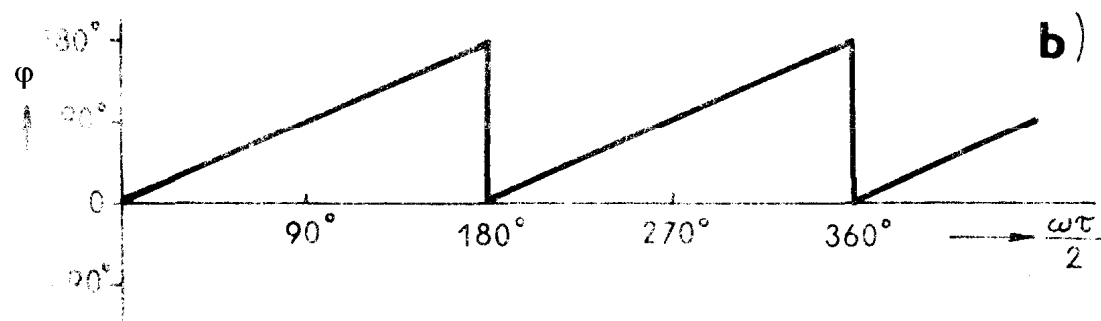
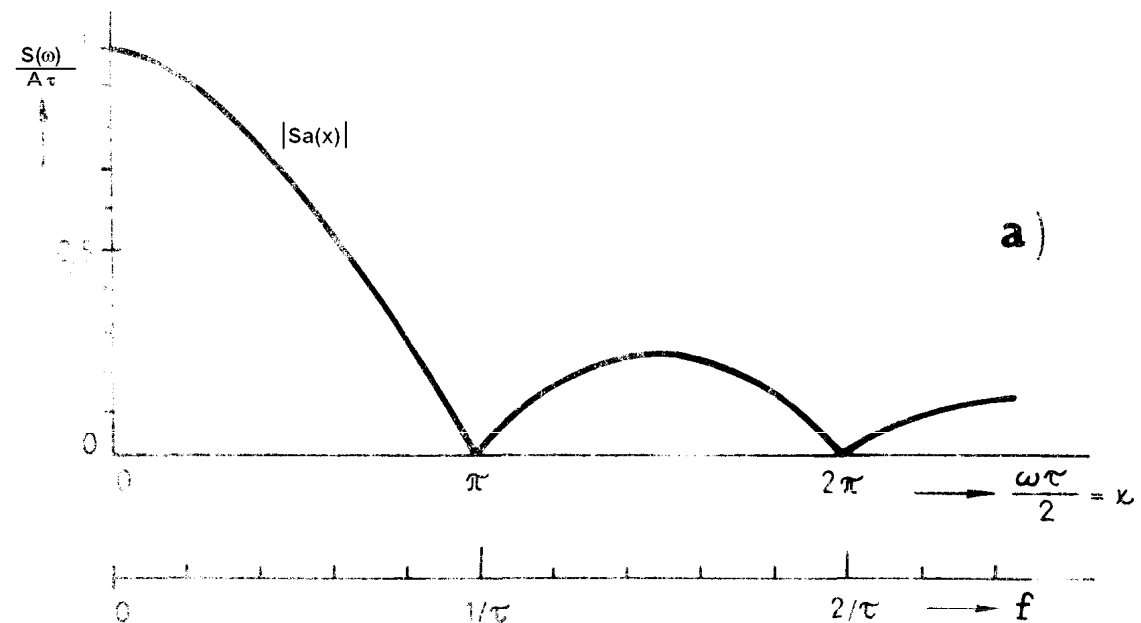
$$\omega\tau/2 = k\pi, \quad k=1,2,\dots,$$

resp.

$$2\pi f\tau/2 = k\pi$$

a tedy

$$f = k/\tau$$



# ! SHRNU TÍ !



## ! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **spojitý periodický signál** má diskrétní frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu řadu;
- ☑ **spojitý jednorázový signál** má spojité frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu transformaci.

## ! A VĚDĚT PROČ !