SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, Kamenice 3, 4. patro, dv.č.424

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V. FREKVENČNÍ TRASFORMACE

ॐ DISKRÉTNÍ SIGNÁLY ॐ

MU

IBA

ROZKLAD DISKRÉTNÍHO PERIODICKÉHO SIGNÁLU

☑ spojitý signál – opakování

Fourierova řada (v komplexním tvaru)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \qquad \Omega = 2\pi / T$$

kde c_n jsou komplexní Fourierovy koeficienty

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t).e^{-jn\Omega t} dt$$

Ω – úhlový kmitočet základní harmonické složky (základní harmonická);

FOURIEROVA ŘADA PRO DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- nechť x(kT) je periodický signál s periodou NT; pak x(kT) lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady

$$x(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n . \exp \frac{j2\pi nk}{N}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) . \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

FOURIEROVA ŘADA
DŮKAZ

☑ změňme index sumace ve vztahu pro výpočet koeficientu c_n

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT).\exp(-2j\pi mn/N)$$

$$x(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n.\exp(2j\pi nk/N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N}\left(\sum_{m=0}^{N-1} x(mT).\exp(-2j\pi mn/N)\right).\exp(2j\pi nk/N) =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT).\sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m)/N],$$

FOURIEROVA ŘADA
DŮKAZ

potom

$$\text{pro } k = m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m)/N] = N$$

$$\text{pro } k \neq m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m)/N] = \frac{1-\exp[2j\pi N(k-m)/N]}{1-\exp[2j\pi (k-m)/N]} = 0$$

(součet N členů geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$)

$$\boxed{x(kT) =} \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(mT).\sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k-m)/N] =$$

$$= \frac{1}{N} x(kT).N = \boxed{x(kT) \qquad \text{c.b.d.}}$$

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD

x(kT) = A.cos(2πk/N) je periodická funkce s periodou N

$$A.\cos\frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2}.\left[\exp\frac{2j\pi k}{N} + \exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right)\right]$$

Nyní, protože

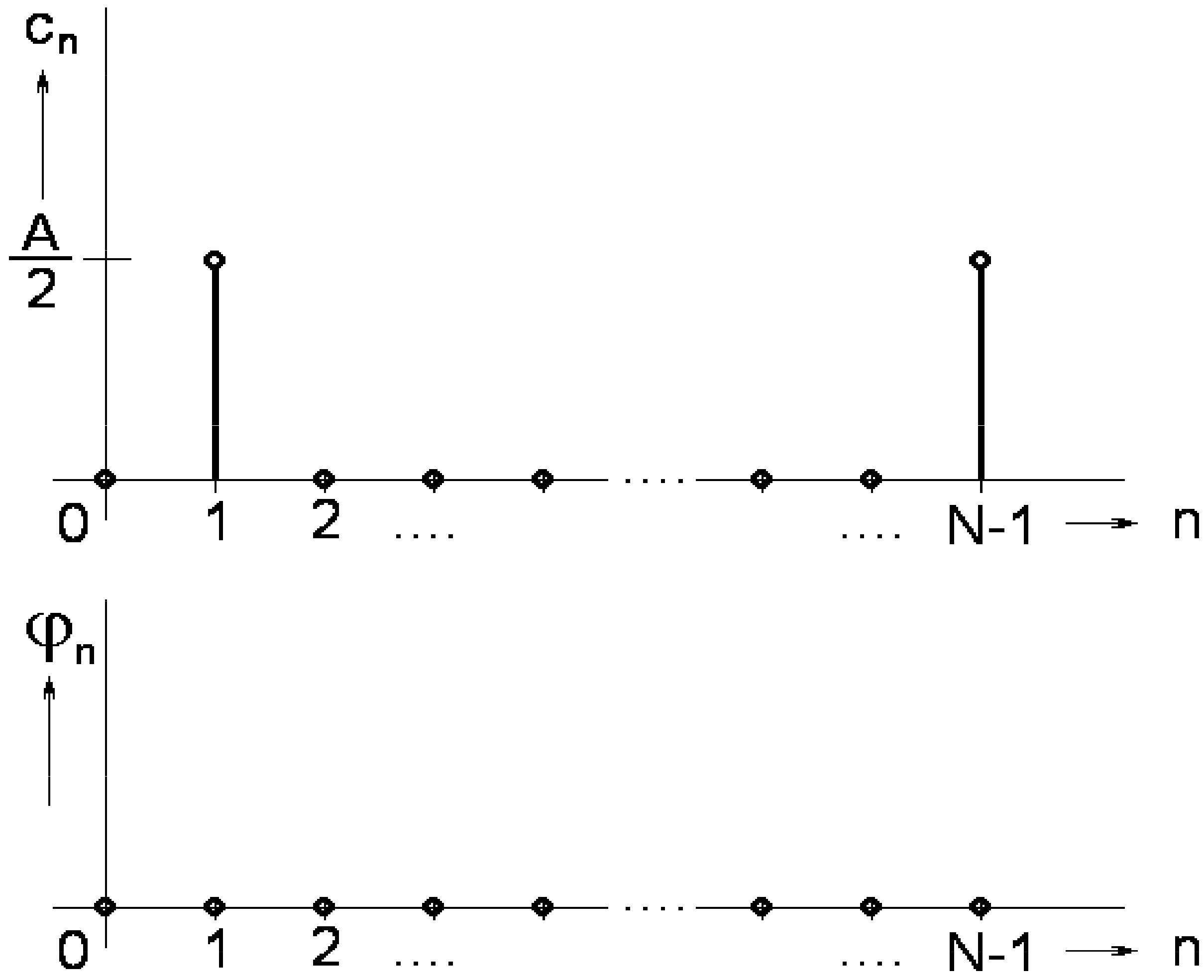
$$\exp\frac{2j\pi k(N-1)}{N} = \exp\frac{2j\pi kN}{N}.\exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right) = \exp\left(-\frac{2j\pi k}{N}\right);$$

proto

$$A.\cos\frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2}.\left[\exp\frac{2j\pi k}{N} + \exp\left(\frac{2j\pi(N-1)k}{N}\right)\right]$$

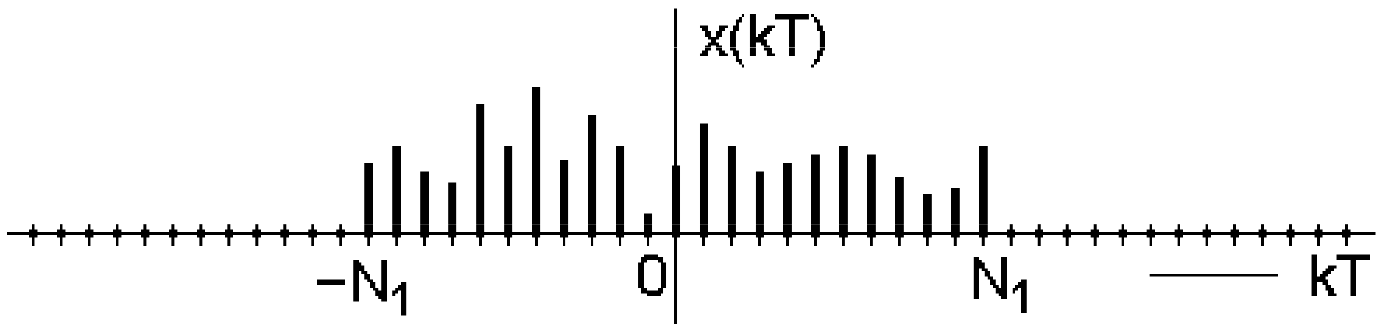
$$a_1 = \frac{A}{2}, \quad a_{N-1} = \frac{A}{2}, \quad a_n = 0 \text{ pro všechna jiná n}$$

FOURIEROVA ŘADA
PŘÍKLAD



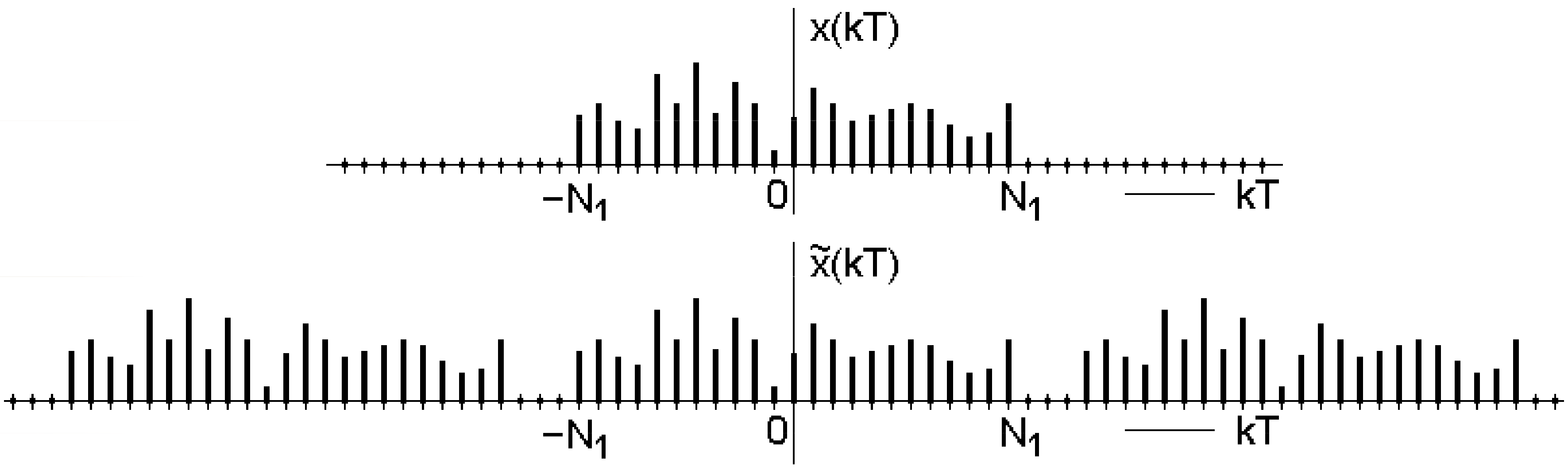
FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- nechť x(kT) je časově omezený signál s diskrétním časem s x(kT)=0 pro všechna celá $k>N_1$ a $k<-N_1$, kde N_1 je celočíselná konstanta.



FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- dále, nechť pro kladné sudé celé číslo $N>2N_1$ označíme $\tilde{x}_N(kT)$ periodický signál s periodou NT, který je x(kT) pro k = -N/2, -(N/2)+1, …, -1, 0, 1, …, (N/2)-1.
- z definice $\tilde{x}_N(kT)$ máme $x(kT) = \lim_{N \to \infty} \tilde{x}_N(kT)$



FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- protože $\tilde{x}_N(kT)$ je periodická funkce s periodou NT, má Fourierovu řadu

$$\tilde{x}_N(kT) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n . \exp \frac{2j\pi nk}{N}$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} \tilde{x}_N(kT) . \exp\left(-\frac{2j\pi kn}{N}\right), \quad n = 0,1,\ldots, N-1$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- Z definice $\tilde{x}_N(kT)$ vyplývá, že lze poslední uvedenou rovnici přepsat do tvaru

$$c_n = \frac{1}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT).\exp\left(-\frac{2j\pi knT}{NT}\right), \qquad n = 0,1,\ldots,N-1,$$

a potom

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT).\exp(-jk\omega T), \qquad \omega = 2\pi n/NT$$

kde ω je pro $N\rightarrow\infty$ spojitá (nediskrétní) veličina.

DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE - DFT

- ☑ aby bylo možné počítat s frekvenčním spektrem na počítači, je třeba spektrální funkci diskretizovat;
- ☑ předpokládejme, že diskrétní signál $x(nT)=0$ pro $n < 0$ a $n \geq N-1$, pak DFT je definována vztahem

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT).e^{-jk\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT).e^{-jk\frac{2\pi}{NT}nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT).e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-j2\pi kn/N}$$

ZPĚTNÁ DISKRÉTNÍ FT – DFT^{-1}

$$x(nT) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{jnTk\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{j2\pi kn/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k).e^{j2\pi kn/N}$$

INVERZIBILITA DFT

$$\mathcal{DFT}^{-1}\{\mathcal{DFT}(x)\} = x$$

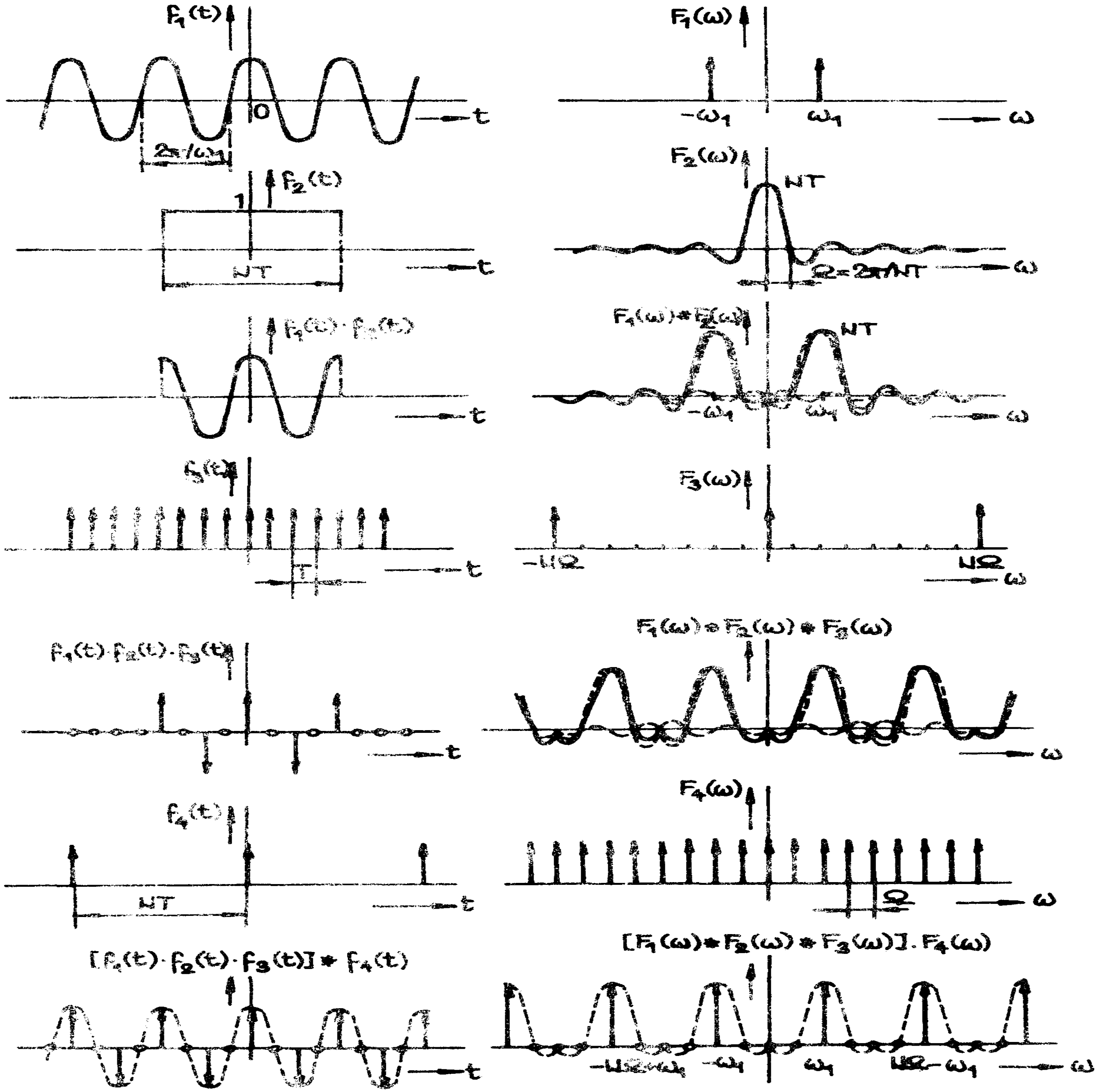
$$x(mT) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega).e^{jmTk\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT).e^{-jk\Omega nT}\right).e^{jmTk\Omega} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT).\sum_{k=0}^{N-1}.e^{j(m-n)k\Omega T} = \left| \begin{array}{c} \text{pro } \; m = n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1}.e^{j(m-n)k\Omega T} = N \\ \text{pro } \; m \neq n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1}.e^{j(m-n)k\Omega T} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1-e^{j(m-n)N\Omega T}}{1-e^{j(m-n)\Omega T}} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{N} x(mT).N = x(mT) \qquad \Omega = 2\pi / NT$$

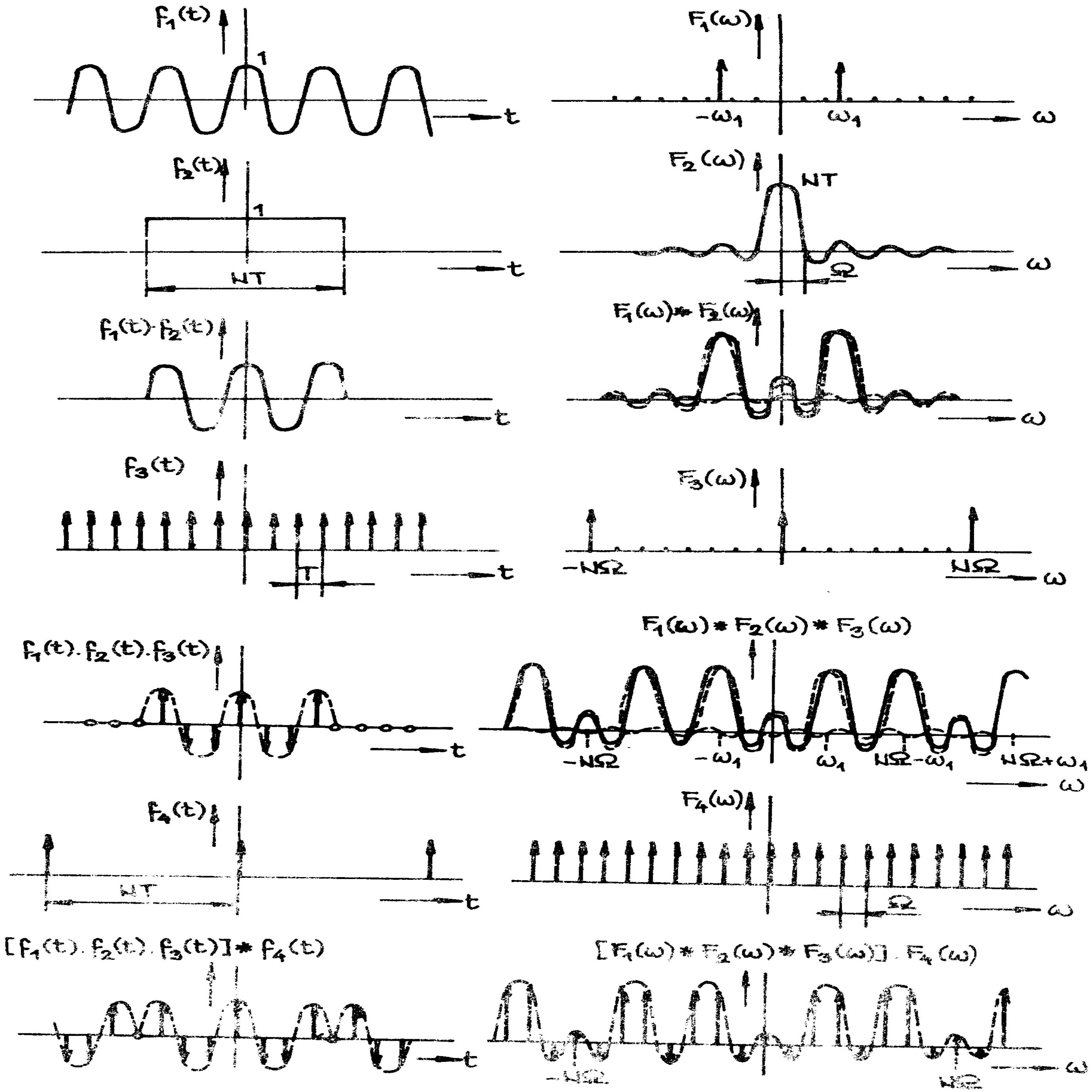
DFT

$\Omega_1 = 2\Omega$
$= 4\pi/NT$



DFT

$\Omega_1 = 2{,}5\Omega$
$= 5\pi/NT$

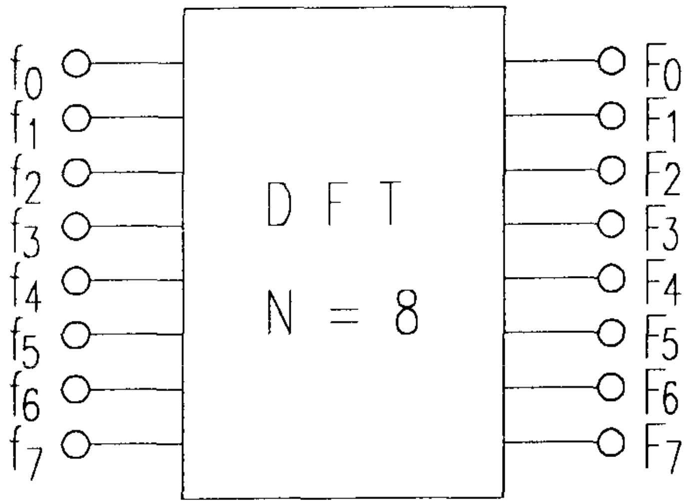


RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT).e^{-jk\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT).\left(\cos(k\Omega nT) - j\sin(k\Omega nT)\right)$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n).\left(\cos(2\pi kn/N) - j\sin(2\pi kn/N)\right)$$

- ☑ hodnoty funkcí cos a sin se používají z tabulek pro čtvrtinu periody;
- ☑ zrychlení výpočetního algoritmu se dosáhne využitím dříve vypočítaných mezivýsledků, resp. vynecháním zbytečných výpočtů – např. násobení nulou;



RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

FFT – (Cooley, Tukey – 1965, ale před nimi již i mnozí další od 1903)

- rozklad v časové oblasti;
- rozklad ve frekvenční oblasti

jednotka pracnosti P – jedno komplexní násobení a sečítání

pracnost výpočtu jednoho vzorku spektra – N.P

pracnost celé transformace – N.N.P = N^2.P

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

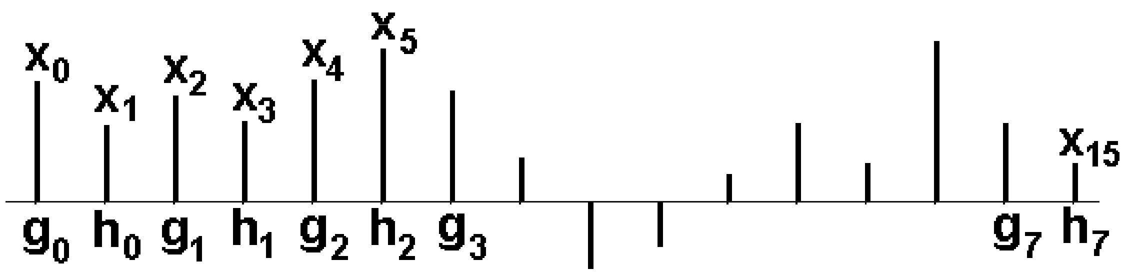
- vstupní posloupnost o sudém počtu vzorku rozdělíme na dvě dílčí posloupnosti

$\{g_i\} = \{x_{2i}\}$ - sudé prvky původní posloupnosti,

$\{h_i\} = \{x_{2i+1}\}$ - liché prvky původní posloupnosti,

$i=0,1,\ldots, N/2-1$

předpokládáme, že každá z posloupností (původní i obě dílčí), mají svou DFT



FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$G(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i . e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i . e^{-\frac{j4\pi ik}{N}}$$

$$H(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i . e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i . e^{-\frac{j4\pi ik}{N}}$$

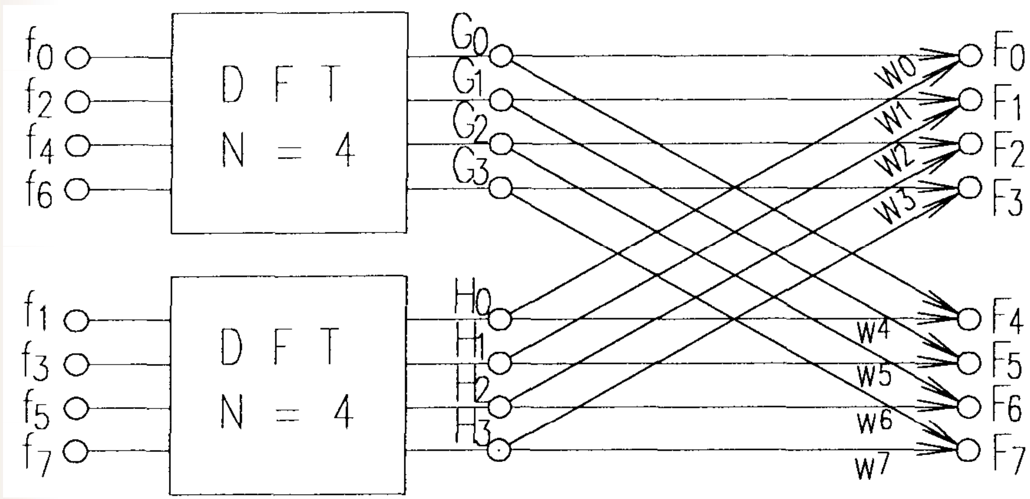
$$k \in \langle 0, N/2-1 \rangle$$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k)=\sum_{i=0}^{N-1} x_i.e^{-\frac{j2\pi ik}{N}} = x_0.e^{-j\frac{2\pi}{N}0k} + x_1.e^{-j\frac{2\pi}{N}1k} + x_2.e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} + \ldots + x_{N-1}.e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} =$$

$$= \left| \begin{matrix} g_0 = x_0 & g_1 = x_2 & g_2 = x_4 & \ldots & g_7 = x_{14} \\ h_0 = x_1 & h_1 = x_3 & h_2 = x_5 & & h_7 = x_{15} \end{matrix} \right| = \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i.e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i.e^{-\frac{j2\pi(2i+1)k}{N}} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i.e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i.e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}}.e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \right) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}}.H(k') \qquad k' = k \bmod (N/2)$$



$$W^m = e^{-j\frac{2\pi}{N}m}$$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}}.H(k') \qquad k' = k \bmod (N/2)$$

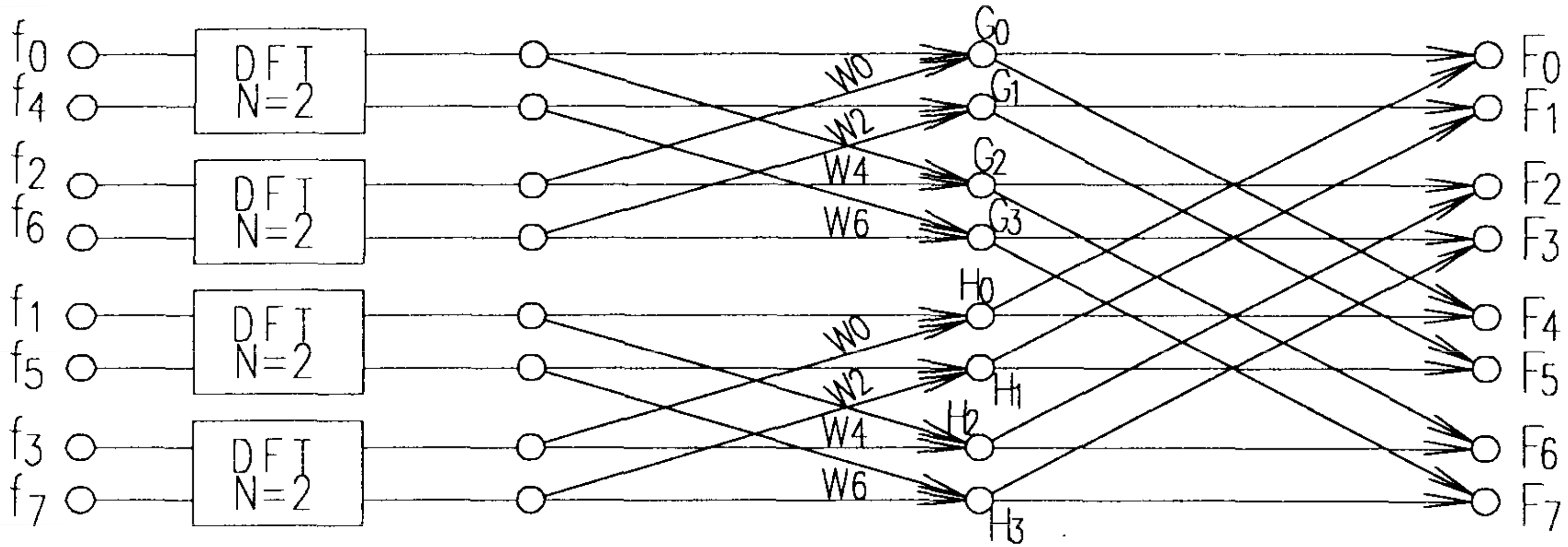
- ☑ výsledná pracnost bude součtem pracností výpočtu spekter obou posloupností

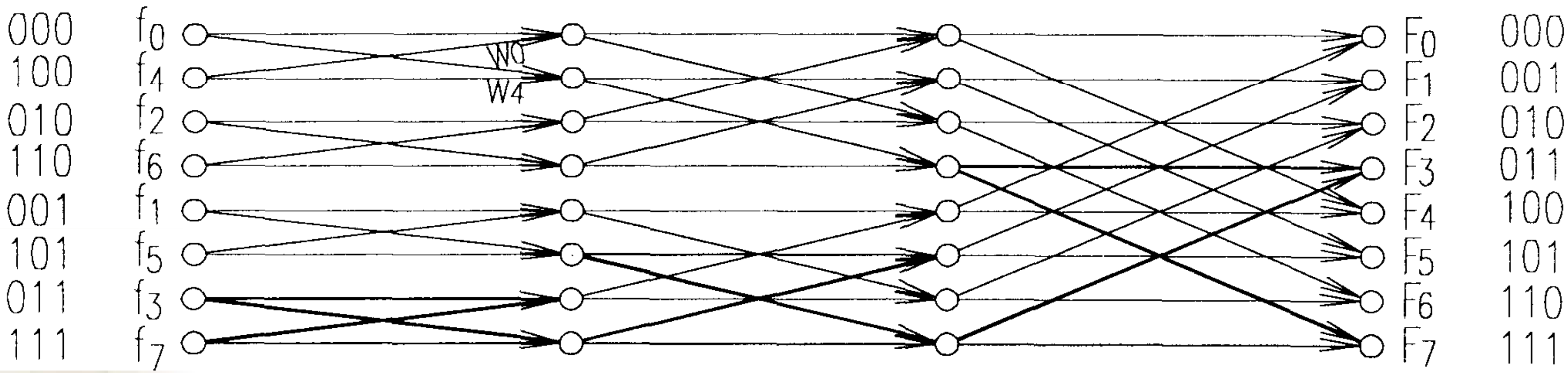
$$2.(N/2)^2.P+N.P$$

tzn. uspoření pracnosti téměř na polovinu;

- ☑ je-li N/2 opět sudé, může se v dělení pokračovat – celkově je výhodné, je-li $N = 2^m$

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI





FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- ☑ každý uzel v grafu představuje jedno komplexní násobení a součet
- ☑ N uzlů ve vrstvě; celkem m vrstev $m=\log_2 N$
- ☑ celková pracnost:

$$P.N.m = P.N.\log_2 N$$

to představuje při N=8 úsporu 60%, při N=1024 již téměř 99% a při $N=131072=2^{17}$ dokonce 99,99%

FFT
ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- ☑ výstup je uspořádán přirozeně; vstup je v bitově inverzním pořadí;
- ☑ opakující se struktury „motýlků“ obsahujících 4 uzly a 4 hrany