SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, Kamenice 3, 4. patro, dv.č.424

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

IX.
Z TRANSFORMACE
SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM

Z TRANSFORMACE

definice DTFT - opakování

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT).\exp(-jk\omega T),$$

X(ω) je obecně komplexní funkce proměnné ω - kmitočtu

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT).\exp(j\omega T)^{-k},$$

je-li z=exp(jωT), dostaneme

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT).z^{-k},$$

oboustranná Z-transformace

Z TRANSFORMACE

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT).z^{-k},$$ jednostranná Z-transformace

Z-transformace jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT))=1$$

Z-transformace posunutého jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT\text{-}nT))= \sum_{k=0}^{\infty} \Delta(kT-nT).z^{-n} = \Delta(0T).z^{-n} = z^{-n} = \frac{1}{z^{n}}$$

Z TRANSFORMACE

Z-transformace jednotkového skoku

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

vynásobíme-li obě strany (z-1) dostaneme

$$(z-1).U(z) = (z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots) – (1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots) = z$$

$$U(z) = z/(z-1) = 1/(1-z^{-1})$$

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

Linearita

$$a.x(k) + b.y(k) \sim a.X(z) + b.Y(z)$$

Posun vpravo x(k).u(k)

$$x(k-n).u(k-n) \sim z^{-n}X(z)$$

Posun vpravo x(k)

$$x(k-1) \sim z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(k-2) \sim z^{-2}X(z) + x(-2) + z^{-1}.x(-1)$$

$$\vdots$$

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z) + x(-n) + z^{-1}.x(-n+1) + \ldots + z^{-n+1}.x(-1)$$

Je-li $x(m) = 0$ pro $m = -1, -2, \ldots., -n$, je

$$x(k-n) \sim z^{-n}X(z),$$

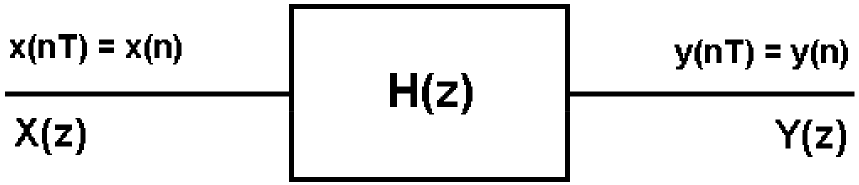
což je totéž jako pro $x(k-n).u(k-n)$.

VLASTNOSTI Z TRANSFORMACE

Konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i).y(n-i) \approx X(z).Y(z)$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
PŘENOSOVÁ FUNKCE



$$y(nT) = h(nT)*x(nT)$$

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

$H(z) = Y(z)/X(z)$, kde $H(z)$ je racionální lomená funkce proměnné z^{-1} (**obrazová přenosová funkce**)

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
NULOVÉ BODY A PÓLY

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \qquad n \le m$$

$$H(z) = A . \frac{z^{m-n} \prod_{i=1}^{n} (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^{m} (z - z_{pi})}$$

A – zesílení; z_{ni} … nulové body; z_{pi} … póly

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
DIFERENČNÍ ROVNICE

$$H(z)=\frac{a_n z^{-n}+a_{n-1}z^{-n+1}+a_{n-2}z^{-n+2}+\ldots+a_0}{b_n z^{-m}+b_{n-1}z^{-m+1}+b_{n-2}z^{-m+2}+\ldots+b_0}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$(b_n z^{-n}+b_{n-1}z^{-n+1}+b_{n-2}z^{-n+2}+\ldots+b_0).Y(z)=$$
$$=(a_n z^{-n}+a_{n-1}z^{-n+1}+a_{n-2}z^{-n+2}+\ldots+a_0).X(z)$$

$$b_m Y(z).z^{-m}+b_{m-1}Y(z).z^{-m+1}+b_{m-2}Y(z).z^{-m+2}+\ldots+b_0.Y(z)=$$
$$=a_n X(z).z^{-n}+a_{n-1}X(z).z^{-n+1}+a_{n-2}X(z).z^{-n+2}+\ldots+a_0.X(z)$$

!!! za předpokladu nulových počátečních podmínek !!!

$$b_m y(iT-mT)+b_{m-1}y(iT-mT+T)+b_{m-2}y(iT-mT+2T)+\ldots+b_0 y(iT)=$$
$$=a_n x(iT-nT)+a_{n-1}x(iT-nT+T)+a_{n-2}x(iT-nT+2T)+\ldots+a_0 x(iT)$$

$$y(iT)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{b_0}.x(iT-kT)-\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{b_0}.y(iT-kT)$$

diferenční rovnice

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
FREKVENČNÍ PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \qquad n \leq m$$

$$H(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_m}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \ldots + b_m}$$

$$z = \exp(j\omega T)$$

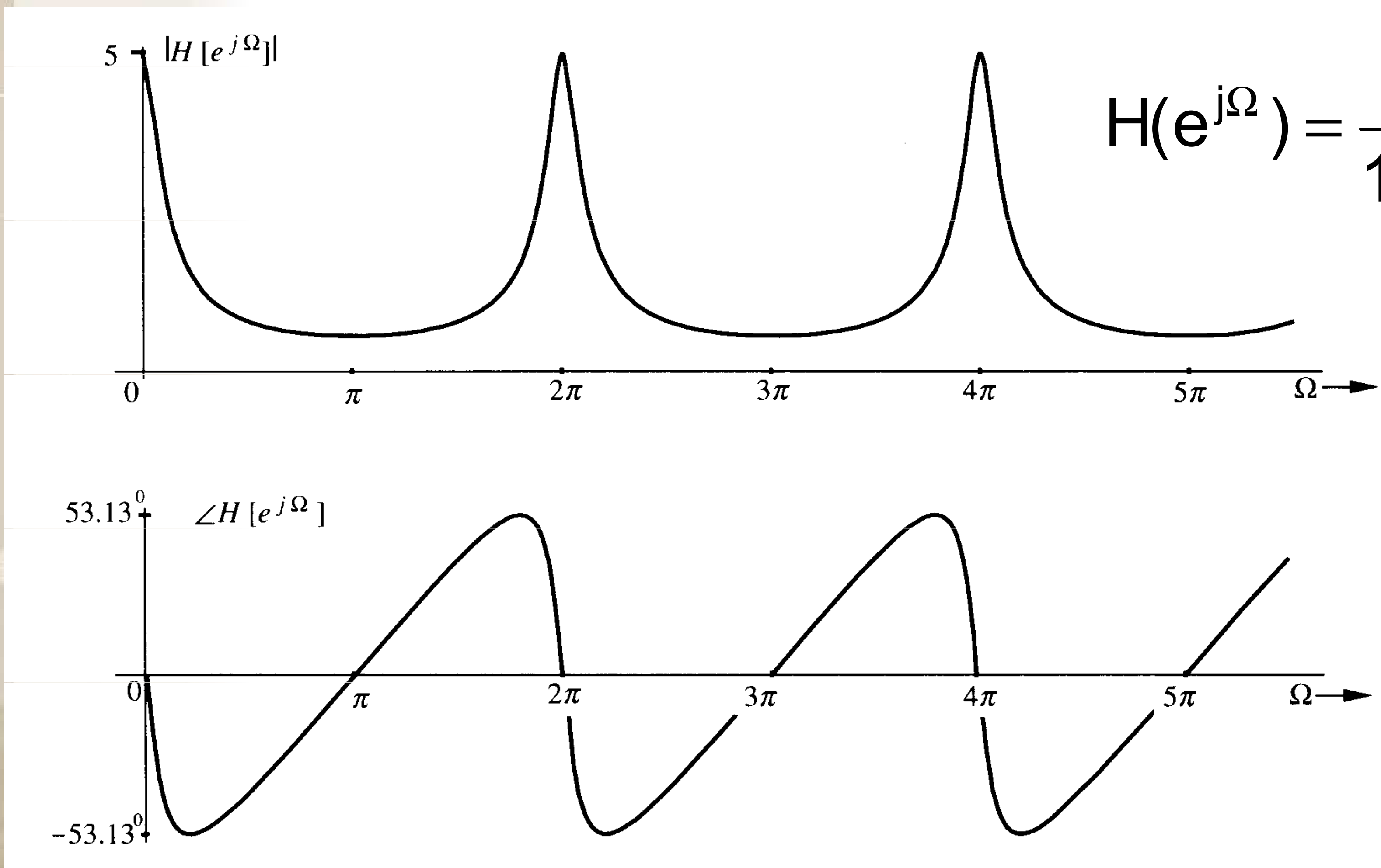
$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega m T} + a_1 e^{j\omega(m-1)T} + a_2 e^{j\omega(m-2)T} + \ldots + a_m e^{j\omega 0 T}}{b_0 e^{j\omega m T} + b_1 e^{j\omega(m-1)T} + b_2 e^{j\omega(m-2)T} + \ldots + b_m e^{j\omega 0 T}}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{j\omega m T} + a_1 e^{j\omega(m-1)T} + a_2 e^{j\omega(m-2)T} + \ldots + a_m e^{j\omega 0 T}}{b_0 e^{j\omega m T} + b_1 e^{j\omega(m-1)T} + b_2 e^{j\omega(m-2)T} + \ldots + b_m e^{j\omega 0 T}}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)|.e^{j\varphi}$$

SYSTÉMY S DISKRÉTNÍM ČASEM
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY



$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-0{,}8.e^{-j\Omega}}$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

operátorová přenosová funkce

$H(p) = Y(p)/X(p)$ $H(z) = Y(z)/X(z)$

$Y(p) = H(p).X(p)$ $Y(z) = H(z).X(z)$

$$s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau).s_2(t-\tau).d\tau \approx S_1(p).S_2(p)$$

konvoluce

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i).y(n-i) \approx X(z).Y(z)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z).1$$

$$y(kT) = h(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z).X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z).1$$

$$y(kT) = h(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

Z-transformace jednotkového impulsu

$$\mathcal{Z}(\Delta(kT))=1$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

$$y(kT) = h(kT) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z).\mathcal{Z}(\Delta(kT)))$$

odezva na jednotkový impuls -

- impulsová charakteristika

$$y(t) = h(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p).\mathcal{L}(\delta(t)))$$

$$Y(p) = H(p) = \mathcal{L}(h(t)*\mathcal{L}^{-1}(1))$$

- ☑ impulsní charakteristika a přenosová funkce tvoří transformační pár Laplacovy (Z) transformace.
- ☑ impulsní charakteristika a frekvenční přenos tvoří transformační pár Fourierovy (DFT) transformace.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
IMPULSNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$ ($h(kT) = 0$ pro $k > k_0$) hovoříme o systému s konečnou impulsní charakteristikou (KIO – FIR);
- ☑ není-li $h(t) = 0$ pro $t > t_0$ ($h(kT) = 0$ pro $k > k_0$) hovoříme o systému s nekonečnou impulsní charakteristikou (NIO – IIR);

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ
PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

přechodová charakteristika =

= odezva systému na jednotkový skok

$\mathcal{L}(\sigma(t)) = 1/p$

$Y(p) = G(p) = H(p).\mathcal{L}(\sigma(t)) = H(p).1/p$

$\mathcal{Z}(u(kT)) = 1/1\text{-}z^{-1} = z/(z-1)$

$Y(z) = G(z) = H(z).z/(z-1)$

X.
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

- vstup – primární příčinou dynamiky systému;
- paměť – sekundární příčina dynamiky systému;

$$\Downarrow$$

dva základní typy experimentování se systémy

- zkoumání vlivu počátečního stavu;
- zkoumání vlivu vstupního signálu

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

- v čase t_0 se systém nachází vlivem své předcházející činnosti ve stavu $x(t_0)$ – fyzikální (chemické, biologické,…) počáteční podmínky;
- bez přivedeného vstupu analyzujeme chování systému – přirozená odezva systému (odezva na počáteční stav – nulové počáteční podmínky)

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

tendence (konvergence, divergence) není počátečním stavem ovlivněna

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

SPOJITÝ SYTÉM

obecně:

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y =$$
$$= a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_0 x$$

$y^{(n)}(0)=y_{n0};\ y^{(n-1)}(0)=y_{n-1,0};\ \dots,\ y(0)=y_0$

bez vstupu:

$$b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_0 y = 0$$

$y^{(n)}(0)=y_{n0};\ y^{(n-1)}(0)=y_{n-1,0};\ \dots,\ y(0)=y_0$

DISKRÉTNÍ SYTÉM

obecně:

$$b_m y(iT-mT)+b_{m-1}y(iT-mT+T)+b_{m-2}y(iT-mT+2T)+\ldots+b_0 y(iT)=$$
$$=a_n x(iT-nT)+a_{n-1}x(iT-nT+T)+a_{n-2}x(iT-nT+2T)+\ldots+a_0 x(iT)$$

$$y(-mT)=y_{-m,0};\ y(-mT+T)=y_{-m+1,0};\ \ldots,\ y(0)=y_{0,0}$$

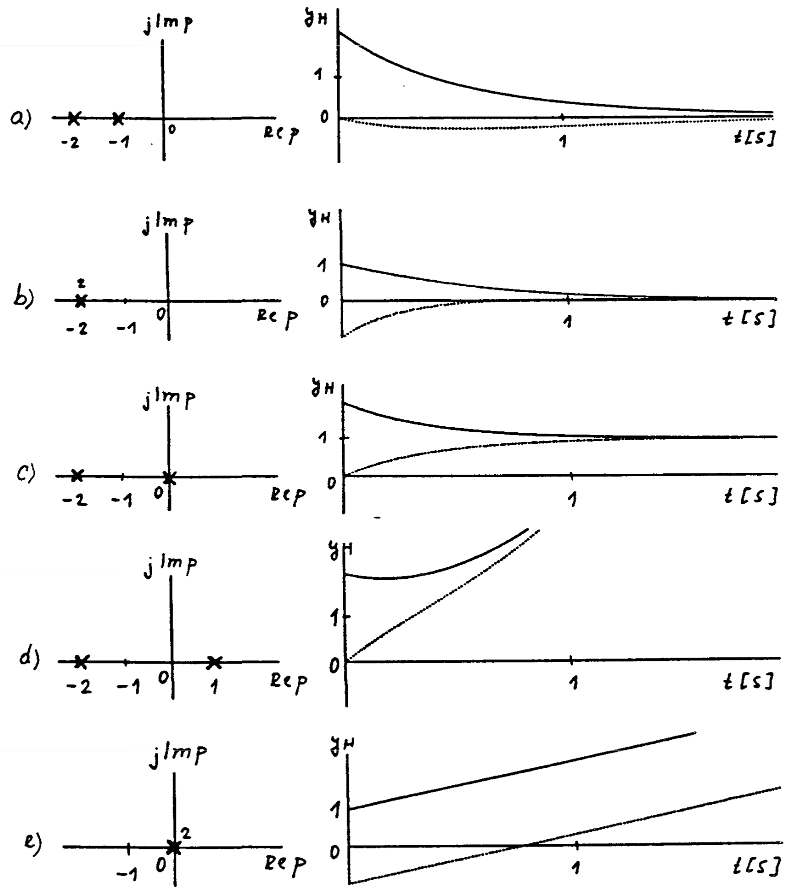
bez vstupu:

$$b_m y(iT-mT)+b_{m-1}y(iT-mT+T)+b_{m-2}y(iT-mT+2T)+\ldots+b_0 y(iT)=0$$

$$y^{(n)}(0)=y_{n0};\ y^{(n-1)}(0)=y_{n-1,0};\ \ldots,\ y(0)=y_0$$

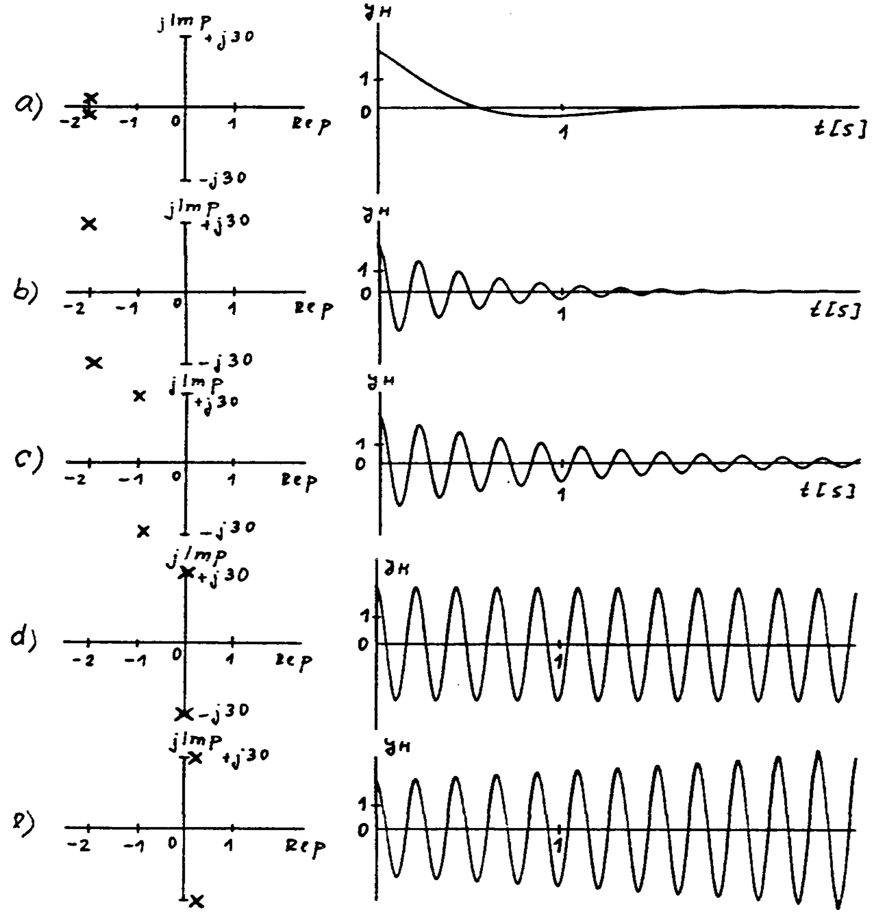
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení reálných pólů a různé integrační konstanty C_1 a C_2. Plná čára: $C_1 = C_2 = 1$. Tečkovaná čára: $C_1 = -1$, $C_2 = 1$.

a)	$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$	$y_H(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$
b)	$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$	$y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$
c)	$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0$	$y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2$
d)	$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$	$y_H(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$
e)	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	$y_H(t) = C_1 + C_2 t$



Přirozená odezva systému 2. řádu pro různá rozložení komplexních pólů a integrační konstanty $C_1 = C_2 = 1$.

a)	$\lambda_1 = -2 + j3, \lambda_2 = -2 - j3$	$y_H(t) = 2e^{-2t}\cos(3t)$
b)	$\lambda_1 = -2 + j30, \lambda_2 = -2 - j30$	$y_H(t) = 2e^{-2t}\cos(30t)$
c)	$\lambda_1 = -1 + j30, \lambda_2 = -1 - j30$	$y_H(t) = 2e^{-t}\cos(30t)$
d)	$\lambda_1 = j30, \lambda_2 = -j30$	$y_H(t) = 2\cos(30t)$
e)	$\lambda_1 = 0.2 + j30, \lambda_2 = 0,2 - j30$	$y_H(t) = 2e^{0.2t}\cos(30t)$

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

Přirozená odezva –

- ☑ časem zaniká – asymptoticky stabilní systém vzhledem k počátečním podmínkám;
- ☑ ustálí se v konečných mezích (periodicky osciluje nebo je konstantní) – stabilní systém nebo systém na mezi stability vzhledem k počátečním podmínkám;
- ☑ neohraničeně roste – nestabilní systém vzhledem k počátečním podmínkám

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU POČÁTEČNÍHO STAVU

lze zjišťovat:

- ☑ dynamické vlastnosti (tvar přechodu do nového stavu - rychlost přechodu, monotónnost či kmitání, frekvence kmitání, apod.);
- ☑ linearitu (sledováním podobnosti odezev při různých počátečních stavech);
- ☑ stabilitu (sledováním konvergence);

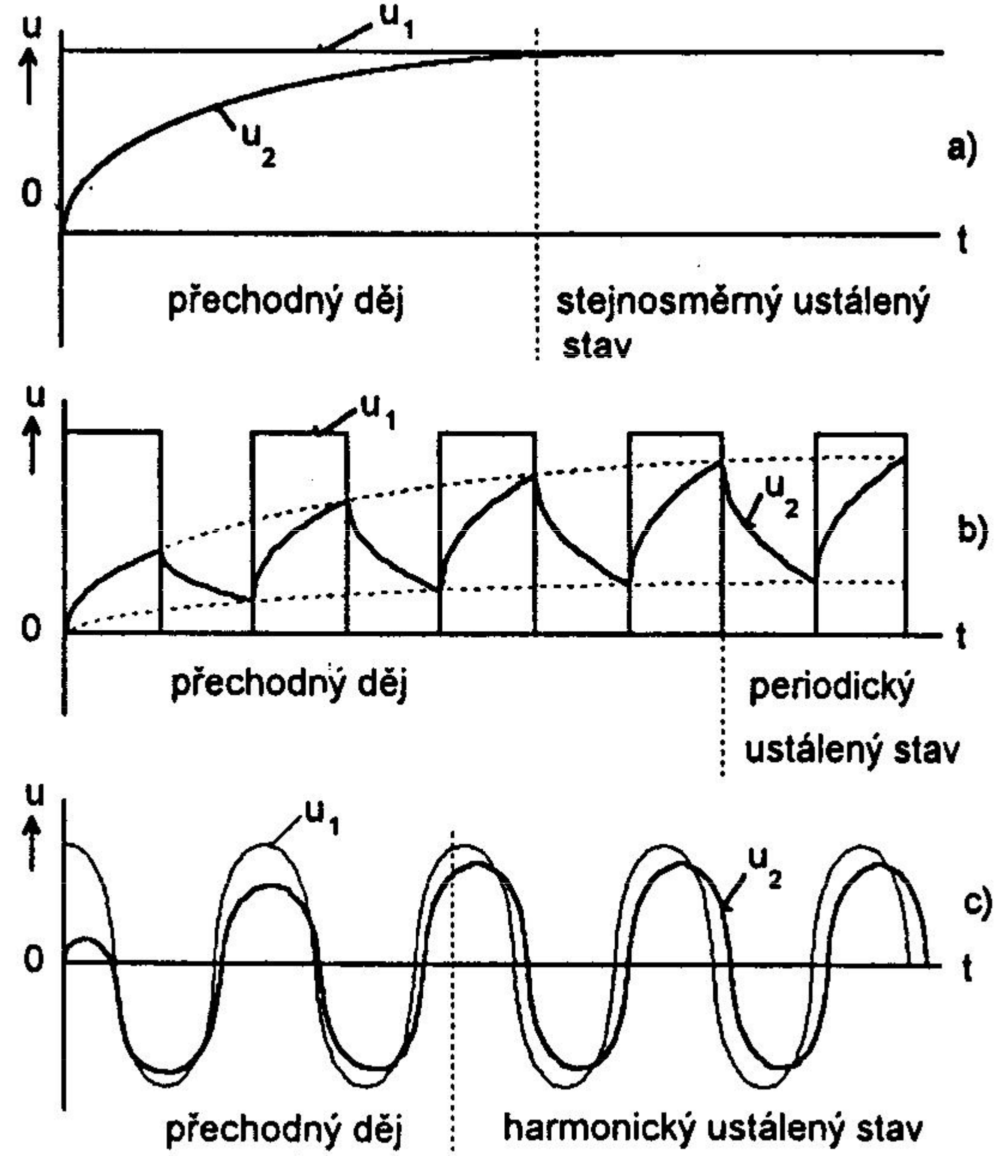
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU VSTUPNÍHO SIGNÁLU

- ☑ systém se musí nacházet v nulovém počátečním stavu;
- ☑ odpověď systému při nulovém počátečním stavu – vnucená (vynucená) odezva;
- ☑ můžeme sledovat chování systému buzeného signály očekávaného průběhu – impulsová odezva, přechodová odezva, frekvenční charakteristika

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

ZKOUMÁNÍ VLIVU VSTUPNÍHO SIGNÁLU



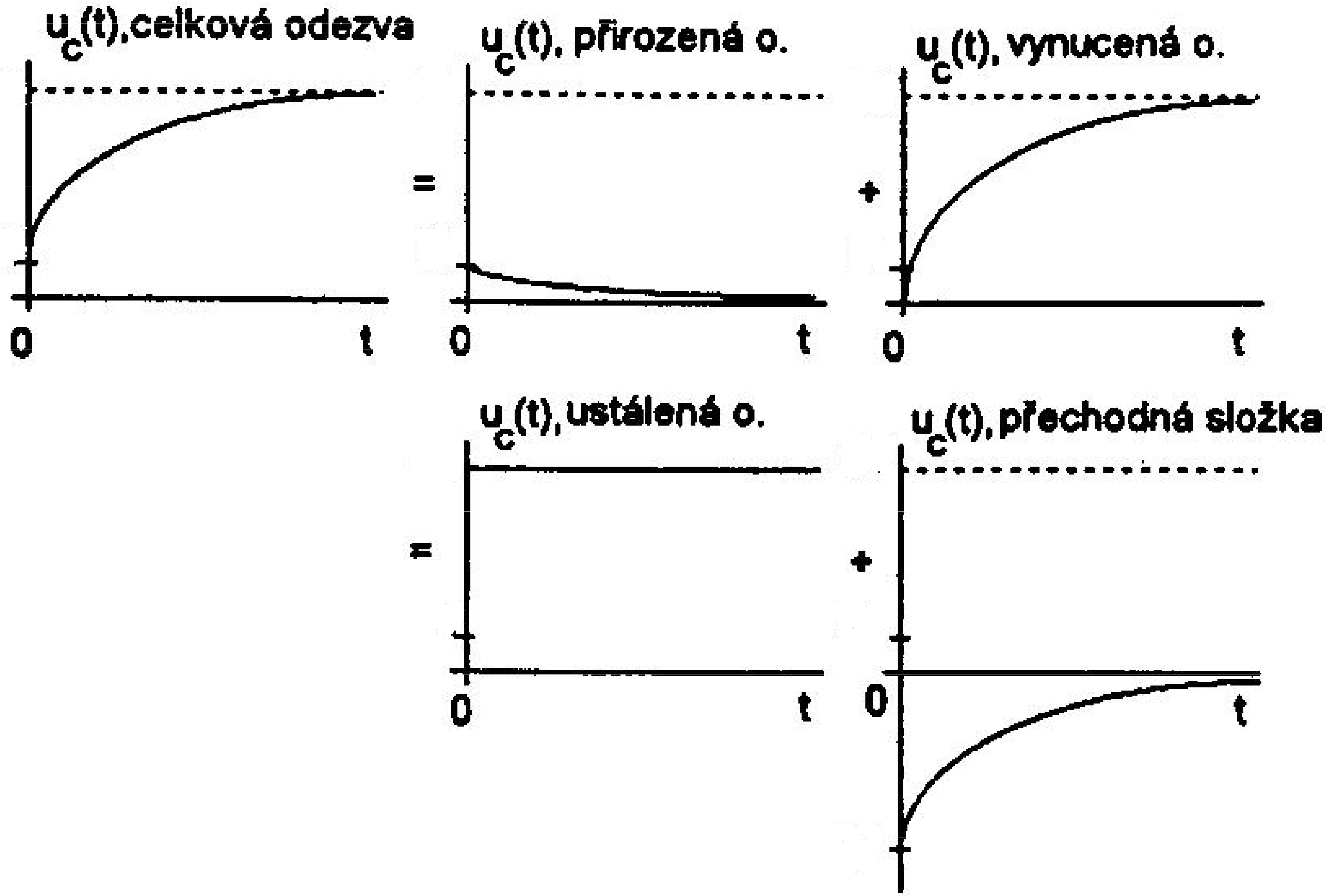
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

- ☑ přechodný děj - popis chování systému z počátečního do koncového stavu
- ☑ ustálený stav - stav kdy zaniká pohyb systému (stejnosměrný ustálený stav) – není to v jediném okamžiku, ale v časovém intervalu
- ☑ rovnovážný stav - stabilní, nestabilní

celková odezva = přirozená odezva + vnucená odezva

!!!POZOR !!! platí to jen u lineárních systémů

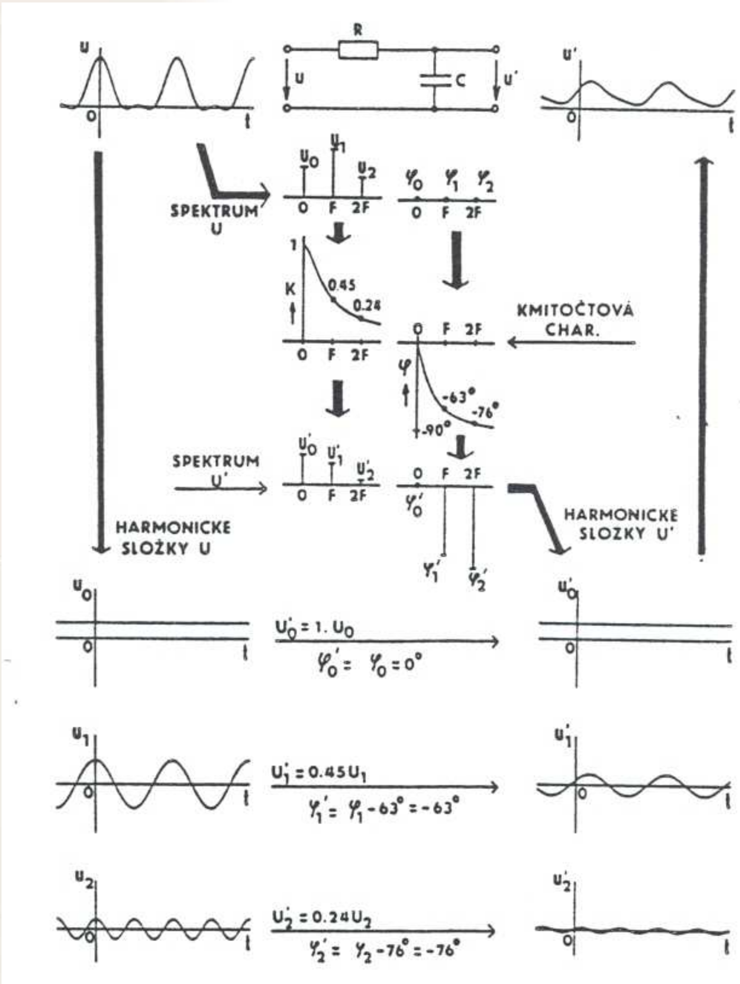
ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

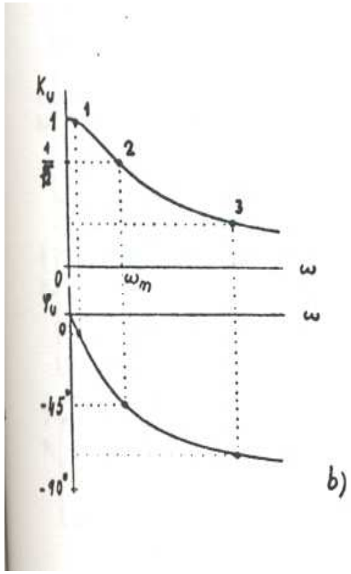


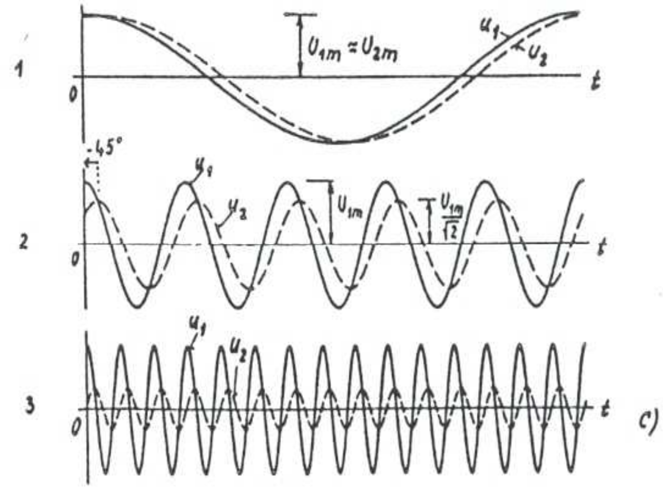
celková odezva = přechodná odezva + ustálená odezva

ZÁKLADNÍ JEVY V SYSTÉMECH

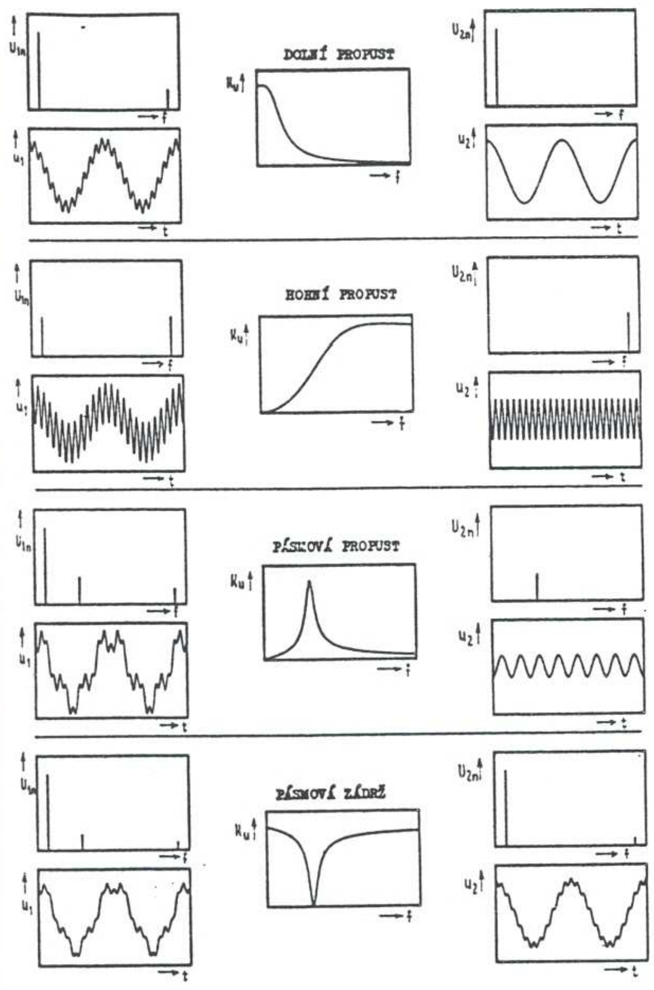
TEST NA HARMONICKÝ SIGNÁL
KMITOČTOVÁ CHARAKTERISTIKA







KMITOČTOVÁ CHARAKTERISTIKA
LINEÁRNÍ FREKVENČNÍ FILTRACE



Příprava nových učebních materiálů pro obor Matematická biologie

je podporována projektem ESF

č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318

„VÍCEOBOROVÁ INOVACE STUDIA MATEMATICKÉ BIOLOGIE"

EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
UNIVERSITAS MASARYKIANA BRUNENSIS

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ