SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

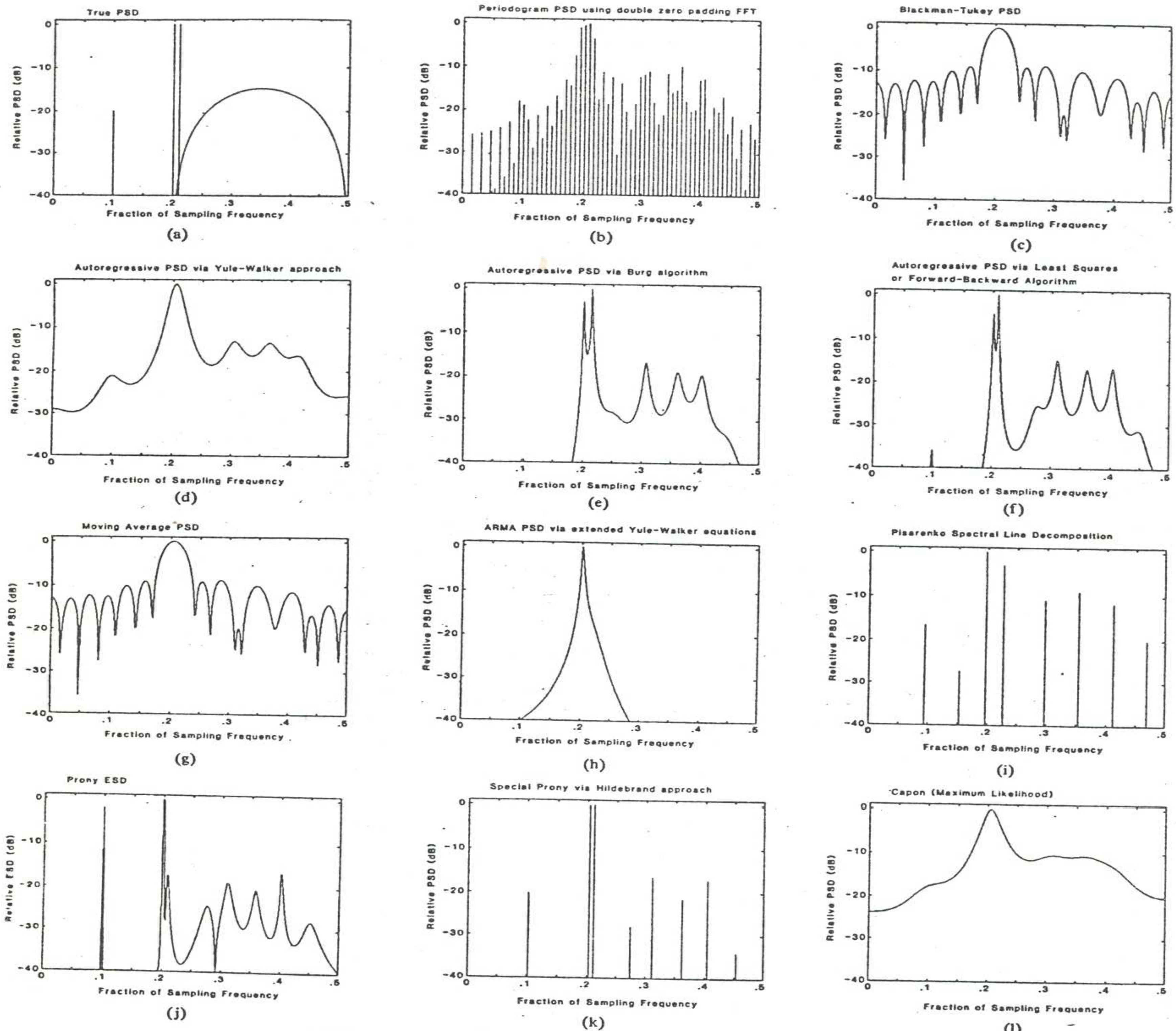
prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

LITERATURA

- Holčík,J.: přednáškové prezentace

- Proakis,J.G., Rader,C.M., Ling,F., Nikias,C.L.: Advanced Digital Signal Processing. Macmillan Publ. Comp, New York 1992, 608s.
- Kay, S.M., Marple, S.L.: Spectrum Analysis - A Modern Perspective. Proc. IEEE, roč.69, č.11, Nov. 1981, s.1380-1418.


True PSD
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(a)
Periodogram PSD using double zero padding FFT
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(b)
Blackman-Tukey PSD
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(c)
Autoregressive PSD via Yule-Walker approach
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(d)
Autoregressive PSD via Burg algorithm
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(e)
Autoregressive PSD via Least Squares
or Forward-Backward Algorithm
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(f)
Moving Average PSD
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(g)
ARMA PSD via extended Yule-Walker equations
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(h)
Pisarenko Spectral Line Decomposition
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(i)
Prony ESD
Relative ESD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(j)
Special Prony via Hildebrand approach
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(k)
Capon (Maximum Likelihood)
Relative PSD (dB)
Fraction of Sampling Frequency
(l)

I. CO UŽ UMÍME?

SIGNÁL

SIGNÁL

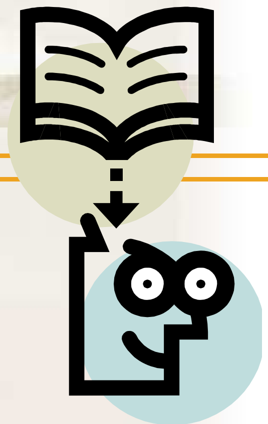
DEFINICE

Signál je jev fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí informaci o stavu systému, který jej generuje, a jeho dynamice.

SIGNÁL

- ☑ **primární oblast popisu** (prostor definovaný nezávislými původními proměnnými)– čas, prostorové souřadnice, pořadí
- ☑ **sekundární oblast popisu** – transformace (zobrazení) z primární oblasti – vytváříme **obraz** (latinsky **spectrum**) signálu

FREKVENČNÍ SPEKTRUM



Frekvenční spektrum signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !

SIGNÁL

na vlastnosti popisu signálu v sekundární oblasti má vliv:

- vlastnosti signálu v primární oblasti;
- transformační vztah

SIGNÁL

na vlastnosti popisu signálu v sekundární oblasti má vliv:

- vlastnosti signálu v primární oblasti;
- transformační vztah

(je paráda, když je lineární!)

SIGNÁL

na vlastnosti popisu signálu v sekundární oblasti má vliv:

- vlastnosti signálu v primární oblasti;
- transformační vztah

(je paráda, když je lineární!)

Co to je, když je lineární?

INTEGRÁLNÍ LINEÁRNÍ TRANSFORMACE

spojitý signál	diskrétní signál (časová řada)
$X(f)=\int\limits_{O_a} x(t).a(f,t)dt$	$X(kF)=\sum\limits_{O_d} x(nT).a_{kn}$

Je-li jádro transformace $a(f,t)=e^{-j2\pi ft}$, resp. $a_{kn}=e^{-j2\pi kFnT}$, pak realizujeme rozklad signálu na jeho harmonické složky

$$\Downarrow$$

Fourierovské spektrum

FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

jeho výpočet závisí na vlastnostech primárního popisu signálu

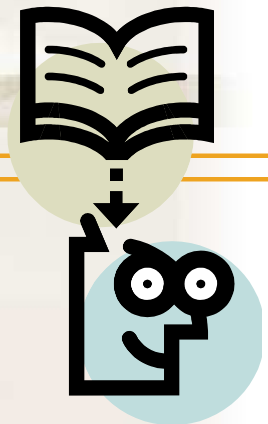
FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **spojitý periodický signál** má diskrétní frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu řadu;
- ☑ **spojitý jednorázový signál** má spojité frekvenční spektrum– pro rozklad jsme použili Fourierovu transformaci.

! A VĚDĚT PROČ !

FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM



! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **diskrétní periodický signál** má diskrétní frekvenční spektrum – diskrétní Fourierova transformace;
- ☑ **diskrétní jednorázový signál z nekonečného časového intervalu** má spojité frekvenční spektrum – Fourierova transformace s diskrétním časem transformace;
- ☑ **diskrétní jednorázový signál z konečného časového intervalu** má diskrétní frekvenční spektrum – diskrétní Fourierova transformace;

! A VĚDĚT PROČ !

FOURIEROVSKÉ SPEKTRUM

jeho výpočet závisí na vlastnostech primárního popisu signálu:

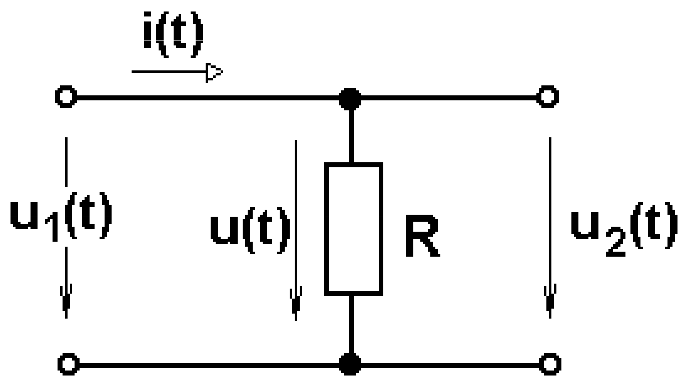
- Signál - 1) periodický
  2) neperiodický
  - s konečnou energií;
  - s nekonečnou energií

II.
SIGNÁLY
DALŠÍ POJMY

ENERGIE

- okamžitá práce vykonaná na odporu R:

  $A(t) = u(t).i(t)$



- podle Ohmova zákona:

  $U = R.I,$

  a tedy můžeme po dosazení psát

  $A(t) = R.i(t) \, . \, i(t) = R.i^2(t) = u(t).\, u(t)/R = u^2(t)/R.$

  Když je R = 1 Ω je

  $$A(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

  a celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt$$

ENERGIE

- ☑ z té úvahy energie spojitého signálu s(t)

$$E_s = \int_T s^2(t)dt$$

- ☑ energie diskrétního signálu

$$E_d = \sum_n^N s^2(nT)$$

VÝKON

- ☑ výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = E/T$$

$$P_s = \frac{1}{T}\int_T s^2(t)dt \qquad P_{s\infty} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T s^2(t)dt$$

$$P_d = \frac{1}{NT}\sum_n^N s^2(nT) \qquad P_{dn} = \frac{1}{N}\sum_n^N s^2(n)$$

$$P_{dn\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_n^N s^2(n)$$

KORELAČNÍ FUNKCE

- vzájemná či křížová korelační funkce (cross-correlation function) dvou periodických signálů (funkcí) o téže periodě T je definována

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T}\int_T s_1(t)s_2(t+\tau)dt$$

- popisuje podobnost průběhů obou signálů v závislosti na jejich posunutí
- je periodická s periodou T

KORELAČNÍ FUNKCE

- ☑ Vypočtěte vzájemnou korelační funkci signálů $s_1(t)=2\cos 2\pi t$ a $s_2(t)=\sin 2\pi t$.

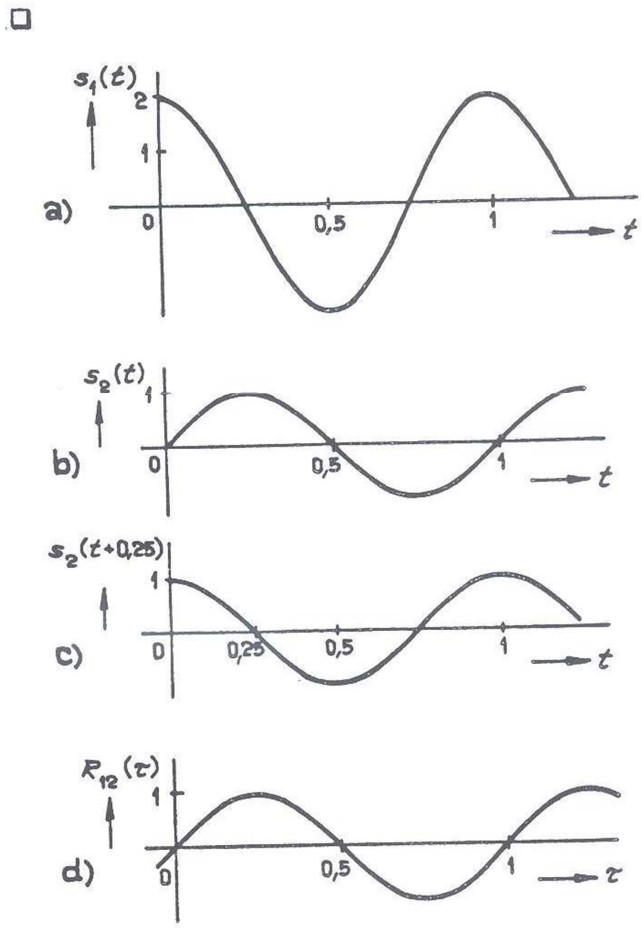
Oba signály mají tutéž periodu T=1, takže

$$R_{12}(\tau)=\frac{1}{T}\int_T s_1(t)s_2(t+\tau)dt=$$

$$=\frac{1}{1}\int_0^1 2\cos(2\pi t).\sin(2\pi(t+\tau))dt=$$

$$=\int_0^1\left[\sin(4\pi t+2\pi\tau)+\sin(2\pi\tau)\right]dt=$$

$$=0+\sin(2\pi\tau)$$



Obr. 1-34. Korelační funkce.
a) Signál $s_1(t)$,
b) signál $s_2(t)$,
c) signál $s_2(t+0{,}25)$,
d) korelační funkce $R_{12}(\tau)$.

KORELAČNÍ FUNKCE

- ☑ výpočet korelační funkce má smysl i v případě, že jsou oba signály totožné – autokorelační funkce

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_{T} s(t)s(t+\tau)dt$$

- ☑ Vypočtěte autokorelační funkci signálu s(t)=C.cos(ωt+φ)

$$R(\tau) = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} C.\cos(\omega t+\varphi).C.\cos[\omega(t+\tau)+\varphi].dt =$$

$$= \frac{C^2}{2T}\int_{0}^{T} [\cos(2\omega t + 2\varphi + \omega\tau) + \cos(\omega\tau)].dt =$$

$$= C_{ef}^2 \cos\omega\tau$$

KORELAČNÍ FUNKCE

- ☑ vypočtená korelační funkce je:
  - ➔ sudá;
  - ➔ periodická s periodou T;
  - ➔ R(0) je rovno kvadrátu efektivní hodnoty signálu;
  - ➔ $\forall \tau \in \mathbb{R}$: $R(0) \geq R(\tau)$.
- ☑ tyto čtyři vlastnosti mají autokorelační funkce všech periodických signálů.

KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ **korelační funkce** $R(t_1,t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_1 a hodnotami náhodného procesu v okamžiku t_2. Může být spočítána pomocí vztahu

$$R(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1.x_2 p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

- ☑ **kovarianční funkce** (covariance function) $K(t_1,t_2)$ je mírou souvztažnosti mezi odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_1 od $m(t_1)$ a odchylkami náhodného procesu v okamžiku t_2 od $m(t_2)$. Může být spočítána pomocí vztahu

$$K(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m(t_1)].[x_2 - m(t_2)]p(x_1,x_2,t_1,t_2)dx_1dx_2$$

KORELAČNÍ FUNKCE NÁHODNÝCH PROCESŮ

- ☑ tyto poměrně obecné vztahy se mohou zjednodušit, pokud se zjednoduší vlastnosti náhodných procesů

$$\Downarrow$$

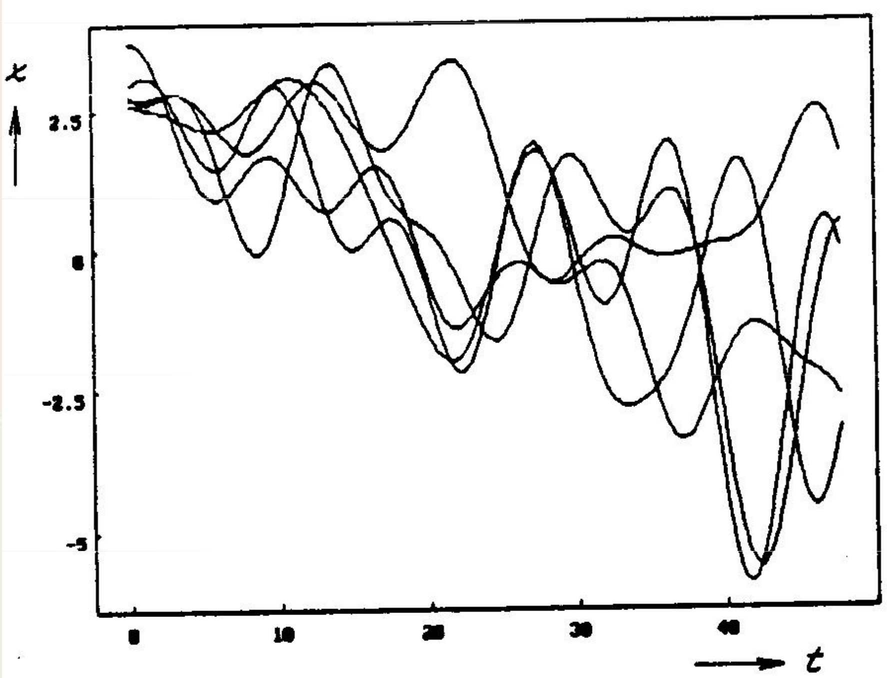
stacionarita

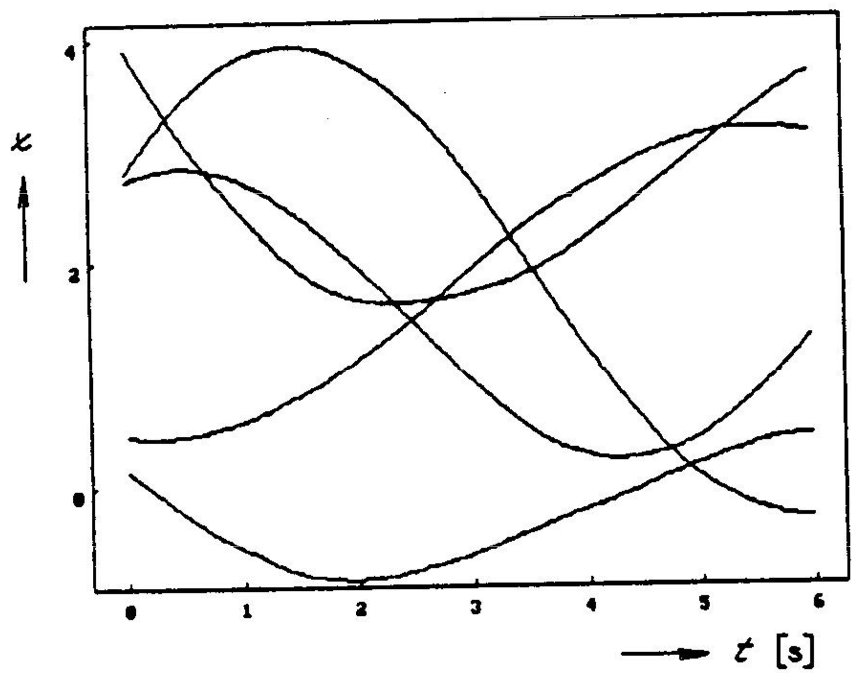
ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

- **stacionární náhodný proces** (stationary random process) je proces se stálým chováním





STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

  v tom případě, tj. s $\tau = t_2 - t_1$, můžeme funkce $p(x_1,x_2,t_1,t_2)$, $R(t_1,t_2)$ a $K(t_1,t_2)$ nahradit funkcemi $p(x_1,x_2,\tau)$, $R(\tau)$ a $K(\tau)$

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (ergodic random process) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace

- ☑ aritmetický průměr

$$\hat{m} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K} x(t_i)$$

nebo

$$\hat{m} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x(t)dt$$

Odhad bude tím věrohodnější, čím bude úsek T delší.

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

- disperze

$$\hat{D} = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m]^2 dt$$

- autokorelační funkce

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt$$

- křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy ξ(t) a η(t) s realizacemi x(t) a y(t)

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t-\tau)dt\right)$$

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

- ☑ křížová korelační funkce mezi dvěma vzájemně ergodickými procesy ξ(t) a η(t) s realizacemi x(t) a y(t)

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t+\tau)dt = \left(\frac{1}{T}\int_0^T x(t)y(t-\tau)dt\right)$$

- ☑ pro diskrétní případ

$$\hat{R}_{xy}(nT) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(mT)y(mT+nT) = \left(\frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1} x(mT)y(mT-nT)\right)$$

III. PRINCIPY TOHO, JAK NA TO

SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA

- ☑ opakování
  - ➔ periodický signál

SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA

- opakování
  - periodický signál   není to pod vaší úroveň?!

SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA

- opakování
  - periodický signál — Fourierova řada
  - neperiodický signál
    - s konečnou energií

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x_a^2(t)dt < \infty$$

SPOJITÝ SIGNÁL

- ☑ Fourierova transformace

$$X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t).\exp(-2\pi jft)dt$$

Parsevalova věta

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x_a^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left|X_a(f)\right|^2 df$$

spektrální hustota energie $S_{xx}(f)$

SPEKTRÁLNÍ HUSTOTA ENERGIE

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t).x_a(t+\tau).dt$$

autokorelační funkce signálu $x_a(t)$

pro autokorelační funkci a spektrální hustotu energie platí:

$$S_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau).\exp(-2\pi jf\tau).d\tau$$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f).\exp(2\pi jf\tau).df$$

obě funkce tvoří Fourierovský pár

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

$X(nT)$, definovaný na nekonečném intervalu

$n \in \langle -\infty;\infty \rangle$; je frekvenčně omezený na pásmo o šířce $\pm B \Rightarrow$ vzorkovací frekvence $F = 1/T > 2B$

$x(nT) = x_a(nT) = ?\ x(n)$

energie diskrétního signálu

$$E = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT) \quad \text{nebo} \quad E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)$$

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

Spektrální vyjádření diskrétního signálu

$$X(f) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT).\exp(-2\pi jfnT) \qquad x(nT) = \int_{-F/2}^{F/2} X(f).\exp(2\pi jfnT).df$$

Vztah spektra analogového a diskrétního signálu:

$$x(nT) = x_a(nT) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f).e^{j2\pi fnT} df$$

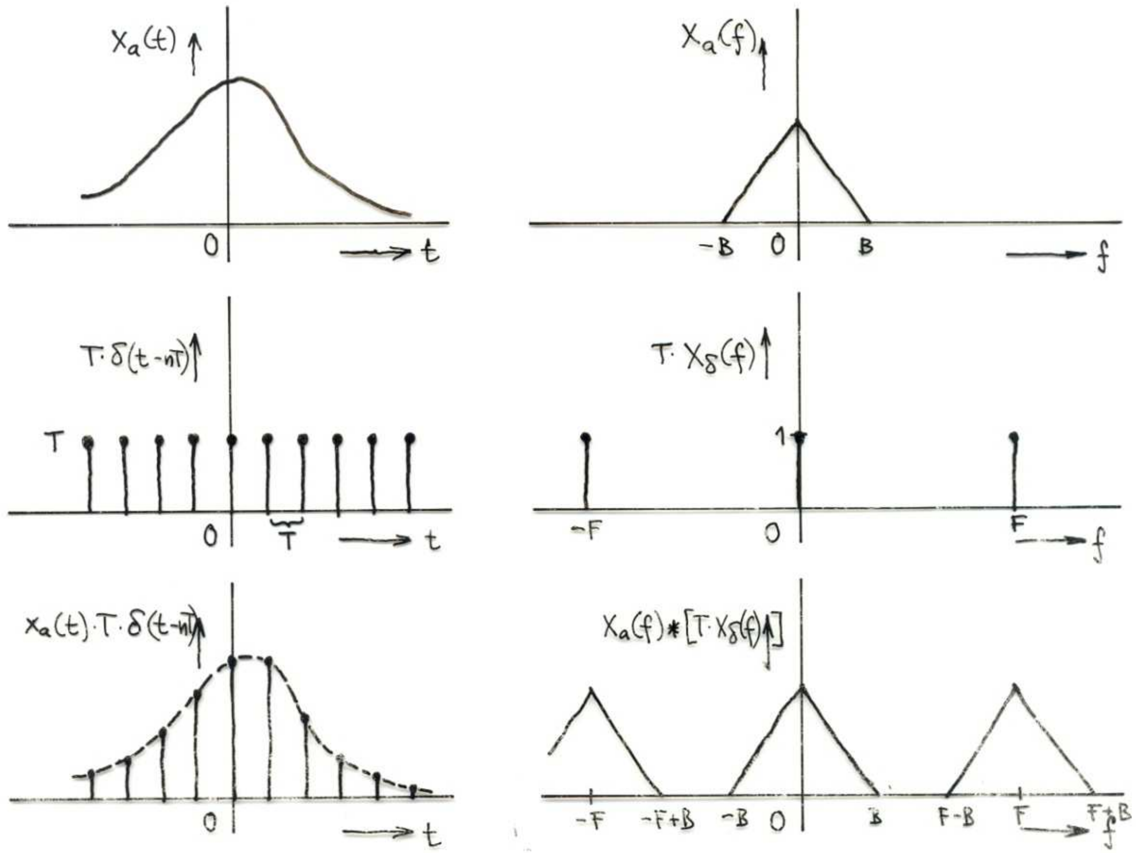
$$\int_{-F/2}^{F/2} X_a(f)e^{j2\pi fnT} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f)e^{j2\pi fnT} df = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kF-F/2}^{kF+F/2} X_a(f)e^{j2\pi fnT} df =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-F/2}^{F/2} X_a(f-kF)e^{j2\pi fnT} df = \int_{-F/2}^{F/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f-kF)e^{j2\pi fnT} df$$

$$\boxed{X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(f-kF)}$$

spektrální periodicita

DISKRÉTNÍ SIGNÁL



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kFt}$$

REKONSTRUKCE SIGNÁLU

rekonstrukce signálu:

předpokládáme, že je: $X_a(f) = \begin{cases} X(f) & |f| \leq F/2 \\ 0 & |f| > F/2 \end{cases}$

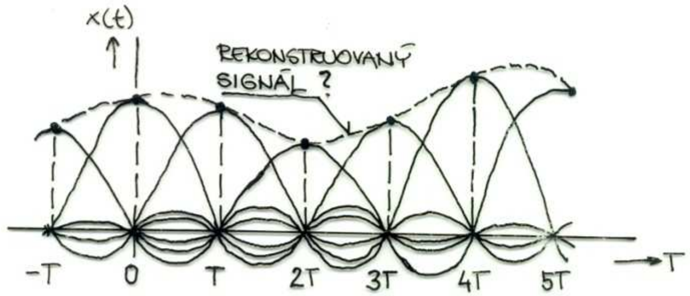
$$X_a(f) = X(f) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, e^{-j2\pi f nT}$$

$$x_a(t) = \int_{-F/2}^{F/2} X_a(f)\, e^{j2\pi f t}\, df = \int_{-F/2}^{F/2} \left[T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot e^{-j2\pi f nT} \right] \cdot e^{j2\pi f t}\, df =$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-F/2}^{F/2} e^{j2\pi f (t-nT)}\, df = \left| \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \right| =$$

$$= \frac{1}{\cancel{F}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \frac{e^{j2\pi (t-nT) F/2} - e^{-j2\pi (t-nT) F/2}}{j2\pi (t-nT)} \cdot \frac{\cancel{F}}{F} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot Si\left(\pi (t-nT) \cdot \frac{1}{T} \right)$$



RAYLEIGHOVA VĚTA

$$E = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(nT) = \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)|^2 df$$

$$E = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot x(nT) = T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot \int_{-F/2}^{F/2} X(f)\, e^{j2\pi f nT} df =$$

$$= \int_{-F/2}^{F/2} X(f)\cdot \underbrace{\left[T\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\cdot e^{j2\pi f nT}\right]}_{X^*(f)} df = \int_{-F/2}^{F/2} X(f)\cdot X^*(f)\, df = \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)|^2 df =$$

$$= \int_{-F/2}^{F/2} S_{xx}(f)\, df$$

WIENER-KHINCHINOVA VĚTA

$$R_{xx}(mT) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot x(nT+mT) = \int_{-F/2}^{F/2} X^*(f) \cdot X(f)\, e^{j2\pi f mT}\, df =$$

$$= \int_{-F/2}^{F/2} |X(f)|^2 e^{j2\pi f mT}\, df = \underline{\underline{\int_{-F/2}^{F/2} S_{xx}(f) \cdot e^{j2\pi f mT}\, df}}$$

$$T \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{xx}(mT)\, e^{-j2\pi f mT} = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot x(nT+mT)\, e^{-j2\pi f mT} =$$

$$= T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(nT+mT) \cdot e^{-j2\pi f mT} = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot X(f) \cdot e^{j2\pi f nT} =$$

$$= X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2 = \underline{\underline{S_{xx}(f)}}$$

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

- z toho plyne, že spektrální hustotu energie neperiodického signálu s konečnou energií lze spočítat dvěma způsoby:
  - přímá metoda:

    $S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = |T.\Sigma x(nT).\exp(-2\pi jfnT)|^2$

  - nepřímá metoda:

    1) $R_{xx}(mT) = T.\ \Sigma x(nT).\ x(nT+mT);$

    2) $S_{xx}(f) = \Sigma R_{xx}(mT).\exp(-2\pi jfmT)$

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

(je to vůbec možné ?!?!?)

SPOJITÝ SIGNÁL:

není konečná energie $\Rightarrow$ není definována F.T. $\Rightarrow$ není F. spektrum

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

VÝKONOVÝ EXKURZ:

střední výkon periodického signálu:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x_a^2(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_a^2(t)dt = \frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} x_a^2(t)dt$$

neperiodický signál je takový periodický signál, jehož perioda $T_0 \to \infty$

střední výkon neperiodického signálu

$$P = \lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{2T_0}\int_{-T_0}^{T_0} x_a^2(t)dt = \lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{2T_0}.E$$

je-li E< ∞, pak P → 0 (nezajímavé);

E> ∞, pak P=lim ∞/ ∞ = K∈⟨0, ∞) !

= → ∞

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- spektrální hustota výkonu:

$$G_{xx}(f) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{S_{xx}(f)}{2T_0}$$

- Wiener-Khinchinovy vztahy:

$$G_{xx}(f) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau).\exp(-2\pi jf\tau).d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g_{xx}(\tau).\exp(-2\pi jf\tau).d\tau$$

kde

$$g_{xx}(\tau) = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x_a(t).x_a(t+\tau).dt$$

AKF náhodných stacionárních ergodických procesů

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- odhad pouze z konečného intervalu

$$\tilde{g}_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T_0} \int_{-T_0}^{T_0} x_a(t).x_a(t+\tau).dt$$

- odhad spektrální hustoty výkonu ze signálu v konečném intervalu

$$\tilde{G}_{xx}(f) = \ldots = \frac{1}{2T_0}.\left| \int_{-T_0}^{T_0} x_a(t).\exp(-2\pi jft).dt \right|^2$$

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

DISKRÉTNÍ SIGNÁL

- vzorkováním signálu $x_a(t)$ vzorkovací frekvencí $F > 2f_{max}$;
- výsledná posloupnost x_{nT} má N hodnot

$$(0 \leq n \leq N-1)$$

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- odhad spektrální hustoty výkonu z konečné posloupnosti (nepřímá metoda)

$$\tilde{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-N+1}^{N-1} \tilde{r}_{xx}(mT).\exp(-2\pi jfmT)$$

- odhady AK posloupnosti:

$$\tilde{r}_{xx1}(mT) = \frac{1}{N-|m|}.\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT).x(nT+mT), \quad m = 0,1,\ldots,N-1$$

$$\tilde{r}_{xx2}(mT) = \frac{1}{N}.\sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(nT).x(nT+mT), \quad m = 0,1,\ldots,N-1$$

NEPERIODICKÝ SIGNÁL S NEKONEČNOU ENERGIÍ

- ☑ periodogram (Schuster 1898) (přímá metoda)

$$\tilde{P}_{xx}(f) = \frac{1}{NT}\left| T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT).\exp(-2\pi jfnT \right|^2$$