SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

MU
IBA

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

V.
PARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA
pokračování

MA A ARMA MODELY

MA MODELY

- ☑ opakování

$$\gamma_{yy}(mT) = \begin{cases} 0 & m > q \\ \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_k b_{k+m} & 0 \le m \le q \\ \gamma_{yy}(-mT) & m < 0 \end{cases}$$

$$y_n = \sum_{m=0}^{q} b_m x_{n-m}$$

$$E\{x_n\} = 0 \qquad E\{x_{n+m} x_n\} = \begin{cases} \delta_x^2 & m = 0 \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

MA MODELY

$$B(z).B(z^{-1}) = D(z) = \sum_{m=-q}^{q} d_m z^{-m}$$

$$(b_0z^0+b_1z^1+\ldots+b_qz^q).(b_0z^0+b_1z^{-1}+\ldots+b_qz^{-q}) =$$

$$= b_0^2+b_0b_1z+\ldots+b_0b_qz^q+b_0b_1z^{-1}+b_1^2+b_2b_1z+\ldots+b_qb_1z^{q-1}+\ldots+$$

$$+b_0b_qz^{-q}+b_1b_qz^{-q+1}+b_2b_qz^{-q+2}+\ldots+b_q^2 =$$

$$= \underbrace{(b_0b_0+b_1b_1+\ldots+b_qb_q)}_{d_0}.z^0 + \underbrace{(b_0b_1+b_1b_2+\ldots+b_{q-1}b_q)}_{d_{-1}}.z^{-1} +$$

$$+\underbrace{(b_1b_0+b_2b_1+\ldots+b_qb_{q-1})}_{d_{-1}}.z^1 +\ldots+(\ldots).z^q$$

$$\Downarrow$$

$$d_m = \sum_{k=é}^{q-|m|} b_k b_{k+m} \quad \text{pro } |m| \le q$$

MA MODELY

Tedy

$$\gamma_{yy}(mT) = \begin{cases} 0 & |m| > q \\ \sigma_x^2 d_m & |m| \le q \end{cases}$$

metoda momentů

a výkonové spektrum

$$\Gamma_{yy}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^{q} \gamma_{yy}(mT).e^{-j2\pi fmT}$$

odhad spektra:

$$P_{yy}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^{q} r_{yy}(mT).e^{-j2\pi fmT}$$

!!! A TO JE KLASIKA !!!

MA MODELY

ALTERNATIVA:

stanovení $\{b_k\}$založené na aproximaci MA procesu AR procesem vysokého řádu,
tj. p » q

v tom případě platí, že B(z) = 1/A(z), resp. B(z).A(z)=1 a proto

$$\hat{a}_n + \sum_{k=1}^{q} b_k . \hat{a}_{n-k} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

MA MODELY

ALTERNATIVA:

protože p » q, můžeme odhad $\{b_k\}$ zpřesnit pomocí metody nejmenších čtverců

určíme kvadratickou chybu

$$e = \sum_{n=0}^{p} \left[\hat{a}_n + \sum_{k=0}^{q} b_k . \hat{a}_{n-k} \right]^2 - 1, \quad \hat{a}_0 = 1; \hat{a}_k = 0 \text{ pro } k < 0$$

a tu minimalizujeme výběrem parametrů $\{b_k\}$

$$\hat{\mathbf{b}} = -\mathbf{R}_{aa}^{-1} . \mathbf{r}_{aa}$$

kde

$$R_{aa}(|i-j|) = \sum_{n=0}^{p-|i-j|} \hat{a}_n . \hat{a}_{n+|i-j|}, \quad \text{pro } i, j = 1, 2, \ldots, q;$$

$$r_{aa}(i) = \sum_{n=0}^{p-i} \hat{a}_n . \hat{a}_{n+i}, \quad \text{pro } i = 1, 2, \ldots, q.$$

vymyslel to Durbin a ukázalo se, že je to přibližně odhad s maximální pravděpodobností, je-li proces normální

URČENÍ ŘÁDU MA MODELU

- ☑ pro vyjádření úzkých pásem je třeba hodně vysoký řád;
- ☑ intuitivně:

  hodnoty odhadu autokorelační funkce musí rychle klesat k nule, protože $\gamma_{yy}(mT)=0$ pro $|m|>q$

  test, zda $r_{yy}(mT)\rightarrow 0$ je založený na srovnávání $r_{yy}(qT)$ s rozptylem hodnot $r_{yy}(qT)$ pro $m<q$

URČENÍ ŘÁDU MA MODELU

- jinak:

  založeno na testu „bělosti" posloupnosti, která je výsledkem působení soustavy inverzní k odhadnutému MA modelu na analyzovanou posloupnost

- Akaikovo informační kritérium

$$AIC = \ln \sigma^2_{wq} + \frac{2q}{N}$$

ARMA MODELY

opět si stručně zopakujeme:

$$y(nT) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y((n-k)T) + \sum_{k=0}^{q} b_k x((n-k)T)$$

$$b_0 = 1 \text{ a } \gamma_{xx}(kT) = \begin{cases} \sigma_x^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{yy}(mT) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{yy}(mT - kT) & m > q \\ -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{yy}(mT - kT) + \sigma_x^2 \sum_{k=m}^{q} b_k h(kT - mT) & 0 \leq m \leq q \end{cases}$$

odhad výkonového spektra

$$\widehat{P}_{yy}^{ARMA}(f) = \frac{\sigma_x^2 T . \left| 1 + \sum_{k=1}^{q} b_k \exp(-j2\pi fkT) \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^{p} a_k \exp(-j2\pi fkT) \right|^2}$$

ARMA MODELY

ARMA(1,1):

$$h(kT) = (-a_1)^k.u(kT) + b_1(-a_1)^{k-1}u(k-1)$$ u(kT) je jednotkový skok

$$\gamma_{yy}(0) = -a_1\gamma_{yy}(-T) + \sigma_x^2(1 + b_1^2 - a_1b_1)$$

$$\gamma_{yy}(T) = -a_1\gamma_{yy}(0) + \sigma_x^2 b_1$$

$$\gamma_{yy}(mT) = -a_1\gamma_{yy}(mT - T), \quad m \geq 2$$

mnoho teoretických postupů bez praktického významu, protože:

- jsou výpočetně příliš náročné (maticové operace, iterační optimalizační postupy);
- iterační optimalizace nezaručuje konvergenci řešení nebo konvergenci ke skutečně optimálnímu řešení;

proto suboptimální postupy :

- používají metody nejmenších čtverců $\Rightarrow$ řešení soustavy lineárních rovnic;
- oddělený výpočet AR a MA parametrů

ARMA MODELY
METODA PRVNÍ

pro m>q je $\gamma_{yy}(mT) = f(a_k)$, resp. $f(\hat{a}_k)$

dosadíme γ_{yy} a řešíme p lineárních rovnic (pro modely vyšších řádů horší výsledky díky slabším odhadům $\gamma_{yy}(mT)$ pro větší m);

přeurčená soustava lineárních rovnic (pro m>q)

její řešení opět optimalizací metodou nejmenších čtverců

ARMA MODELY
METODA PRVNÍ

předpokládejme, že známe odhady autokorelační funkce až do zpoždění M > p+q

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(q) & r_{yy}(q) & \cdots & r_{yy}(q-p+1) \\ r_{yy}(q+1) & r_{yy}(q) & \cdots & r_{yy}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}(M-1) & r_{yy}(M-2) & \cdots & r_{yy}(M-p) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_p \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} r_{yy}(q+1) \\ r_{yy}(q+2) \\ \\ r_{yy}(M) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{yy}\mathbf{a} = -\mathbf{r}_{yy}$$

protože R_{yy} je rozměru (M-q) x p a M-q > p, lze použít metodu nejmenších □ □;

výsledkem minimalizace je $\hat{\mathbf{a}} = -(\mathbf{R}_{yy}^T . \mathbf{R}_{yy})^{-1} . \mathbf{R}_{yy}^T . \mathbf{r}_{yy}$

(může být použito i váhování k potlačení méně spolehlivých odhadů AK funkcí)

ARMA MODELY
METODA PRVNÍ

$$\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k . z^{-k}$$

- analyzovanou sekvenci vyfiltrujeme FIR filtrem $\hat{A}(z)$ a dostaneme

$$v(nT) = y(nT) + \sum_{k=1}^{p} \hat{a}_k . y(nT - kT), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1;$$

- kaskádní zapojení ARMA(p,q) [$H_{ARMA}(z)=B(z)/A(z)$] s AR(p) $H_{AR}(z) = \hat{A}(z)$ reprezentuje přibližně MA(q) proces s $H_{MA}(z)=B(z)$

ARMA MODELY
METODA PRVNÍ

z filtrované sekvence v(nT) pro $p \leq n \leq N-1$ je $r_{vv}(mT)$, odhad výkonového spektra potom je

$$\hat{P}_{yy}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^{q} r_{vv}(mT)\exp(-j2\pi fmT)$$

(opět můžeme „woknovat“ k potlačení méně spolehlivých odhadů autokorelačních funkcí nebo filtrace AR(q) oběma směry $\Rightarrow$ dvě různé posloupnosti autokorelační funkce)

$$\hat{P}_{yy}^{ARMA}(f) = \frac{P_{vv}^{MA}(f)}{\left|1 + \sum_{k=1}^{p} a_k \exp(-j2\pi fkT)\right|^2}$$

ARMA MODELY
METODA DRUHÁ

vstupní/výstupní identifikace metodou nejmenších □ □

opakování:

$$\gamma_{yy}(mT) = -\sum_{k=1}^{p} a_k \gamma_{yy}(mT-kT) + \sum_{k=m}^{q} b_k \gamma_{xy}(mT-kT)$$

nelinearita vztahu pro výpočet $\gamma_{yy}(mT)$ plyne z toho, že neznáme $\gamma_{yy}(mT\text{-}kT)$, protože neznáme x(nT)

$$y(nT) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y(nT-kT) + \sum_{k=0}^{q} b_k x(nT-kT)$$

ARMA MODELY
METODA DRUHÁ

$$y(nT) = -\sum_{k=1}^{p} a_k y(nT - kT) + \sum_{k=1}^{q} b_k x(nT - kT) + x(nT), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}.\boldsymbol{\theta} + \nu$$

$$\mathbf{y} = [y(0)\ y(T)\ \ldots\ y(NT\text{-}T)]^T$$

$$\nu = [x(0)\ x(T)\ \ldots\ x(NT\text{-}T)]^T$$

$$\boldsymbol{\theta} = [-a_1\ -a_2 \ldots -a_p\ b_1\ b_2 \ldots b_q\ ]^T$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} y_{-1} & y_{-2} & \cdots & y_{-p} & x_{-1} & x_{-2} & \cdots & x_{-q} \\ y_0 & y_{-1} & \cdots & y_{-p+1} & x_0 & x_{-1} & \cdots & x_{-q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-2} & y_{N-3} & \cdots & y_{N-p-1} & x_{N-2} & x_{N-3} & \cdots & x_{N-q-1} \end{bmatrix}$$

matice vstupních/výstupních dat o rozměru N x (p+q)

ARMA MODELY
METODA DRUHÁ

⇩

minimalizace nejmenšími □ □

⇩

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = (\mathbf{H}^T.\mathbf{H})^{-1}.\mathbf{H}^T.\mathbf{y}$$

počáteční podmínky y_{-p}, …, y_{-1}, x_{-q}, …, x_{-1} buď specifikovat nebo nulové

odhad hodnot vstupního šumového signálu z analyzované posloupnosti AR modelem vysokého řádu

ARMA MODELY
METODA TŘETÍ

(už tu částečně byla)

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)}, \quad \text{kde } C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$$

koeficienty $\{c_k\}$ se určí nějakým AR algoritmem a z nich $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$

$$\hat{C}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{M} \hat{c}_k z^{-k}, \quad M \geq p + q$$

je-li p>q, pak $\dfrac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} = \dfrac{1}{\hat{C}(z)},$

nebo v časové oblasti $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \hat{b}_k . \hat{c}_{n-k} = \hat{a}_n, \quad n = 1,2,\ldots; \hat{b}_0 = 1$

ARMA MODELY

METODA TŘETÍ

protože by mělo platit $a_n = 0$ pro $n>p$, je

$$\sum_{k=0}^{q} \widehat{b}_k . \widehat{c}_{n-k} = 0, \quad \text{pro } n = p+1, p+2, \ldots, p+q$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{c}_p & \widehat{c}_{p-1} & \cdots & \widehat{c}_{p+1-q} \\ \widehat{c}_{p+1} & \widehat{c}_p & \cdots & \widehat{c}_{p+2-q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{c}_{p+q-1} & \widehat{c}_{p+q-2} & \cdots & \widehat{c}_p \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \\ \vdots \\ \widehat{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{c}_{p+1} \\ \widehat{c}_{p+2} \\ \vdots \\ \widehat{c}_{p+q} \end{bmatrix}$$

pro určení $\{\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \ldots, \widehat{b}_q\}$ se spočítají $\{\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \ldots, \widehat{a}_p\}$ z

$$\sum_{k=0}^{q} \widehat{b}_k . \widehat{c}_{n-k} = \widehat{a}_n, \quad \text{pro } n = 1, 2, \ldots, p; \ \widehat{c}_0 = 1$$

ARMA MODELY
METODA TŘETÍ

co je maticově

$$.\begin{bmatrix} \frown{a}_1 \\ \frown{a}_2 \\ \vdots \\ \frown{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frown{c}_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frown{c}_2 & \frown{c}_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frown{c}_p & \frown{c}_{p-1} & \frown{c}_{p-2} & \cdots & \frown{c}_{p-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frown{b}_1 \\ \vdots \\ \frown{b}_q \end{bmatrix}$$

URČENÍ ŘÁDŮ ARMA MODELU

$$AIC(p,q) = \ln \hat{\sigma}_{wpq} + \frac{2(p+q)}{N},$$

$\hat{\sigma}_{wpq}$ je odhad rozptylu vstupní chybové posloupnosti

dodatečné kritérium:

posouzení bělosti posloupnosti po inverzní filtraci analyzované posloupnosti navrženou ARMA soustavou

odhad p

$$R'_{yy} = \begin{bmatrix} r_{yy}(q) & r_{yy}(q-1) & \cdots & r_{yy}(q-p+1) \\ r_{yy}(q+1) & r_{yy}(q) & \cdots & r_{yy}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}(q+p-1) & r_{yy}(q+p-2) & \cdots & r_{yy}(q) \end{bmatrix}$$

rozšířené modifikované Y.-W. rovnice

$\det(R'_{yy})=0$, pokud je rozměr modelu větší než řád analyzovaného procesu