Derivace

Derivace funkce f podle proměnné x se zapisuje jako

$$\frac{df(x)}{dx}.$$

Používají se také označení $\frac{df}{dx}$, $f'(x)$, f', $\dot{f}$ (poslední z nich se používá ve fyzice pro derivaci podle času).

Derivace funkce je rovněž funkcí. Lze ji tedy vyčíslit v určitém bodě x_0 (pro určitou hodnotu argumentu).

Pro derivace elementárních funkcí platí následující vztahy:

1. Derivace konstantní funkce je 0.

$$\frac{dC}{dx} \equiv C' = 0 \ (f(x) = C \text{ kde } C \text{ je konstanta}).$$

2. Derivace polynomiální funkce je polynomiální funkce s nižším stupněm.

$$\frac{dx^n}{dx} \equiv (x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

   Příklady:

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x \ (n = 2).$$

$$f(x) = x^5, \ f'(x) = 5x^4 \ (n = 5).$$

3. Derivace funkce sinus je kosinus.

$$[\sin(ax)]' = a \cdot \cos(ax), \text{ kde } a \in \mathbb{R} \text{ je konstanta.}$$

4. Derivace funkce kosinus je minus sinus.

$$[\cos(ax)]' = -a \cdot \sin(ax), \text{ kde } a \in \mathbb{R} \text{ je konstanta.}$$

5. Derivace exponenciální funkce je exponenciální funkce.

$$[\exp(ax)]' = a \cdot \exp(ax) \ (= a \cdot e^{ax}), \text{ kde } a \in \mathbb{R} \text{ je konstanta.}$$

Dále platí následující obecná pravidla:

1. Derivace součtu dvou funkcí f, g je součet derivací. Derivace rozdílu dvou funkcí je rozdíl derivací.

$$(f + g)' = f' + g',$$
$$(f - g)' = f' - g'$$

   Například

$$(x^2 + x^3)' = 2x + 3x^2$$

2. Derivace funkce f násobené konstantou a je derivace funkce násobená konstantou

$$[af(x)]' = af'(x), \text{ kde } a \in \mathbb{R} \text{ jekonstanta.}$$

   Například

$$(5x^3)' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$$

3. Pro derivaci součinu dvou funkcí f, g platí

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Například

$$(x \cdot \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = \sin x + x \cdot \cos x.$$

Některé fyzikální veličiny jsou derivací jiných. Zejména rychlost (velikost rychlosti) tělesa je derivací dráhy uražené tělesem podle času

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

a složky vektoru rychlosti tělesa jsou derivací souřadnic tělesa podle času

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \;\; v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \;\; v_z(t) = \frac{dz(t)}{dt}.$$

Podobně zrychlení je derivací rychlosti podle času.

Příklad: Pro souřadnice pohybujícího se tělesa platí

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos(\alpha) \cdot t, \\ y(t) &= y_0 + v_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2. \end{aligned}$$

Určete okamžitou rychlost tělesa a velikost okamžité rychlosti.

$$\begin{aligned} v_x(t) &= [x(t)]' = v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_y(t) &= [y(t)]' = v_0 \cdot \sin(\alpha) - g \cdot t \\ v(t) &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot g \cdot t + (g \cdot t)^2}. \end{aligned}$$

Dále se derivace využívá pro hledání extrémů (minim a maxim) funkce. Má-li funkce f v bodě x_0 maximum nebo minimum a existuje-li v tomto bodě derivace, pak je tato derivace nulová, $f'(x_0) = 0$.

Příklad: V jakém bodě má funkce $f(x) = x^2 \exp(-ax)$ maximum?

Spočítáme derivaci.

$$\begin{aligned} f'(x) &= [x^2 \exp(-ax)]' = (x^2)' \exp(-ax) + x^2 [\exp(-ax)]' = \\ &= 2x \exp(-ax) + x^2(-a) \exp(-ax) = (2x - ax^2) \exp(-ax). \end{aligned}$$

(druhá rovnost je podle pravidla o součinu). Z podmínky pro maximum $f'(x) = 0$ dostaneme $x = \frac{2}{a}$. Funkce má tedy maximum pro $x = \frac{2}{a}$.

Další příklady derivací:

1. $$[7x^4 + 3\cos(2x)]' = 7 \cdot (4x^3) + 3 \cdot [-2\sin(2x)] = 28x^3 - 6\sin(2x).$$

2. $$(x^2 + 2x + 1)' = 2x + 2 + 0 = 2x + 2.$$

3. $(x^2)'$ podle pravidla o součinu:

$$(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x \cdot x' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$