

**Optika nabitých částic**  
**Poznámky k přednášce – část 1**  
**Michal Lenc**

## **1. Henri Poincaré: Comments on Birkeland's experiment**

### **1.1 Henri Poincaré: Comments on Birkeland's experiment**

(Translation of the paper H.Poincaré: Remarques sur une expérience de M.Birkeland from Compt. Rend. (Paris) 123 (1896), 530-533.)

Mr. Birkeland, submitting a Crookes tube to the action of a very strong magnet, has observed certain new phenomena, which he has tried to attribute to a kind of attraction or repulsion that the magnetic poles exercised on the cathode rays. (Archives des Sciences et Naturelles de Geneve (4) 1:497-512, 1896). If a parallel beam of cathode rays is submitted to the action of a rod magnet whose axis is parallel to the rays' direction, this beam becomes convergent and if the distance to the magnet is right, it is concentrated to a perfect focus and can melt the glass at that point in a short time.

What gives this observation its paradoxical character is the fact that these phenomena do not change when the poles of the magnet are reversed.

However, if one thinks about it a little, one sees that everything can be explained without having to introduce any new hypothesis. We take the  $z$ -axis parallel to the beam and through the pole of the magnet; let us consider a cathode ray moving in the positive  $z$  direction; I suppose it situated in the  $xz$  plane at positive  $x$ ; the magnetic field will then have two components, one component  $Z$  parallel to the  $z$ -axis and pointing in the positive  $z$ -direction; this component has at first no effect; the other component  $X$  is parallel to the  $x$ -axis and pointing in the negative  $x$ -direction; this field component produces a deflection of the ray towards positive  $y$ ; the ray which is thus deflected, now has a component  $\eta$ , parallel to the  $y$ -axis. The component  $Z$  then acts on this component  $\eta$  and produces a deflection of the ray in the negative  $x$  direction; from which it follows that the beam becomes convergent.

If one reverses the poles of the magnet the component  $X$  and as a consequence the component  $\eta$  change signs; but, since the component  $Z$  has also changed sign, the ray is always deflected towards negative  $x$  and the beam stays convergent. If, on the contrary, one considers a beam that moves away from the magnet, the same reasoning proves that, under the influence of the same causes, it becomes divergent, which is confirmed by the experiments of Mr. Birkeland.

A more thorough discussion is necessary. For this we write down the equations of the cathode ray, comparing it to a rapidly moving, electrically charged particle; if the hypothesis of Crookes is not true, it certainly looks as if everything happens as if it were true.

Let us suppose there is a single magnetic pole, which we position in the origin while we keep the same z-axis. The equations can be written in the form

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\lambda}{r^3} \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) , \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\lambda}{r^3} \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) , \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\lambda}{r^3} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) , \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 ,\end{aligned}\tag{1.1}$$

where  $\lambda$  is a constant which depends on the strength of the magnet and on the nature of the cathode ray (that means, under the hypothesis of Crookes, on the mass of the moving particle and on its electric charge).

One easily finds

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = C ,\tag{1.2}$$

$$r^2 = Ct^2 + 2Bt + A ,\tag{1.3}$$

in which  $A, B$  and  $C$  are three integration constants.

Then one finds

$$\begin{aligned}y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= -\frac{\lambda x}{r} + a , \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= -\frac{\lambda y}{r} + b , \\ x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= -\frac{\lambda z}{r} + c ,\end{aligned}\tag{1.4}$$

where  $a, b$  and  $c$  are three new integration constants which are in a simple way related to the three previous constants.

One derives from there

$$ax + by + cz = \lambda r ,\tag{1.5}$$

which proves that the ray stays on a cone.

Since the acceleration is perpendicular to the velocity and to the generatrix of this cone, it is normal to the cone, from which one can conclude that the ray follows a geodesic line on this cone.

Coming from the cathode, far from the influence of the magnet, the ray is practically straight and parallel to the z-axis, so it has a straight asymptote parallel to the z-axis.

Let

$$x = x_0 \quad , \quad y = y_0 \quad (1.6)$$

be the equations of that asymptote and  $V$  the velocity of the ray. One finds

$$C = V^2 \quad , \quad a = y_0 V \quad , \quad b = -x_0 V \quad , \quad c = \lambda \quad . \quad (1.7)$$

So the z-axis is one of the generatrices of the cone and the half angle of the top of the cone is given by

$$\sin \omega = \frac{V}{\lambda} (x_0^2 + y_0^2)^{1/2} \quad . \quad (1.8)$$

The closest approach of the cathode ray to the origin is at a distance equal to

$$(x_0^2 + y_0^2)^{1/2} \quad . \quad (1.9)$$

This stated, note that the cathode ray crosses the z-axis at points whose distance to the origin is

$$\frac{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}}{\sin \varphi} \quad , \quad \frac{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}}{\sin 2 \varphi} \quad , \quad \frac{(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}}{\sin 3 \varphi} \quad \dots \quad (1.10)$$

The angle  $n$  is the development of the conic surface, that is

$$\varphi = 2 \pi \sin \omega \quad . \quad (1.11)$$

Let us note, however, that the crossing does not lie in a practical region if

$$\varphi > \pi \quad , \quad \sin \omega > \frac{1}{2} \quad . \quad (1.12)$$

Also, the only effective crossings are those which correspond to multiples of  $\varphi$  much smaller than  $\pi$ .

Where does this bring us? The cathode has the form of a circular disc of radius  $\rho$ . Suppose one adjusts the distance from the magnet to the tube in such a way that one of the rays emitted from the edge of the disc (so that  $x_0^2 + y_0^2 = \rho^2$ ) crosses the z-axis exactly at the point where this axis goes through the wall of the tube. All the other rays from the edge of the disc must, for reasons of symmetry, then go through the same point; the central ray which is straight and follows the z-axis will also pass here; intermediate rays will be bent less strongly, so that all the rays will seem to concentrate as in the focus of a lens.

Every system of rays can give several foci corresponding to the different multiples of  $n$  that are much smaller than  $\pi$ . In addition there are, as Mr. Birkeland has shown, several kinds of cathode rays, corresponding to several values of  $\lambda$ . Mr. Birkeland has actually noted several foci which

seemed to be due to the second of these causes.

How to deal with those cathode rays for which  $\lambda$  has too large a value that they can form a focus? One can at first think that the distance  $r$ , after having decreased to a certain minimum increases again and that it are these rays which produce the luminous rings observed by Mr. Birkeland on the side wall of the tube. But a difficulty arises. According to the theory, for the rays emitted perpendicular to the plane of the cathode disc, the minimum of  $r$  is  $(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$ ; luminous side rings should then not be formed unless the distance of the magnetic pole to the tube is much smaller than the radius of the disc. Is the theory incomplete, because we have supposed a single magnetic pole; or are the luminous rings rather due to rays emitted obliquely from the edge of the disc and corresponding to a large value of  $\lambda$ .

## 1.2 Some remarks on Poincaré's paper

Poincaré's explanation of the focusing action of the monopole field is almost identical to that by which we explain the probe forming mechanism in a magnetic immersion lens to our students today. Of course this is not as general as Busch's derivation of the lens action of any rotational symmetric magnetic field, but Poincaré uses the word "lentille" or lens and it was to take another 30 years before people really started to talk about "electron lenses".

In the mathematics there is, in fact, one slight error: the expression given in equation (1.8) is that for  $\tan \omega$ ; the correct expression for  $\sin \omega$  is

$$\sin \omega = \frac{(a^2 + b^2 + c^2 - \lambda^2)^{1/2}}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \quad (1.13)$$

For the particular case given by Poincaré ( $a = V y_0$ ,  $b = -V x_0$ ,  $c = \lambda$ ) it is then

$$\sin \omega = \frac{V(x_0^2 + y_0^2)^{1/2}}{(\lambda^2 + V^2(x_0^2 + y_0^2))^{1/2}} \quad (1.14)$$

For the derivation of the z-positions where the electron crosses the axis, Poincaré makes use of the properties of geodesic lines on a conical surface, a subject which was very familiar to him. Here is the derivation of that equation (1.8): The square of the line element in spherical coordinates is  $(dl)^2 = (dr)^2 + (r d\vartheta)^2 + (r \sin\vartheta d\psi)^2$ , on the conical surface  $\vartheta = \omega$ ,  $d\vartheta = 0$ . The geodesic line is the line with minimum length

$$l = \int [(dr)^2 + (r \sin \omega d\psi)^2]^{1/2} \quad (1.15)$$

The equation which follows from  $\delta l=0$  is

$$r \frac{d^2 r}{d\psi^2} - 2 \left( \frac{dr}{d\psi} \right)^2 - r^2 \sin^2 \omega = 0 \quad . \quad (1.16)$$

Its solution which starts at  $\psi=0, r=\infty$  is

$$r = \frac{r_{\min}}{\sin(\psi \sin \omega)} \quad . \quad (1.17)$$

In the particular case studied here  $r_{\min} = (x_0^2 + y_0^2)^{1/2}$ ,  $\sin \omega$  is given by eq. (1.14) and the electrons cross the axis at points for which  $\psi = n\pi$ .

Finally we wish to comment, that we now know what  $\lambda$  stands for

$$\lambda = -\frac{e g}{m} \quad , \quad (1.18)$$

$g$  being the monopole charge. The magnitude of the monopole field  $B(r)$  is then expressed as

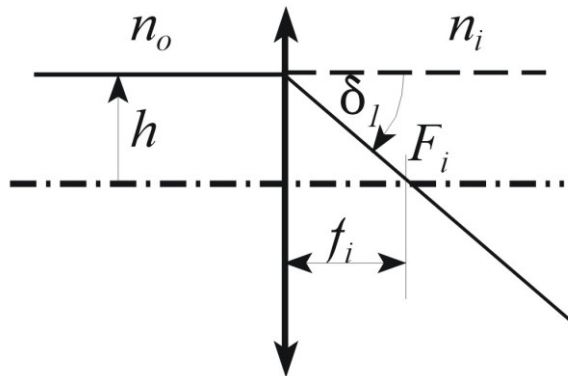
$$B(r) = \frac{g}{r^2} \quad . \quad (1.19)$$

## 2. Elementární odvození fokusačních vlastností rotačně symetrických polí

### 2.1 Fokuse tenkou čočkou ve světelné optice

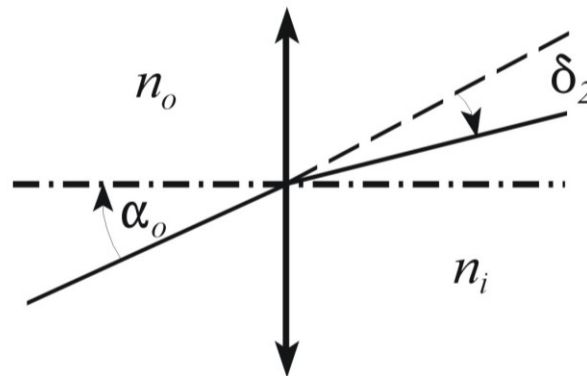
Paprsek předmětového prostoru rovnoběžný s optickou osou se láme v obrazovém prostoru do obrazového ohniska. Pro paraxiální paprsky je úhel odklonu

$$\delta_1 = \frac{h}{f_i} \quad . \quad (2.1)$$



Paprsek jdoucí středem čočky se láme podle Snellova zákona. Pro malé úhly paprsků s optickou osou můžeme úhel odklonu zapsat jako

$$\delta_2 = \left(1 - \frac{n_o}{n_i}\right) \alpha_o \quad . \quad (2.2)$$



Celkový úhel odklonu je tedy

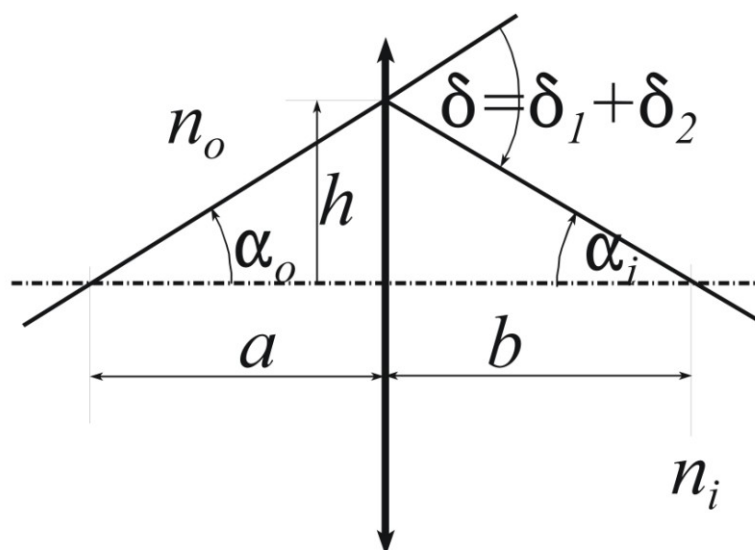
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \alpha_o + \alpha_i \quad . \quad (2.3)$$

Po dosazení  $\alpha_o = h/a$ ,  $\alpha_i = h/b$  dostáváme čočkovou rovnici

$$\frac{n_o}{a} + \frac{n_i}{b} = \frac{n_i}{f_i} = \frac{n_o}{f_o} \quad , \quad (2.4)$$

kde jsme definovali předmětovou ohniskovou vzdálenost vztahem

$$f_o = \frac{n_o}{n_i} f_i \quad . \quad (2.5)$$



## 2.2 Potřebné výrazy ve válcových souřadnicích

Vztah mezi kartézskou a válcovou soustavou souřadnic vyjádříme pomocí transformace vektorů bází

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\varphi \vec{e}_r + \sin\varphi \vec{e}_\varphi & \vec{e}_y &= \cos\varphi \vec{e}_\varphi - \sin\varphi \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y & \vec{e}_z &= \sin\varphi \vec{e}_r + \cos\varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z &= \vec{e}_z & \vec{e}_z &= \vec{e}_z \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pokud uvažujeme závislost souřadnic na parametru  $t$ , musíme vzít v úvahu vztahy

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \frac{a\varphi}{dt} (-\sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y) = \frac{a\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi, \\ \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} &= \frac{a\varphi}{dt} (-\cos\varphi \vec{e}_x - \sin\varphi \vec{e}_y) = -\frac{a\varphi}{dt} \vec{e}_r, \\ \frac{d\vec{e}_z}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Máme pak ve válcové soustavě

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r + z \vec{e}_z, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z, \\ \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \left( \frac{a}{dt^2} r - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left( r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pro složky rychlosti dostáváme tedy ve válcových souřadnicích vztahy

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (2.9)$$

a pro složky zrychlení

$$\begin{aligned} a_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\varphi^2}{r}, \\ a_\varphi &= r \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} \frac{d(rv_\varphi)}{dt}, \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pro úplnost uvedme tvar diferenciálních operátorů ve válcových souřadnicích

$$\begin{aligned}
\text{grad } f &= \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z \quad , \\
\text{div } \vec{F} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r F_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad , \\
\text{rot } \vec{F} &= \vec{\nabla} \times \vec{F} = \left( \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi + \left( \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial r} \right) \vec{e}_z \quad , \\
\text{div}(\text{grad } f) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad .
\end{aligned} \tag{2.11}$$

### 2.3 Rotačně souměrné statické pole

Rotačně souměrné statické pole popisujeme obvykle pomocí vhodně kalibrovaného potenciálu jako

$$\vec{E} = -\text{grad}\Phi(r, z) \quad , \quad \vec{B} = \text{rot}A(r, z) \quad , \quad \vec{A}(r, z) = A(r, z)\vec{e}_\varphi \quad , \tag{2.12}$$

přítom zdroje jsou

$$\rho = \rho(r, z) \quad , \quad \vec{j} = j(r, z)\vec{e}_\varphi \quad . \tag{2.13}$$

Připomeňme, že Maxwellovy rovnice

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad , \quad \text{rot}\vec{E} = 0 \tag{2.14}$$

jsou díky volbě potenciálu splněny identicky. Zbývající dvě Maxwellovy rovnice

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad , \quad \text{rot}\vec{H} = \vec{j} \quad . \tag{2.15}$$

mají tvar

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \varepsilon(r, z) \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varepsilon(r, z) \frac{\partial \Phi(r, z)}{\partial z} \right) &= -\rho(r, z) \quad , \\
\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{\mu(r, z)r} \frac{\partial (r A(r, z))}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mu(r, z)} \frac{\partial A}{\partial z} \right) &= -j(r, z) \quad .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

### 2.4 Fokuse tenkou elektrostatickou čočkou

Pro rotačně souměrné pole můžeme z Gaussova zákona

$$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{2.17}$$

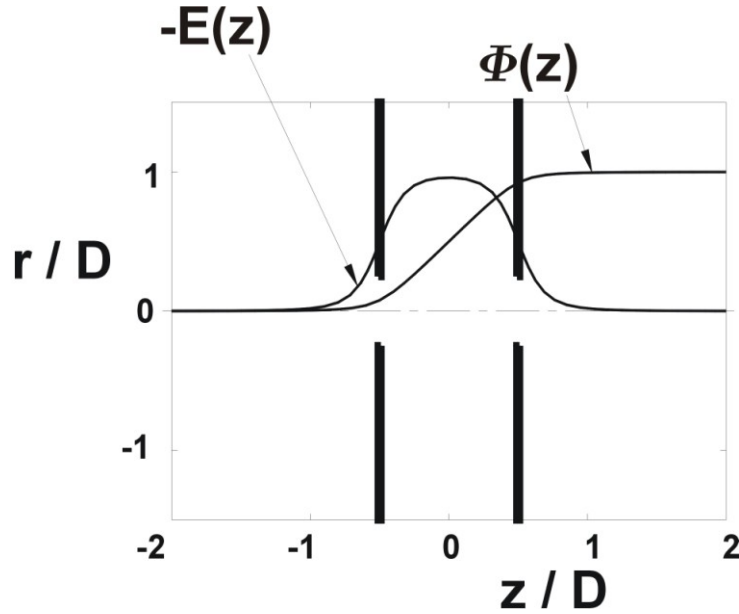
v malém okolí optické osy (osa  $z$ ) psát

$$E_z(r, z) \approx E(z) \quad , \quad E_r(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{dE(z)}{dz} \quad . \tag{2.18}$$



Názorně vidíme význam (2.18), integrujeme-li tok po malém válečku s osou  $z$  a poloměrem podstavy  $R$  a délkou  $L$

$$\begin{aligned} \square \quad & \left[ -\int_0^R E_z(r, -L/2) r dr + R \int_{-L/2}^{L/2} E_r(R, z) dz + \int_0^R E_z(r, L/2) r dr \right] = \\ & 2\pi \left[ -\frac{R^2}{2} E(-L/2) - \frac{R^2}{2} (E(L/2) - E(-L/2)) + \frac{R^2}{2} E(L/2) \right] = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$



Podle (2.10) a (2.18) můžeme pohybové rovnice

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \mathcal{B}) \quad (2.20)$$

psát jako

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\phi^2}{r} = -\frac{e}{2m} r \frac{dE(z)}{dz}, \quad \frac{d(rv_\phi)}{dt} = 0, \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{e}{m} E(z) \quad . \quad (2.21)$$

Před čočkou elektron nerotuje, je tedy  $v_\phi(-\infty) = 0$ . Vzhledem k malým úhlům, které svírají rychlosti s osou  $z$  (paraxiální přiblížení) můžeme také psát  $v_z \approx v$ . Rovnice (2.21) pak přejdou na

$$\frac{dv_r}{dz} = -\frac{e}{2mv} r \frac{dE(z)}{dz}, \quad v_\phi = 0, \quad v \frac{dv}{dz} = \frac{e}{m} E(z) \quad . \quad (2.22)$$

Průběh pole zaměníme krabicovým (top-hat) modelem

$$\begin{aligned} E(z) &= -\frac{\Phi_i - \Phi_o}{L} \left[ \Theta\left(z + \frac{L}{2}\right) - \Theta\left(z - \frac{L}{2}\right) \right], \\ \frac{dE(z)}{dz} &= -\frac{\Phi_i - \Phi_o}{L} \left[ \delta\left(z + \frac{L}{2}\right) - \delta\left(z - \frac{L}{2}\right) \right] \quad . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Fokusace se děje ve třech základních krocích:

(i) Intenzita pole se na malé vzdálenosti prudce změní  $0 \rightarrow (\Phi_o - \Phi_i)/L$ , zatímco potenciál zůstává přibližně na hodnotě  $\Phi_o$ . To vede ke změně radiální rychlosti, zatímco celková rychlost není příliš ovlivněna

$$\Delta_1 v_r \approx -\frac{e}{2m v_o} \frac{\Phi_o - \Phi_i}{L} r \quad , \quad \Delta_1 v^2 \approx 0 \quad . \quad (2.24)$$

(ii) Intenzita je konstantní a má směr osy  $z$ , mění se kinetická energie tak, aby se celková energie zachovávala

$$\Delta_2 v_r \approx 0 \quad , \quad \frac{1}{2} \Delta_2 v^2 = \frac{1}{2} (v_i^2 - v_o^2) \approx \frac{e}{m} (\Phi_o - \Phi_i) \quad . \quad (2.25)$$

(iii) Intenzita pole se na malé vzdálenosti prudce změní  $(\Phi_o - \Phi_i)/L \rightarrow 0$ , zatímco potenciál zůstává přibližně na hodnotě  $\Phi_i$ . To vede ke změně radiální rychlosti, zatímco celková rychlost není příliš ovlivněna

$$\Delta_3 v_r \approx \frac{e}{2m v_i} \frac{\Phi_o - \Phi_i}{L} r \quad , \quad \Delta_3 v^2 \approx 0 \quad . \quad (2.26)$$

Změnu úhlu s optickou osou porovnáme s výrazem pro ohniskovou délku tenké čočky

$$\delta = -\frac{\Delta_1 v_r + \Delta_3 v_r}{v_i} = \frac{e}{2m v_i} \frac{\Phi_o - \Phi_i}{L} \left( \frac{1}{v_o} - \frac{1}{v_i} \right) r = \frac{r}{f_i} \quad . \quad (2.27)$$

S využitím (2.25) dostáváme pro ohniskovou délku

$$f_i = \frac{4v_i^2 v_o}{(v_i - v_o)^2 (v_i + v_o)} L \quad , \quad f_o = \frac{4v_o^2 v_i}{(v_i - v_o)^2 (v_i + v_o)} L \quad . \quad (2.28)$$

Při odvození jsme předpokládali, že čočka je tenká, tj. že při průchodu polem čočky se příliš nezmění radiální souřadnice. Přibližnou podmínkou platnosti tohoto předpokladu je

$$\left| \frac{\Delta_1 v_r \Delta t}{r} \right| \approx \left| \frac{e(\Phi_o - \Phi_i)}{m v_o (v_o + v_i)} \right| \approx \frac{1}{2} \frac{|v_o - v_i|}{v_o} \ll 1 \quad (2.29)$$

Zavedeme-li typickou délku

$$R = \frac{m v_o v_i L}{|e(\Phi_o - \Phi_i)|} = \frac{m v_o v_i}{|eE|} \quad , \quad (2.30)$$

můžeme (2.28) a (2.30) zapsat jako

$$f_i = \frac{v_o + v_i}{v_o} \frac{R^2}{L} \quad , \quad f_o = \frac{v_o + v_i}{v_i} \frac{R^2}{L} \quad , \quad \frac{v_i}{v_o + v_i} \frac{L}{R} \ll 1 \quad (2.31)$$

## 2.5 Fokusace tenkou magnetickou čočkou

Obdobně jako pro elektrostatickou čočku můžeme v malém okolí optické osy psát

$$B_z(r, z) \approx B(z) \quad , \quad B_r(r, z) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB(z)}{dz} \quad . \quad (2.32)$$

Vektorový součin potřebný pro přibližné vyjádření Lorentzovy síly je

$$\vec{v} \times \mathbf{D} = v_\varphi D_z \vec{e}_r + (v_z D_r - v_r D_z) \vec{e}_\varphi - v_\varphi D_r \vec{e}_z \approx v_\varphi D(z) \vec{e}_r - \frac{1}{2r} \frac{d(r^2 v_\varphi)}{dt} \vec{e}_\varphi \quad . \quad (2.33)$$

Pohybové rovnice můžeme tedy psát jako

$$\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{e}{m} v_\varphi B(z) \quad , \quad \frac{d(r v_\varphi)}{dt} = -\frac{e}{2m} \frac{d(r^2 B(z))}{dt} \quad , \quad \frac{dv_z}{dt} = 0 \quad . \quad (2.34)$$

Před čočkou elektron nerotuje, je tedy  $v_\varphi(-\infty) = 0$ . Vzhledem k malým úhlům, které svírají rychlosti s osou  $z$  (paraxiální přiblížení) můžeme také psát  $v_z \approx v$ . Dvě poslední rovnice (2.34) pak přejdou na

$$v_\varphi = -\frac{e}{2m} B(z) r \quad , \quad v_z = v \quad . \quad (2.35)$$

Dosazením z (2.35) do první rovnice (2.34) dostáváme

$$\frac{dv_r}{dz} = -\left[ \frac{e B(z)}{2m} \right]^2 \frac{r}{v} \quad . \quad (2.36)$$

Průběh pole opět zaměníme krabicovým (top-hat) modelem

$$B(z) = \mu_0 \frac{NI}{L} \left[ \Theta\left(z + \frac{L}{2}\right) - \Theta\left(z - \frac{L}{2}\right) \right] \quad . \quad (2.37)$$

Fokusace se děje ve třech základních krocích:

(i) Indukce pole se na malé vzdálenosti prudce změní  $0 \rightarrow \mu_0 NI/L$ . To vede k získání azimutální složky rychlosti, zatímco radiální složka není příliš ovlivněna

$$\Delta_1 v_\varphi = -\frac{e \mu_0 NI}{2m L} r \quad , \quad \Delta_1 v_r = 0 \quad . \quad (2.38)$$

(ii) Indukce i azimutální složka rychlosti jsou konstantní, radiální složka získává přírůstek

$$\Delta_2 v_\varphi = 0 \quad , \quad \Delta_2 v_r = -\left[ \frac{e \mu_0 NI}{2m} \right]^2 \frac{r}{vL} \quad . \quad (2.39)$$

(iii) Indukce pole se na malé vzdálenosti prudce změní  $\mu_0 NI/L \rightarrow 0$ . To vede ke ztrátě azimutální složky rychlosti, která bude opět rovna nule, zatímco radiální složka není příliš ovlivněna

$$\Delta_3 v_\phi = \frac{e \mu_0 N I}{2 m L} r \quad , \quad \Delta_3 v_r = 0 \quad . \quad (2.40)$$

Změnu úhlu s optickou osou porovnáme s výrazem pro ohniskovou dálku tenké čočky

$$\delta = -\frac{\Delta_2 v_r}{v} = -\left[ \frac{e \mu_0 N I}{2 m v} \right]^2 \frac{r}{L} = \frac{r}{f} \quad . \quad (2.41)$$

Pro ohniskovou dálku tak dostáváme výraz

$$f = \left[ \frac{2 m v}{e \mu_0 N I} \right]^2 L \quad . \quad (2.42)$$

Při odvození jsme předpokládali, že čočka je tenká, tj. že při průchodu polem čočky se příliš nezmění radiální souřadnice. Přibližnou podmínkou platnosti tohoto předpokladu je

$$\left| \frac{\Delta_2 v_r \Delta t}{r} \right| \approx \left[ \frac{e \mu_0 N I}{2 m v} \right]^2 \square \quad (2.43)$$

Zavedeme-li typickou délku (v tomto případě poloměr kruhové trajektorie v homogenním poli)

$$R = \frac{m v}{e B} = \frac{m v}{e \mu_0 N I} L \quad , \quad (2.44)$$

můžeme (2.42) a (2.43) zapsat jako

$$f = \frac{4 R^2}{L} \quad , \quad \left( \frac{L}{2 R} \right)^2 = \frac{L}{f} \square \quad (2.45)$$

### 3. Elementární odvození vychýlení elektronu homogenním polem

#### 3.1 Relativistické pohybové rovnice

Lagrangián je

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t) = -m c \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} + e \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) - e \Psi(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

a hamiltonián

$$H(\vec{r}, \vec{r}, t) = \vec{r} \cdot \vec{v} - L \quad , \quad \vec{r} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m \vec{v}}{\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2}} + e \vec{A}(\vec{r}, t) \quad , \quad (3.2)$$

$$H(\vec{r}, \vec{r}, t) = \left( (\vec{r} - e \vec{A}(\vec{r}, t)) \cdot c + m c^2 \right)^{1/2} + e \Psi(\vec{r}, t) \quad .$$

V těchto výrazech je  $\vec{P}$  zobecněný impuls a  $\gamma$  je standardní výraz pro Lorentzův faktor

$$\gamma = \frac{c}{(c^2 - v^2)^{1/2}} \quad (3.3)$$

Mechanický impuls je

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v} - eA(\vec{r}, t) \quad (3.4)$$

V kursu Landaua a Lifšice je výraz

$$T = (\vec{p} \cdot \vec{c} + m c^2) = \pi(\vec{r}, t) - e\Phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (3.5)$$

nazýván kinetickou energií, i když je v něm obsažena i energie klidová. Hamiltonovy rovnice jsou

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} c}{(\vec{p} \cdot \vec{c} + m c^2)^{1/2}} \quad (3.6)$$

a

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = \frac{c^2}{2(\vec{P} - eA(\vec{r}, t))} \frac{\partial(\vec{P} - eA(\vec{r}, t))}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \quad (3.7)$$

S využitím vztahů

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{a\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{r}} \quad (3.8)$$

upravíme (3.7) na

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \left[ \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial A(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \right] \frac{\vec{c}}{(\vec{p} \cdot \vec{c} + m c^2)^{1/2}} + \frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} \quad (3.9)$$

Zavedení vektoru intenzity elektrického pole a vektoru indukce magnetického pole

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \Phi(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} - \frac{\partial A(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (3.10)$$

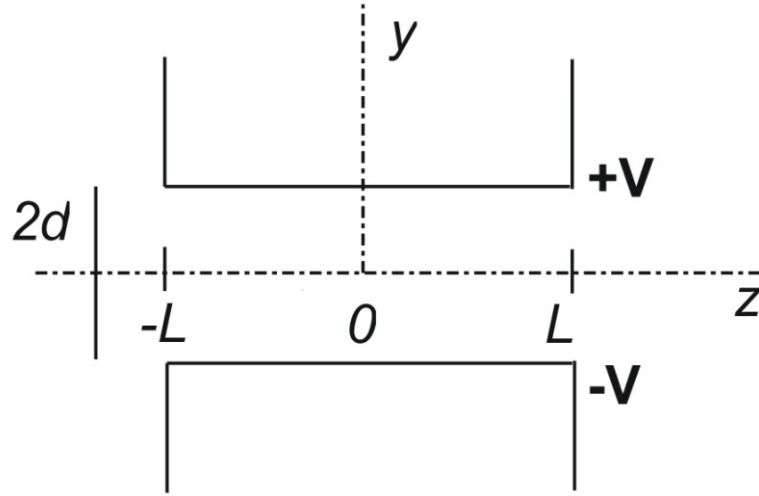
vede pak ke známému tvaru Newtonova zákona s Lorentzovou silou

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right], \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{T}, \quad T = (\vec{p} \cdot \vec{c} + m c^2)^{1/2} \quad (3.11)$$

### 3.2 Vychýlení elektronu homogenním elektrostatickým polem

Podle obrázku uvažujme pohyb elektronu v rovině  $y-z$  s počátečními podmínkami

$$y(0)=0 \quad , \quad p_y(0)=0 \quad , \quad z(0)=-L \quad , \quad p_z(0)=p_0 \quad . \quad (3.12)$$



Pohybové rovnice jsou

$$\frac{dp_y}{dt} = eE = e\frac{V}{d} \quad , \quad \frac{dp_z}{dt} = 0 \quad (3.13)$$

a po integraci s uvážením (3.12)

$$p_y = eEt \quad , \quad p_z = p_0 \quad \Rightarrow \quad T = \left[ (ecEt)^2 + p_0^2 c^2 + m^2 c^4 \right]^{1/2} = \left[ T_0^2 + (ecEt)^2 \right]^{1/2} \quad . \quad (3.14)$$

Podle (3.11)

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{eEc^2 t}{\left[ T_0^2 + (ecE)^2 t^2 \right]^{1/2}} \quad , \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \frac{p_0 c^2}{\left[ T_0^2 + (ecE)^2 t^2 \right]^{1/2}} \quad (3.15)$$

a po integraci

$$y = \frac{\left[ T_0^2 + (ecE)^2 t^2 \right]^{1/2} - T_0}{eE} \quad , \quad z = -L + \frac{p_0 c}{eE} \operatorname{arcsinh} \frac{ecEt}{T_0} \quad . \quad (3.16)$$

Z druhého vztahu vyjádříme

$$ecEt = T_0 \sinh \frac{eE(z+L)}{p_0 c} \quad , \quad \left[ T_0^2 + (ecE)^2 t^2 \right]^{1/2} = T_0 \cosh \frac{eE(z+L)}{p_0 c} \quad . \quad (3.17)$$

Rovnice trajektorie a úhel vychýlení jsou tedy

$$y = \frac{T_0}{eE} \left[ \cosh \frac{eE(z+L)}{p_0 c} - 1 \right] \quad , \quad \theta = \frac{v_y}{v_z} = \frac{T_0}{p_0 c} \sinh \frac{eE(z+L)}{p_0 c} \quad . \quad (3.18)$$

V nerelativistické aproximaci ponecháme jen první členy rozvoje hyperbolických funkcí a přiblížení  $T_0 \approx mc^2$  ,  $p_0 \approx m v_0$  , takže dostáváme

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2}(z+L)^2, \quad \theta = \frac{eE}{mv_0^2}(z+L) \quad (3.19)$$

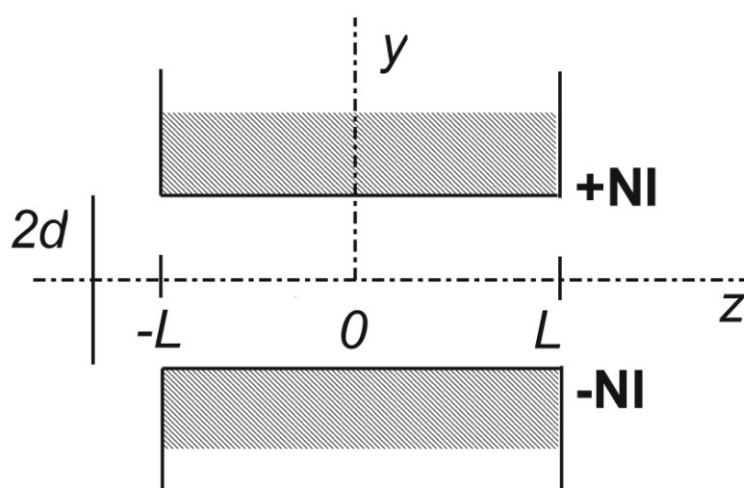
Pro  $z=L$  pak je úhel vychýlení dán součinem podílů energií a délek

$$\theta(L) = \frac{eE}{2} \frac{L}{mv_0^2 d} \quad (3.20)$$

### 3.3 Vychýlení elektronu homogenním magnetickým polem

Podle obrázku uvažujeme pohyb elektronu v rovině  $x-z$  s počátečními podmínkami

$$x(0)=0, \quad p_x(0)=0, \quad z(0)=-L, \quad p_z(0)=p_0 \quad (3.21)$$



Pohybové rovnice jsou

$$\frac{dp_x}{dt} = -eBv_z, \quad \frac{dp_z}{dt} = eBv_x \quad (3.22)$$

Z rovnic (3.11) je vidět, že se kinetická energie zachovává, takže můžeme rovnice (3.22) přepsat na

$$\frac{dv_x}{dt} = -\omega v_z, \quad \frac{dv_z}{dt} = \omega v_x, \quad \omega = \frac{eBc^2}{T} = \frac{eBc^2}{(p^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2}} \quad (3.23)$$

Standardní úprava rovnic na

$$\frac{d(v_x + i v_z)}{dt} = i\omega(v_x + i v_z) \quad (3.24)$$

umožňuje integraci

$$\frac{dx}{dt} + i \frac{dz}{dt} = A \exp[i\omega t + \alpha] \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{pc^2}{T} \sin\omega t \quad , \quad \frac{dz}{dt} = \frac{pc^2}{T} \cos\omega t \quad (3.25)$$

a dále

$$x = \frac{pc^2}{T\omega} [\cos\omega t - 1] = \frac{p}{eB} [\cos\omega t - 1] \quad , \quad z = -L + \frac{pc^2}{T\omega} \sin\omega t = -L + \frac{p}{eB} \sin\omega t \quad (3.26)$$

Z druhého vztahu vyjádříme

$$\sin\omega t = \frac{eB}{p}(z+L) \quad , \quad \cos\omega t = \left[ 1 - \left( \frac{eB(z+L)}{p} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.27)$$

a můžeme psát rovnici trajektorie a úhel vychýlení jako

$$x = \frac{p}{eB} \left\{ \left[ 1 - \left( \frac{eB(z+L)}{p} \right)^2 \right]^{1/2} - 1 \right\} \quad , \quad \theta = \frac{v_x}{v_z} = -\frac{eB(z+L)}{\left[ p^2 - (eB(z+L))^2 \right]^{1/2}} \quad (3.28)$$

#### 4. Index lomu

Podobnost optiky nabitých částic a světelné optiky nejlépe vyjádříme nalezením "indexu lomu". Pohybové rovnice částice o hmotnosti  $m$  a s nábojem  $q$  ve statickém elektrickém a magnetickém poli, popsanými skalárním potenciálem  $\Phi(\vec{r})$  a vektorovým potenciálem  $\vec{A}(\vec{r})$  najdeme z Maupertoisova principu. Pole je spojeno s potenciály vztahy

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}) \quad , \quad \vec{D}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) \quad (4.1)$$

Lagrangeova funkce má tedy tvar

$$L(\vec{r}, \vec{v}) = -mc \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}) - q\Phi(\vec{r}) \quad (4.2)$$

a protože nezávisí explicitně na čase, zachovává se energie částice

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \vec{p} \cdot \vec{v} - L \quad , \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + q\vec{A}(\vec{r}) \quad ,$$

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \left( (\vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}))^2 c^2 + m^2 c^4 \right)^{1/2} + q\Phi(\vec{r}) = mc^2 \quad (4.3)$$

Zde i v následujících vztazích je  $\vec{p}$  zobecněný impuls a



$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

Volba konstanty u zachovávající se energie je typická pro optiku nabitých částic: předpokládáme, že elektrostatický potenciál je nulový tam, kde je nulová rychlost částice. Ze vztahu (4.3) máme

$$\begin{aligned} (\vec{p} - qA) \cdot c + m^2 c^4 &= (mc^2 - q\Phi)^2 \Rightarrow \\ (\gamma m \vec{v}) \cdot (\vec{p} - qA) \cdot c &= -2qmc^2 \Phi^* \end{aligned} \quad (4.5)$$

kde

$$\Phi^*(\vec{r}) = \Psi(\vec{r})(1 + \varepsilon \Psi(\vec{r})) \quad , \quad \varepsilon = \frac{-q}{2mc^2} \quad (4.6)$$

Musí tedy být znaménko potenciálu voleno tak, aby byl v pro částici dovolené oblasti kladný pro záporně nabitě částice a záporný pro kladně nabitě částice. Ze vztahu (4.3) dostaneme také

$$(\gamma^2 m^2 v^2 + m^2 c^4)^{1/2} = \gamma mc^2 = mc^2 - q\Phi \Rightarrow \gamma = (1 + 2\varepsilon\Phi) \quad (4.7)$$

Podle (4.6) pak

$$\vec{V}\Phi = \gamma \vec{V}\Phi \quad (4.8)$$

Hamiltonův princip říká, že pro účinek se zadanými souřadnicemi v počátečním i koncovém okamžiku, tj.  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad , \quad \delta S = p \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (4.9)$$

dostaneme rovnici trajektorie

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (4.10)$$

Nezávisí-li lagrangián explicitně na čase, zachovává se energie a podle Maupertoisova principu se pohyb děje po trajektorii, na které

$$\delta S + E \delta t \Big|_{q_1}^{q_2} = 0 \quad (4.11)$$

Napíšeme-li účinek jako

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p \dot{q} - H) dt = \int_{q_1}^{q_2} p dq - E(t_2 - t_1) \quad , \quad (4.12)$$

dostáváme  $\delta \int_{q_1}^{q_2} p dq = 0$ , neboli pro třírozměrný konfigurační prostor

$$\delta \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{p} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (4.13)$$

Při přepisu Mapertuisova principu ve tvaru (4.13) do formy Fermatova principu

$$\delta \int_{\tau_a}^{\tau_b} n(\vec{r}, t) |\vec{v}| d\tau = 0, \quad \vec{t} = \frac{d\vec{r}}{d\tau} \quad (4.14)$$

(trajektorii parametrizujeme pomocí parametru  $\tau$ ,  $\vec{t}$  je tečný vektor) provedeme několik úprav.

Píšeme

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{p} \cdot d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\vec{p} - q \vec{A}) \cdot d\vec{r} + q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \gamma \vec{v} \cdot d\vec{r} + q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \gamma v \frac{d\vec{r}}{dl} \cdot d\vec{r} + q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( -2q m \Phi_0 \right)^{1/2} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \frac{\Phi^*}{\Phi_0} \right)^{1/2} |\vec{t}| d\tau - \eta \int_{\tau_1}^{\tau_2} \vec{A} \cdot \vec{t} d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

kde

$$\eta = \left( \frac{-q}{2m\Phi_0} \right)^{1/2} \quad (4.16)$$

Konstantu před integrálem nemusíme uvažovat. Integrand ve Fermatově principu je tedy

$$n(\vec{r}, t) = \left( \frac{\Phi^*}{\Phi_0} \right)^{1/2} \left( 1 - \eta \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{t} \right) \quad (4.17)$$

a můžeme jej interpretovat jako index lomu opticky anizotropního prostředí. Nerelativistická aproximace se dostane jednoduše dosazením  $\varepsilon = 0$  (případně  $\gamma = 1$ ). Normování skalárního potenciálu a kalibraci vektorového potenciálu se snažíme obvykle volit tak, aby byl index lomu roven jedné v oblasti, kde částici považujeme za volnou.

## 5. Rovnice trajektorie

Pro počítání z Fermatova principu připomeneme dále ještě některé vztahy. Je-li v ortogonálních souřadnicích vyjádřen polohový vektor jako

$$\vec{r} = q_1 \vec{e}_1 + q_2 \vec{e}_2 + q_3 \vec{e}_3 \quad (5.1)$$

a tečný vektor vyjádřen jako

$$\vec{t} = n_1(q_1, q_2, q_3) \frac{dq_1}{d\tau} \vec{e}_1 + n_2(q_1, q_2, q_3) \frac{dq_2}{d\tau} \vec{e}_2 + n_3(q_1, q_2, q_3) \frac{dq_3}{d\tau} \vec{e}_3, \quad (5.2)$$

máme pro základní operátory vektorové analýzy vyjádření

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \vec{e}_3, \\ \vec{\nabla} \cdot f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (f_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (f_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (f_3 h_1 h_2) \right], \\ \vec{\nabla} \times f &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (f_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (f_2 h_2)}{\partial q_3} \right] \vec{e}_1 + \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial (f_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (f_3 h_3)}{\partial q_1} \right] \vec{e}_2 + \\ &\quad \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (f_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (f_1 h_1)}{\partial q_2} \right] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Fermatův princip je po dosazení (4.17) do (4.14)

$$\delta \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ \left( \frac{\Phi^*(\vec{r}(\tau))}{\Phi^*(\vec{r}(\tau_0))} \right)^{1/2} |\vec{t}(\tau)| - \eta A(\vec{r}(\tau)) \cdot \vec{t}(\tau) \right\} d\tau = 0. \quad (5.4)$$

Připomeneme označení tečného vektoru a zavedení konstant

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{d\tau}, \quad \varepsilon = \frac{-q}{2mc^2}, \quad \eta = \left( \frac{-q}{2m\Phi_0^*} \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

S uvážením

$$\frac{\partial |\vec{t}|}{\partial \frac{dq_i}{d\tau}} = \frac{\partial}{\partial \frac{dq_i}{d\tau}} \left( \sum_j \left( h_j \frac{dq_j}{d\tau} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{h_i^2 \frac{dq_i}{d\tau}}{|\vec{t}|} \quad (5.6)$$

a

$$\frac{\partial |\vec{t}|}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_j \left( h_j \frac{dq_j}{d\tau} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{\sum_j h_j \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \left( \frac{dq_j}{d\tau} \right)^2}{|\vec{t}|} \quad (5.7)$$

máme

$$\frac{\partial n}{\partial \frac{dq_i}{d\tau}} = \left( \frac{\Phi^*}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{h^2}{|\vec{t}|} \frac{dq_i}{d\tau} - h_i A_i \quad (5.8)$$

a

$$\frac{\partial n}{\partial q_i} = \frac{|\vec{t}|}{2(\Phi^* \Phi_0)^{1/2}} \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial q_i} + \left( \frac{\Phi}{\Phi_0^*} \right) \frac{\partial |\vec{t}|}{\partial q_i} - \eta \sum_j \left[ \frac{\partial (n_j A_j)}{\partial q_i} \frac{dq_j}{d\tau} \right] . \quad (5.9)$$

Všimněme si, že platí

$$\sum_i \frac{dq_i}{d\tau} \frac{\partial n}{\partial \frac{dq_i}{d\tau}} = \sum_i \left[ \left( \frac{\Phi^*}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{h_i^2 \left( \frac{dq_i}{d\tau} \right)^2}{|\vec{t}|} - h_i \frac{dq_i}{d\tau} A_i \right] = n . \quad (5.10)$$

Standardní postup dává rovnici trajektorie ve tvaru

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial n}{\partial \frac{dq_i}{d\tau}} - \frac{\partial n}{\partial q_i} = 0 . \quad (5.11)$$

Výraz obsahující vektorový potenciál upravíme na

$$-\eta \frac{d(h_i A_i)}{d\tau} + \eta \sum_j \left[ \frac{\partial (h_j A_j)}{\partial q_i} \frac{dq_j}{d\tau} \right] = \eta \sum_j \left[ \frac{\partial (h_j A_j)}{\partial q_i} - \frac{\partial (h_i A_i)}{\partial q_j} \right] \frac{dq_j}{d\tau} = \eta h_i \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} t_j B_k = \eta h_i (t \times B)_i . \quad (5.12)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[ \frac{\Phi^{*1/2} h_i^2 \frac{dq_i}{d\tau}}{\Phi_0^{*1/2} |\vec{t}|} \right] \quad (5.13)$$

$$\frac{\Phi^{*1/2}}{\Phi_0^{*1/2}} \frac{\partial |\vec{t}|}{\partial q_i} - \frac{1}{2} h_i |\vec{t}| \gamma \varepsilon_i \frac{1}{\Phi^{*1/2} \Phi_0^{*1/2}} - \eta n_i (\vec{t} \times \mathcal{B})_i .$$

Pro zjednodušení zápisu budeme v dalším často psát  $df/d\tau \equiv \dot{f}$ .

## 5.1 Kartézské souřadnice

V tomto případě máme

$$\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z , \quad \iota = \dots \quad (5.14)$$

a tedy

$$h_x = h_y = h_z = 1 . \quad (5.15)$$

První dvě rovnice trajektorie jsou (s použitím značení s komplexními čísly  $w = x + iy$  a obvyklým značením derivací  $dx(z)/dz \equiv x'$ ,  $dy(z)/dz \equiv y'$ )

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{\Phi^{*1/2}}{\Phi_0^{*1/2}} \frac{w'}{(1+w'\bar{w}')^{1/2}} \right] = -\frac{1}{2}(1+w'\bar{w}')^{1/2} (1+2\varepsilon\Phi) E_w \frac{1}{\Phi^{*1/2} \Phi_0^{*1/2}} - i\eta (B_w - w' B_z) \quad (5.16)$$

Třetí rovnice

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{\Phi^{*1/2}}{\Phi_0^{*1/2}} \frac{1}{(1+w'\bar{w}')^{1/2}} \right] = -\frac{1}{2}(1+w'\bar{w}')^{1/2} (1+2\varepsilon\Phi) E_z \frac{1}{\Phi^{*1/2} \Phi_0^{*1/2}} + i\frac{\eta}{2} (B_w \bar{w}' - B_{\bar{w}} w') \quad (5.17)$$

je nadbytečná, ale můžeme ji s výhodou využít k vhodným úpravám (5.16). Tak můžeme například psát

$$w'' = -\frac{1}{2}(1+w'\bar{w}') (E_w - w' E_z) \frac{(1+2\varepsilon\Phi)}{\Phi^*} - i \left( \frac{-q}{2m\Phi^*} \right)^{1/2} (1+w'\bar{w}')^{1/2} \left( B_w + \frac{1}{2} (B_w \bar{w}' - B_{\bar{w}} w') w' - w' B_z \right) \quad (5.18)$$

nebo s využitím

$$B_w + \frac{1}{2} (B_w \bar{w}' - B_{\bar{w}} w') w' - w' B_z = |\vec{t}| B_w - (B \cdot \vec{t}) w \quad (5.19)$$

jako

$$w'' = -\frac{1}{2} |\vec{t}| (E_w - w' E_z) \frac{(1+2\varepsilon\Phi)}{\Phi^*} - i \left( \frac{-q}{2m\Phi^*} \right)^{1/2} |\vec{t}| (|\vec{t}| B_w - w (B \cdot \vec{t})) \quad (5.20)$$

## 5.2 Válcové souřadnice

Připomeňme si, že v této soustavě jsou jednotkové vektory dány pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy jako

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (5.21)$$

takže

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z, \quad \iota = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z \quad (5.22)$$

a máme tedy

$$h_\rho = 1, \quad h_\varphi = \rho, \quad h_z = 1 \quad (5.23)$$

Zvolíme-li za parametr délku oblouku centrální kružnice, máme

$$\tau = s \equiv R\varphi \quad , \quad \vec{t} = \rho \vec{e}_\rho + \frac{-\vec{e}_\varphi}{R} + z \vec{e}_z \quad , \quad (5.24)$$

kde tentokrát značení derivací je  $d\rho(s)/ds \equiv \rho'$  ,  $dz(s)/ds \equiv z'$  ,  $d\varphi(s)/ds \equiv 1/R$  . Po malých úpravách získáme rovnice trajektorie ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{\rho'}{\left( \frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} \right] &= \left( \frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{\rho}{R^2 \left( \frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} \\ &- \frac{1 + 2\varepsilon\Phi(\rho, z)}{2(\Phi^*(\rho, z)\Phi_0^*)^{1/2}} \left( \frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2} E_\rho(\rho, z) - \eta \frac{\rho}{R} B_z(\rho, z) \quad , \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{z'}{\left( \frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} \right] &= \\ &- \frac{1 + 2\varepsilon\Phi(\rho, z)}{2(\Phi^*(\rho, z)\Phi_0^*)^{1/2}} \left( \frac{\rho^2}{R^2} + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2} E_z(\rho, z) + \eta \frac{\rho}{R} B_\rho(\rho, z) \end{aligned} \quad (5.26)$$

a konečně

$$\frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{\left( \frac{\rho}{R} \right)^2}{\left( \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} \right] = \eta \frac{\rho}{R} (\rho' B_z(\rho, z) - z' B_\rho(\rho, z)) \quad . \quad (5.27)$$

Pomocí vektorového potenciálu

$$B_\rho(\rho, z) = -\frac{\partial A_\varphi(\rho, z)}{\partial z} \quad , \quad B_z(\rho, z) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\varphi(\rho, z))}{\partial \rho} \quad (5.28)$$

můžeme „nadbytečný“ vztah (5.27) napsat jako

$$\frac{d}{ds} \left[ \left( \frac{\Phi^*(\rho, z)}{\Phi_0^*} \right)^{1/2} \frac{\left( \frac{\rho}{R} \right)^2}{\left( \left( \frac{\rho}{R} \right)^2 + \rho'^2 + z'^2 \right)^{1/2}} - \eta \frac{\rho}{R} A_\varphi(\rho, z) \right] = 0 \quad (5.29)$$

a použít jej ke zjednodušení zbývajících dvou rovnic.

### 5.3 Rotačně souměrné pole

V tomto případě zvolíme za parametr souřadnici  $z$  osy symetrie a kalibraci vektorového potenciálu takovou, aby

$$\vec{A} = A_\varphi(\rho, z) \vec{e}_\varphi \quad (5.30)$$

Účinek je

$$S(z_2, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} L(\rho, \rho', \varphi', z) dz \quad (5.31)$$

kde

$$L = \Phi^{*1/2}(\rho, z) \left(1 + \rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2\right)^{1/2} - \eta \rho \varphi' A_\varphi(\rho, z) \quad (5.32)$$

Zachovává se úhlová složka zobecněné hybnosti

$$P_\varphi = \Phi^{*1/2}(\rho, z) \frac{\rho^2 \varphi'}{\left(1 + \rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2\right)^{1/2}} - \eta \rho A_\varphi(\rho, z) = C \quad (5.33)$$

Radiální složka hybnosti je

$$P_\rho = \Phi^{*1/2}(\rho, z) \frac{\rho'}{\left(1 + \rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2\right)^{1/2}} \quad (5.34)$$

Napíšeme-li (5.31) ve tvaru

$$S(z_2, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} \left\{ L(\rho, \rho', \varphi', z) - P_\varphi \varphi' \right\} dz + P_\varphi \varphi \quad (5.35)$$

a dosadíme za  $P_\varphi$  z (5.33), dostáváme pro účinek výraz

$$S(z_2, z_1) = \int_{z_1}^{z_2} M(\rho, \rho', C, z) dz + C \varphi \quad (5.36)$$

kde za lagrangián považujeme

$$M = \left[ \Phi^* - \left( \frac{C}{r} + \eta A_\varphi \right)^2 \right]^{1/2} \left[ 1 + \rho'^2 \right]^{1/2} \quad (5.37)$$

### 5.4 Störmerův problém

Rozptyl nabitě částice v poli magnetického dipólu

$$\vec{A} = \frac{\dots}{r^3} \quad (5.38)$$

Zvolíme orientaci dipólového momentu podél osy  $z$ . Budeme používat válcovou soustavu souřadnic. Připomeňme si, že v této soustavě jsou jednotkové vektory dány pomocí jednotkových vektorů kartézské soustavy jako

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_z = \vec{e}_z \quad (5.39)$$

a máme tedy

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2} = \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.40)$$

Značíme jako obvykle

$$\frac{df}{d\tau} \equiv j, \quad \frac{df}{dz} \equiv f' \quad (5.41)$$

Index lomu takového prostředí je

$$n = \left( j \frac{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}{\rho^2 \dot{\varphi}} \right)^{1/2} = M \frac{\rho^2 \dot{\varphi}}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.42)$$

Obvyklý postup v optice nabitých částic je takový: souřadnice  $\varphi$  je cyklická, po jejím vyloučení dostaneme pro nový "index lomu"

$$n(\rho, z) = n(\rho, z, \varphi) - p_\varphi \dot{\varphi} \quad (5.43)$$

výraz

$$n(\rho, z) = \left[ \left( j \frac{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}{\rho^2 \dot{\varphi}} \right)^{1/2} - \left( \frac{p_\varphi}{\rho} + \eta M \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \right]^{1/2}, \quad (5.44)$$

kde  $p_\varphi$  je zachovávaná se úhlová složka momentu impulsu

$$p_\varphi = \frac{\rho^2 \dot{\varphi}}{\left( j \frac{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}{\rho^2 \dot{\varphi}} \right)^{1/2}} - \eta M \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.45)$$

Jako parametr  $\tau$  zvolíme souřadnici  $z$ . Lagrangeova rovnice

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial n}{\partial \rho'} \right) - \frac{\partial n}{\partial \rho} = 0 \quad (5.46)$$

pak dává "rovnici trajektorie v rotující souřadné soustavě"



$$\rho'' + \frac{\rho'(1 + \rho'^2)}{1 - \left( \frac{p_\varphi}{\rho} + \eta M \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2} \frac{3\eta M \rho z}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1 + \rho'^2}{1 - \left( \frac{p_\varphi}{\rho} + \eta M \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2} \left( \frac{p_\varphi}{\rho^2} + \frac{3\eta M \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \right) = 0 \quad (5.47)$$

Rotace je pak počítána z rovnice

$$\varphi' = \pm \frac{[1 + \rho'^2]^{1/2}}{\left[ 1 - \left( \frac{p_\varphi}{\rho} + \eta M \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right)^2 \right]^{1/2}} \left( \frac{p_\varphi}{\rho^2} + \eta M \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \right) \quad (5.48)$$

Rovnice nám umožní najít exaktní řešení, ale nejsou příliš průhledné. Všimněme si, že ve výrazu pro index lomu (5.42) vystupují souřadnice  $z$  a její derivace ve druhé mocnině, je tedy pohyb v rovině  $z = 0$  řešením. V takovém případě máme podstatně jednodušší úlohu, charakterizovanou

$$n(\rho, \varphi) = \left( j \frac{1}{\rho} + \eta M \frac{1}{\rho} \right) \quad (5.49)$$