Optika nabitých částic

Poznámky k přednášce – část 2

Michal Lenc

6. Variační úloha

6.1. Obecná formulace

Pro určitost a jisté zjednodušení zvolíme za parametr souřadnici z. To je výhodné u optických soustav s přímou osou. Problém je popsán akcí

$$S^{*} = \int \quad \equiv \quad = \quad = \tag{6.1}$$

Máme (sčítáme přes index i)

$$\delta \; = \; \int \quad + \Delta \quad = \quad \int \tag{6.2}$$

a po integraci per partes

$$\delta \; = \; \partial \quad \int \tag{6.3}$$

Na skutečné trajektorii je pak

$$\partial \quad \partial \quad \partial \tag{6.4}$$

označíme na této trajektorii $S^{*} \longrightarrow$ a po zavedení hybností

$$p_i \, z = \partial \quad , z \tag{6.5}$$

máme

$$\Lambda = \Lambda - \Lambda \tag{6.6}$$

Nyní uvažujme o operátorech poruchy funkčního tvaru P_f a argumentu P_a, takže celková porucha bude $P_a P_f$. Taylorův rozvoj bude

$$P_f = + \quad + \quad + \cdots \tag{6.7}$$

tedy speciálně

$$P_f M = \;+\; \;+\; \;+\cdots \tag{6.8}$$

Pro záměnu argumentu

$$\hat{P}_a = \cdots \qquad D = \partial \;\; \partial \;\; \partial \;\; \partial \;\cdots \tag{6.9}$$

Máme tedy

$$\hat{P}S_{12} = \int \tag{6.10}$$

a

$$F\Lambda = \Lambda = \;\Lambda\; - \;\Lambda \tag{6.11}$$

Rozepsáním (6.11) dostáváme

$$\begin{aligned} \Delta &= \\ &\cdots \qquad \cdots \\ &\cdots \qquad \cdots \\ &\mu^{2}\,\Delta - \Delta + \\ &\lambda \\ &\lambda \;+\; \Delta + \Delta \\ &- \Delta - \Delta - \Delta \cdots \end{aligned} \tag{6.12}$$

Nyní rozepišme (6.10)

$$PS_{12} = \int \cdots \qquad \cdots \tag{6.13}$$

Po sloučení členů u stejných mocnin máme

$$PS_{12} = \;+\; \;+\; \;+\cdots \tag{6.14}$$

kde

$$S_{12}^{0} = \int \qquad \int$$

$$S_{12}^{2} = \int \qquad (6.15)$$

$$S_{12}^{3} = \int$$

a podobně pro vyšší řády

$$S_{12}^{4} = \int \qquad + \qquad (6.16)$$

$$S_{12}^{5} = \ldots\ldots$$

Povšimněme si, že pro libovolné ε ε máme

$$\int \qquad - \qquad (6.17)$$

Působením operátoru P na (6.17) pak dostáváme

$$\int \qquad - \qquad (6.18)$$

Pro $\varepsilon =$ můžeme integrand na levé straně psát jako $D^{n} PM$ a (6.18) přejde na tvar

$$\int \qquad = \qquad - \qquad . \qquad (6.19)$$

Pro jednotlivé řády poruchové teorie máme

$$\int \qquad = \qquad - \qquad , \qquad (6.20)$$

$$\int \qquad - \qquad , \qquad (6.21)$$

$$\int^{z_2} \qquad , \tag{6.22}$$

$$\int^{z_2} \tag{6.23}$$

$$= \qquad - \qquad ,$$

V komplexním značení je

$$D^n = \quad \partial \quad \partial \quad \partial \quad \partial \quad \partial \quad \partial \tag{6.24}$$

6.2. Paraxiální přiblížení

V paraxiálním přiblížení máme (smysl odlišení indexu aproximace v hranaté a kulaté závorce bude vidět u přiblížení vyšších řádů)

$$S_{12}^{0} = \qquad = \int^{z_2} \qquad = \tag{6.25}$$

$$- \qquad - \qquad - \qquad - \qquad + \qquad - \qquad -$$

a tedy po variaci

$$\Delta \quad = \quad \Delta \quad - \quad \Delta \quad = \quad \frac{1}{2} \tag{6.26}$$

kde

$$p_1 = \quad + \qquad = \quad - \qquad = \quad - \tag{6.27}$$

a paraxiální rovnice je

$$\phi \quad + \tag{6.28}$$

6.3. Porucha prvního řádu

Pro n pak dosazení z (6.20) do (6.15) dává

$$S_{12}^{1} = \qquad - \qquad + \tag{6.29}$$

kde jsme označili

$$S_{12}^{1} = \int^{z_2} \ldots dz \, . \qquad (6.30)$$

Spočtěme nyní variaci (6.29)

$$\Delta \ldots = \Lambda \ldots + \Lambda \ldots - \Lambda \ldots - \Lambda \ldots + \Lambda \ldots \qquad (6.31)$$

a porovnejme ji se členem prvního řádu ve výrazu (6.12). Dostáváme tak

$$\Delta \ldots = p^{1} \; z_2 \, \Delta \ldots - \ldots \Delta \ldots \qquad (6.32)$$

6.4. Porucha druhého řádu

Jestliže ve (6.19) vezmeme n a operátor P do prvního řádu, máme

$$\int^{z_2} \ldots - \ldots \qquad (6.33)$$

Podle (6.15) je

$$S_{12}^{2} = \int^{z_2} \ldots \qquad (6.34)$$

$$S_{12}^{2} + \int^{z_2} \ldots + \ldots - \ldots ,$$

kde jsme v analogii k poruše prvního řádu označili

$$S_{12}^{2} = \int^{z_2} \ldots \qquad (6.35)$$

a podle (6.20)

$$\int^{z_2} \ldots - \ldots \, . \qquad (6.36)$$

S využitím (6.33) pak

$$S_{12}^{2} = S_{12}^{2} + \ldots - \ldots + \ldots - \ldots \qquad (6.37)$$

Porovnáním člene druhého řádu ve (6.12) s přírůstkem Λ spočteným z (6.37) dostaneme

$$\Delta = p^2 z_2 \Delta - \Delta \qquad - \Lambda + \Lambda \tag{6.38}$$

Ve srovnání s (6.32) přibyly v (6.38) poslední dva členy a přirozeně se zvýšil řád poruchových trajektorií.

6.5. Poruchy třetího a čtvrtého řádu

V těchto případech máme

$$S_{12}^{3} = + \quad - \quad + \quad x_i^2 \; z_2 \; p_i^1 \; z_2 - \quad + \quad - \tag{6.39}$$

a

$$S_{12}^{4} = + \quad - \quad + \quad - \quad + \quad x_i^2 \; z_2 \; p_i^2 \; z_2 - \quad + \quad - \quad , \tag{6.40}$$

kde jsme označili

$$S_{12}^{3} = \int^{z_2} \tag{6.41}$$

a

$$S_{12}^{4} = \int^{z_2} \tag{6.42}$$

Porovnáním člene třetího řádu ve (6.12) s přírůstkem Λ spočteným z (6.39) dostaneme

$$\Delta = p^3 z_2 \Delta - \Delta \qquad - \Lambda + \Lambda - \Lambda + \Lambda \tag{6.43}$$

Stejně tak porovnáním člene čtvrtého řádu ve (6.12) s přírůstkem Λ spočteným z (6.40)

$$\Delta = \; p^4 z_2 \Delta - \Delta - \; - \Delta + \Delta - \Delta + \Delta \; - \Lambda + \Lambda \qquad (6.44)$$

6.6. Shrnutí výsledků

Především budeme předpokládat, že

$$\Lambda = = = \qquad (6.45)$$

Základní člen M je kvadratickou formou v proměnných $w, w', w, \ldots$, takže působení třetích a vyšších mocnin operátorů D^n na M dává nulu. Máme

$$D^n D^m M = \frac{1}{2\phi} w^{n\prime} + + + - - \; - + - - \; \psi \; - + \qquad (6.46)$$

Pro poruchu prvního řádu je

$$p^1 \Delta + \Delta - \Delta - \Delta = \; R^1 = \Lambda \qquad (6.47)$$

kde

$$S_{12}^1 = \int^{z_2} , w, z \, dz \qquad (6.48)$$

a

$$M^1 = - + - + \qquad (6.49)$$

Pro poruchu druhého řádu je

$$p^2 \Delta + \Delta - \Delta - \Delta = \; R^2 = \Lambda + \Lambda + \Lambda \qquad (6.50)$$

kde

$$S_{12}^{2} = \int \qquad (6.51)$$

a

$$M^{2} = \ldots \qquad (6.52)$$

$$\frac{1}{2} D^{12} M = \ldots \qquad (6.53)$$

Pro poruchy třetího a čtvrtého řádu budeme potřebovat výrazy

$$D^{n} D^{m} M^{1} = \ldots \qquad (6.54)$$

$$D^{p} D^{n} D^{m} M^{1} = \ldots \; v^{n} w^{p} F_{3} + \ldots w^{p} F_{3} \, ,$$

pro poruchu čtvrtého řádu je např.

$$\frac{1}{3} D^{13} M^{1} = \ldots \qquad (6.55)$$

Poslední potřebný výraz pro poruchu čtvrtého řádu je

$$\frac{1}{2} D^{12} M^{2} = \ldots \tag{6.56}$$

Pro poruchu třetího řádu je

$$p^{3}_{R} \ldots \tag{6.57}$$

kde

$$S^{3}_{12} = \int \ldots \tag{6.58}$$

a

$$M^{3} = \ldots \tag{6.59}$$

$$D^1 D^2 M = \frac{1}{2\phi} w^{2} + \quad + \quad + \quad - \quad - \qquad (6.60)$$

$$- \quad + \quad - \quad - \quad \psi$$

$$- \quad +$$

$$\frac{1}{2} D^{12} M^1 = - \quad + \quad - \quad + \qquad (6.61)$$

Pro poruchu čtvrtého řádu je

$$p^4 \Delta + \Delta - \Delta - \Delta = \qquad (6.62)$$

$$R^4 = \Lambda + \Lambda + \Lambda + \Lambda + \Lambda + \Lambda + \Lambda$$

kde

$$S_{12}^4 = \int^{z_2} \quad - \left[\quad \right] \quad - \left[\quad \right] \qquad (6.63)$$

a

$$M^4 = \frac{1}{\ }\ + \ \psi \ + \frac{1}{\psi}\left(\ \right)$$

$$\frac{1}{102\phi}\left(\ \right) - + \frac{1}{\ }\ w$$

$$32\frac{\gamma}{\phi} + - \ \psi \ + - \ \psi \ + \ +$$

$$9\frac{\gamma}{\phi} + - \ \psi \ + -$$

$$\frac{1}{16\phi}\ w^4 E \ + + - + -$$

$$153\frac{\gamma}{\phi} + + \ \psi \ + - \ \psi \ + +$$

$$\frac{1}{192\phi}\ E\, w^4 \ + + \ \psi \ + + \ \psi \ -$$

$$\frac{3}{25}\frac{\gamma\phi}{\phi}\ w^3 \ + - \ \psi \ + +$$

$$512\frac{\phi}{\phi} + - \ \psi \ + + \qquad (6.64)$$

$$\frac{i}{34}\eta\left[\ \right]$$

$$\frac{i}{40}\eta\left[\ \right]$$