

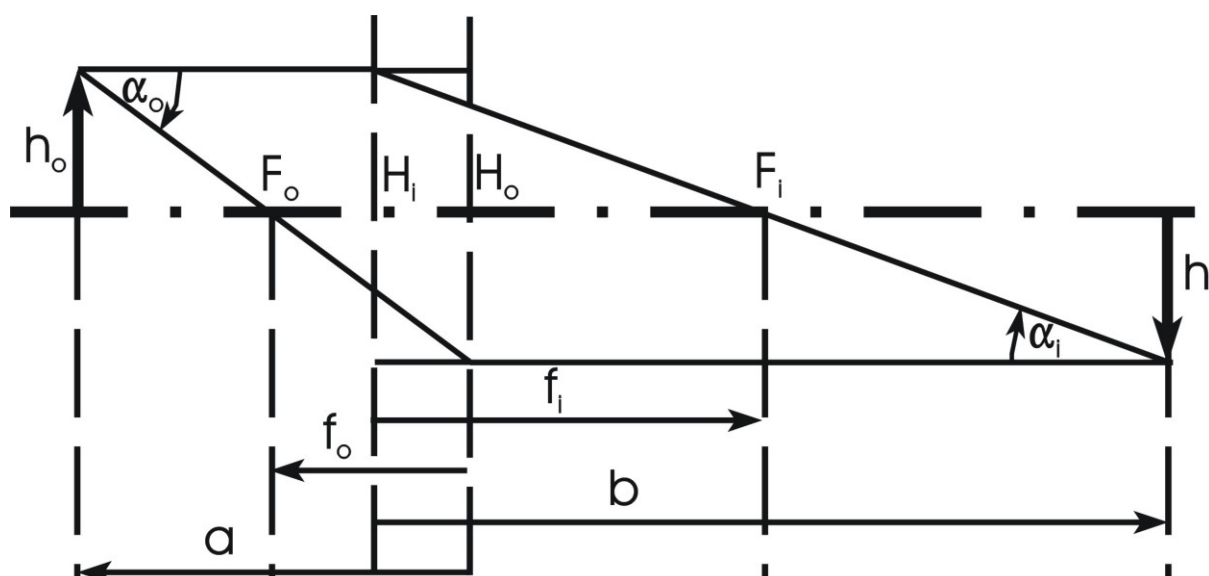
Optika nabitých částic
Poznámky k přednášce – část 3
Michal Lenc

8. Maticová formulace

8.1. Paraxiální optika

Ve světelné optice se jako standardní postup pro návrh optických systémů používá výpočet se systémem matic, které charakterizují přenos světla od jedné roviny k další pomocí matice přenosu T_p volným prostorem a matice čočky T_c , která charakterizuje lom paprsků na lámavé ploše (optické čočce).

Zopakujme zde stručně pojmy týkající se zobrazení tlustou čočkou (obrázek).



Tlustá čočka je charakterizována polohami hlavních rovin H_o a H_i , polohami ohnisek F_o a F_i a indexy lomu v předmětovém a obrazovém prostoru n_o a n_i . Paprsek rovnoběžný s optickou osou v předmětovém prostoru se láme v obrazové hlavní rovině H_i do obrazového ohniska F_i , paprsek procházející předmětovým ohniskem F_o se láme v předmětové hlavní rovině H_o a jde dále v obrazovém prostoru rovnoběžně s optickou osou. Pro polohu předmětu a obrazu je splněna čočková rovnice

$$\frac{f_o}{a} + \frac{t}{n_o} = \frac{t}{n_i} = \frac{f_i}{b} \quad (8.1)$$

Vzdálenosti v předmětovém prostoru se měří od předmětové hlavní roviny, tj. $f_o = \dots$, $a = \dots$, a vzdálenosti v obrazovém prostoru se měří od obrazové hlavní roviny, tj. $f_i = \dots$, $b = \dots$. Přímé a úhlové zvětšení jsou definovány jako

$$M = \frac{h'}{h} = \frac{f_o}{f_i} = \dots = \dots \quad (8.2)$$

Platí zřejmě

$$n_b h_b \alpha = \dots \quad (8.3)$$

Toto je jeden ze základních vztahů paraxiální geometrické optiky, Smithova - Helmholtzova věta.

Pro maticový zápis paprskového chodu zavedeme pojem přenosové matice. Označíme-li X_1 polohu a X_1' směrnici paprsku v nějaké počáteční rovině Z_1 a X_2 polohu a X_2' směrnici paprsku v nějaké koncové rovině Z_2 , můžeme psát

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ X_2' \end{bmatrix} = T_{Z_2, Z_1} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_1' \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

kde T_{Z_2, Z_1} je matice přenosu. Přenos ve volném prostoru od Z_1 do Z_2 je popsán maticí

$$T_p = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

neboť směrnice paprsku se nemění a poloha se mění úměrně prošlé vzdálenosti. Pro přenos mezi hlavními rovinami čočky je matice přenosu dána vztahem

$$T_c(Z_H, Z_H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

protože souřadnice paprsku se nemění a směrnice se mění jednak působením čočky úměrně souřadnici a jednak díky Snellovu zákonu.

Označíme-li X_1 polohu a X_1' směrnici paprsku v rovině Z_1 před čočkou a X_2 polohu a X_2' směrnici paprsku v rovině Z_2 za čočkou, můžeme psát

$$T_{Z_2, Z_1} = T_p(Z_H, Z_1) T_c(Z_H, Z_H) T_p(Z_H, Z_2) \quad (8.7)$$

Vynásobení matic a drobné úpravy vedou k výsledku

$$T_{Z_2, Z_1} = \begin{bmatrix} 1 - d/f & d \\ -d/f & 1 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

Po využití vztahů $Z_{H_1} = \dots$ a $Z_{H_2} = \dots$ dostaneme pro matici T_{Z_2, Z_1} výraz

$$T_{Z_2, Z_1} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

Jsou-li roviny opticky konjugované (tj. rovina $Z_{1=}$ v (8.8) nebo (8.9) je předmětová rovina a rovina $Z_{2=}$ k ní sdružená obrazová rovina), je ovšem matice přenosu mnohem jednodušší

$$T_{Z_1, Z_0} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (8.10)$$

to jest

$$X_{1=} = \dots + \dots \quad (8.11)$$

Také dosazení opticky konjugovaných hlavních rovin $Z_{1=}$ a $Z_{2=}$ do (8.8) nebo (8.9) dává zpětně přenosovou matici čočky (8.6). Přenosovou matici pro volný prostor ale dostaneme pouze z matice ve tvaru (8.8) (dosazením $f_{0=}$ a limitním přechodem $f_{i \rightarrow \infty}$). V matici (8.9) totiž také polohy ohnisek jdou do nekonečna a limitní přechod není dobře definován.

Velmi výhodný je maticový zápis při výpočtu vlastností systému složeného z mnoha prvků - jeden každý prvek charakterizujeme maticí a vlastnosti systému získáme vynásobením matic jednotlivých prvků a matic přenosu volným prostorem mezi nimi (transportních matic).

8.2. Silná fokusace

Silnou fokusací v urychlovači rozumíme periodické střídání kvadrupólů orientovaných jako spojky nebo rozptylky. Budeme používat maticového zápisu, tedy např. pro směr x zavedeme vektor o dvou složkách, tj. při parametrizaci pomocí parametru z je paprsek popsán normovanou souřadnicí XZ/X_0 a směrnici $X'Z$

$$XZ = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

Po průchodu optickou soustavou uzavřenou do intervalu Z_{in}, Z_{at} je

$$X_{at} = \dots, \quad (8.13)$$

nebo rozepsáno

$$\begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

Pohyb ve volném prostoru délky L je vyjádřen maticí (směrnice zůstává konstantní, souřadnice v závislosti na parametru lineárně narůstá)

$$TL = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

působení kvadrupólu jako tenké spojky resp. tenké rozptylky maticí (souřadnice se nezmění, směrnice se skokem změní o optickou mohutnost násobenou hodnotou souřadnice paprsku při dopadu na tenkou čočku)

$$T_+^f = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

Jeden periodicky se opakující element tvořený volným pohybem od spojky k rozptylce, působením rozptylky, volným pohybem od rozptylky ke spojce a působením spojky bude tak vyjádřen maticí

$$M = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

Naším úkolem je ale spočítat působení velkého počtu (řekněme N) takových elementů, tedy

$$X_{at} = \dots, \quad (8.18)$$

přičemž požadujeme, aby se nezvětšovaly rozměry oblasti, kterou ve fázovém prostoru zaujímá svazek paprsků. K tomu využijeme rozklad obecného počátečního vektoru X_m do vlastních vektorů matice M , tj.

$$X_m = \dots + \dots \quad (8.19)$$

kde

$$MX_i = \dots = \dots \quad (8.20)$$

Obecně pro vlastní hodnoty matice druhého řádu máme

$$\begin{aligned}
 & \begin{vmatrix} m_1 - \lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{m_1 + m_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1 - m_2}{2}\right)^2 + m_{12}m_{21}} \\
 & \lambda_{\pm} = \frac{m_1 + m_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1 - m_2}{2}\right)^2 + m_{12}m_{21}}
 \end{aligned} \tag{8.21}$$

V našem případě

$$\text{Tr } M = \frac{m_1 + m_2}{2} \tag{8.22}$$

Důležité jsou vlastnosti kořenů

$$\lambda_{+} \lambda_{-} = m_{12}m_{21} \tag{8.23}$$

Označme

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} \lambda_{+} \\ \lambda_{-} \end{pmatrix} \tag{8.24}$$

potom

$$\lambda_{\pm} = \frac{m_1 + m_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_1 - m_2}{2}\right)^2 + m_{12}m_{21}} \tag{8.25}$$

Parametr μ je buď reálné, nebo ryze imaginární číslo. Je teď

$$X_{at} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_{+}t} & e^{\lambda_{-}t} \\ \zeta e^{\lambda_{+}t} & -\zeta e^{\lambda_{-}t} \end{pmatrix} \tag{8.26}$$

Cvičení: přesvědčit se nejprve, že protože X_m je reálné, bude také X_{at} reálné. Potom ukázat rozdíly pro μ reálné a ryze imaginární, nejlépe na skalární veličině

$$X^T z X z = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \tag{8.27}$$

9. Optická soustava s přímou osou

9.1. Multipólová pole

Pro výpočet optických vlastností jednotlivých prvků potřebujeme znát rozložení elektrických a magnetických polí na ose, v jejíž blízkosti se svazek nabitých částic pohybuje.

Protože v blízkosti optické osy nejsou ani budící cívky, ani elektrody, můžeme pole působící na nabitou částici charakterizovat pomocí skalárního magnetického potenciálu a elektrostatického potenciálu. Ze známého rozložení potenciálu nebo pole na ose můžeme vyjádřit elektrostatický nebo magnetický potenciál v blízkosti osy pomocí Taylorova rozvoje v souřadnicích x, y . Základními poli pro paraxiální aproximaci jsou pole rotačně souměrné (fokusační), pole dipólové (vychylovací) a pole kvadrupólové (jak pro fokusaci jako kvadrupólové čočky, tak pro korekci astigmatismu).

Zavedeme-li komplexní souřadnici w pomocí vztahu $w = x + iy, \bar{w} = x - iy$, můžeme obecně zapsat skalární potenciál jako

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^n \Phi_0, \quad (9.1)$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^n \Phi_0$$

Ze známého skalárního potenciálu spočteme intenzitu elektrického pole jako

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi$$

$$E_w = - \frac{\partial \Phi}{\partial w} + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{w}} \quad (9.2)$$

První členy rozvoje potenciálů rotačně souměrného pole, dipólového, kvadrupólového, hexapólového a oktapólového pole jsou pro elektrostatický potenciál

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^2 \Phi_0 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^4 \Phi_0 + \dots$$

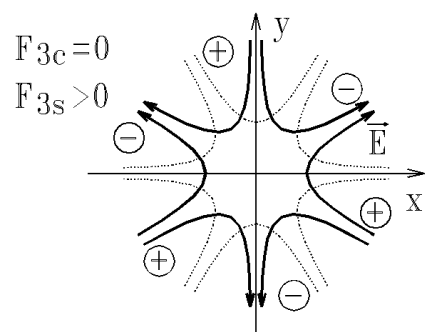
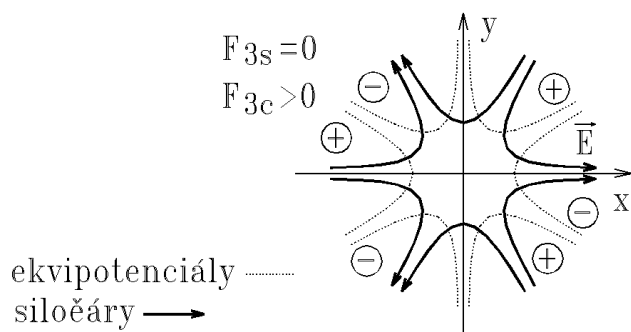
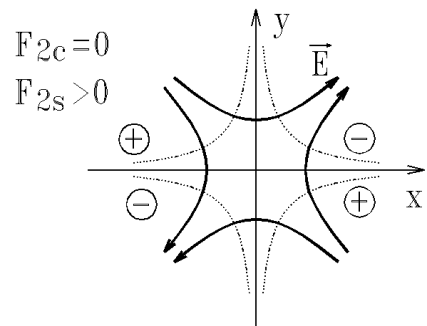
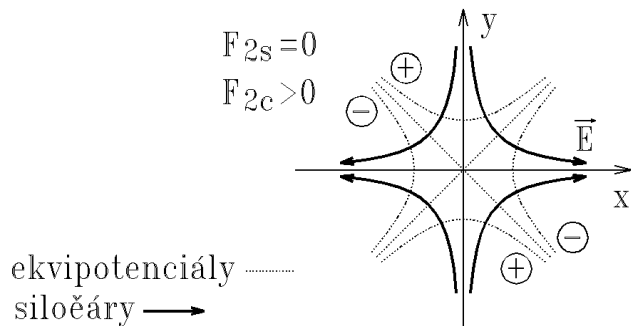
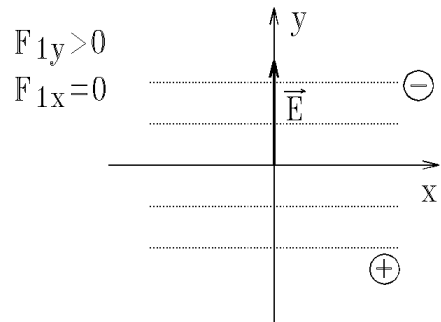
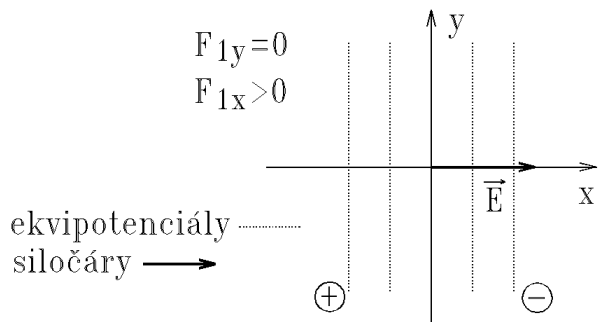
$$\Phi = - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^2 \Phi_0 + \frac{1}{24} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^4 \Phi_0 + \dots$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^2 \right] \Phi_0 + \dots \quad (9.3)$$

$$\Phi = - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^2 \right] \Phi_0 + \dots$$

$$\Phi = - \frac{1}{24} \left[\left(\frac{\partial}{\partial w} \right)^4 - \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right)^4 \right] \Phi_0 + \dots$$

Zde ϕ představuje závislost osového rotačně souměrného potenciálu na souřadnici z , a funkce $F_{ns}(z)$ a $F_{ns}^*(z)$ udávají (ve V/m) průběh osové závislosti pole multipólu. Obecně $F_{nc}(z)$ je osové rozložení pole $2n$ -pólu s osou x v rovině symetrie a $F_{ns}^*(z)$ je s osou x v rovině antisymetrie.



Pro magnetický skalární potenciál platí stejný rozvoj jako pro elektrostatický

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{\partial^n \Psi}{\partial x^n} x^n + \dots \quad (9.4)$$

Magnetický skalární potenciál bývá nejčastěji udáván v ampérech, v optice částic se však používá potenciál jako μ_0 -násobek obvyklého potenciálu (μ_0 je permeabilita vakua). Složky indukce magnetického pole jsou

$$\vec{B}_w = -\vec{\nabla} \Psi + \dots \quad (9.5)$$

Rozvoj potenciálu v souřadnicích x, y dává

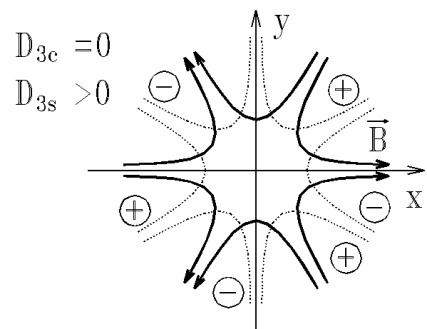
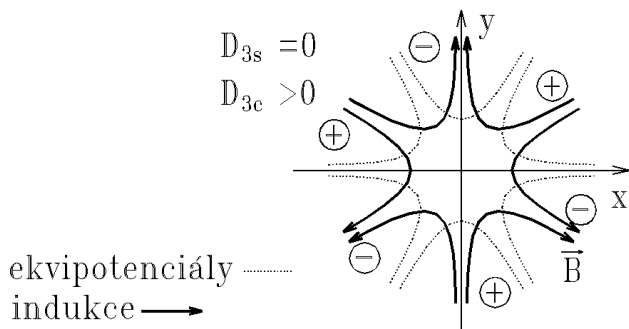
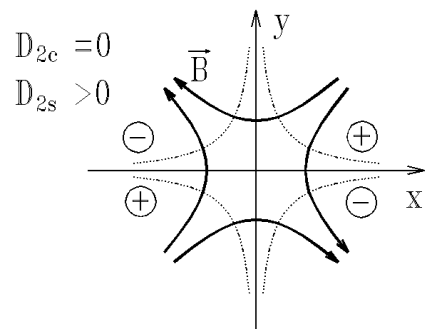
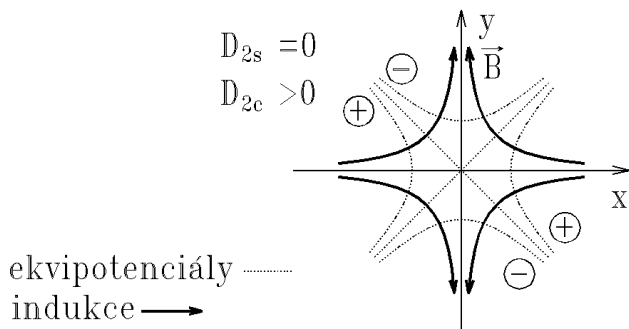
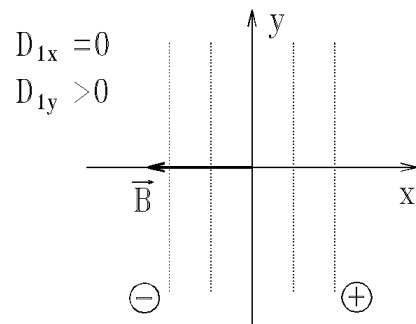
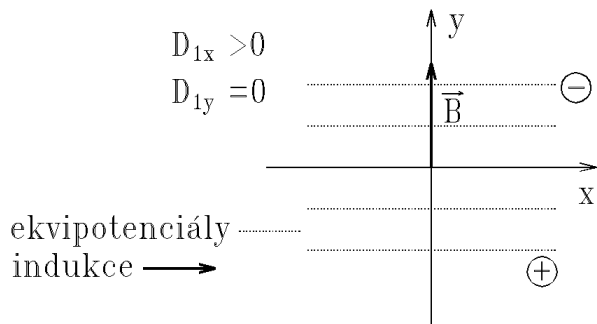
$$\Psi = \int_{-z}^z \left[\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+z^2} + \dots \right] dz$$

$$\Psi = \frac{1}{2} D_{2s} z^2 xy - \dots + \dots$$

$$\Psi = - \dots - \dots - \dots + \dots$$

$$\Psi = - \dots + \dots - \dots + \dots$$
(9.6)

Zde B_z (v jednotkách l - Tesla) je průběh indukce fokusačního pole na ose, D_{2c} a D_{2s} (v T/m) je multipólové osové pole. Podobně jako u elektrostatických multipólů je D_{2c} osové rozložení pole $2n$ -pólu s osou x v rovině symetrie a D_{2s} s osou x v rovině antisymetrie.



9.2. Vztah mezi skalárním a vektorovým potenciálem

Vektor indukce magnetického pole ve vakuu můžeme vyjádřit pomocí vektorového nebo skalárního potenciálu

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (9.7)$$

neboli ve složkách

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \quad (9.8)$$

Z tohoto vyjádření pak můžeme psát

$$\begin{aligned} A_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} B_z \, dx \, dy \, dz \\ A_y &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} B_x \, dx \, dy \, dz \\ A_z &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} B_y \, dx \, dy \, dz \end{aligned}, \quad (9.9)$$

kde $f(x,y,z)$ je libovolná funkce. Pro skalární potenciál pak

$$\Psi = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \rho \, dx \, dy \, dz \quad (9.10)$$

9.3. Lagrangeova a Hamiltonova funkce

Lagrangeova funkce je

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - \Psi(\vec{r}, t) \quad (9.11)$$

Přejdeme k Hamiltonově formulaci. Zobecněný impuls je

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m \dot{\vec{r}} \quad (9.12)$$

Pro Hamiltonovu funkci pak máme

$$K(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + \Psi(\vec{r}, t) \quad (9.13)$$

Protože hamiltonián nezávisí explicitně na čase, přejdeme pomocí transformace souřadnic

$$\left[\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right]_t \rightarrow \left[\begin{matrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{matrix} \right]_t \Rightarrow \left[\begin{matrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{matrix} \right]_{z,t} \quad (9.14)$$

k novému hamiltoniánu, který budeme značit H , tedy

$$H_{z,t} = H(p_x, p_y, p_z, z, t) \quad (9.15)$$

Hamiltonovy rovnice jsou teď

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} \\ \frac{dp_x}{dz} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{aligned} \quad (9.16)$$

Provedeme-li explicitně příslušné derivace v (9.16), dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= \frac{p_x}{m} \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{p_y}{m} \\ \frac{dt}{dz} &= \dots \end{aligned} \quad (9.17)$$

a

$$\begin{aligned} \frac{d p_x}{dz} &= \left\{ \begin{matrix} -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dots \end{matrix} \right\} \\ \frac{d p_y}{dz} &= \left\{ \begin{matrix} -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \dots \end{matrix} \right\} \\ \frac{dK}{dz} &= \dots \end{aligned} \quad (9.18)$$

Přechodem k lagrangiánu

$$M = \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} - \frac{dt}{dz} \quad (9.19)$$

dostaneme

$$M = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 & & \\ & & \\ & & \end{array} \right) \quad (9.20)$$

Tento výsledek lze pochopitelně dostat i přímo: pomocí zákona zachování energie změním parametrizaci, přičemž zachovávající se energie vystupuje jako Lagrangeův multiplikátor.

9.4. Paraxiální rovnice

První členy rozvoje potenciálů rotačně souměrného, dipólového a kvadrupólového pole jsou

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \dots \\ \Phi &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.21)$$

Zde ϕ představuje závislost osového rotačně souměrného potenciálu na souřadnici z , F_c a F_s představují průběh závislosti x a y složky dipólového vychylovacího pole na ose (ve V/m) a funkce F_{2c} a F_{2s} udávají (ve V/m^2) průběh osové závislosti kvadrupólového pole. První členy rozvoje magnetických potenciálů jsou

$$\begin{aligned} \Psi &= -\int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \dots \\ \Psi &= -\int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \dots \end{aligned} \quad (9.22)$$

B_z , D_{1c} a D_{1s} (v jednotkách T - Tesla) je průběh indukce fokusačního a dipólového pole na ose, D_{2c} a D_{2s} (v T/m) je osové rozložení kvadrupólového pole. Pro vektorový potenciál je

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \dots \\ A_z &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \dots \end{aligned}$$

V paraxiální aproximaci ponecháme v Lagrangeově funkci jen nejnižší mocniny souřadnic a jejich derivací, takže

$$M = \dots + \dots + \dots \quad (9.23)$$

kde

$$\begin{aligned} M^0 &= \left[\dots \right] \\ M^1 &= \left[\dots \right] \dots \end{aligned} \quad (9.24)$$

a

$$\begin{aligned}
 M^{\prime} = & \frac{1}{2} \left[\dots \right] \\
 & \frac{e}{2} \left[\dots \right] \\
 & \frac{e^2}{8} \left[\dots + \dots + \dots \right] \\
 & \frac{1}{2} eB \left(\dots \right)
 \end{aligned} \tag{9.25}$$

Pohybové rovnice jsou

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \left[\dots \right] & \left(\dots \right) \\
 e \left[\dots \right] & \\
 \frac{e^2}{4} \left[\dots + \dots \right] & = \dots - \dots
 \end{aligned} \tag{9.26}$$

a

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \left[\dots \right] & \left(\dots \right) \\
 e \left[\dots \right] & \\
 \frac{e^2}{4} \left[\dots + \dots \right] & = \dots - \dots
 \end{aligned} \tag{9.27}$$

Pravé strany rovnic (9.26) a (9.27) musí být také řádu srovnatelného se souřadnicemi a jejich derivacemi. Buď jsou tedy dipólová pole slabá, jak se předpokládá v teorii vychylovacích systémů, nebo je pro energii K splněna Wienova podmínka, tedy

$$\left[\dots \right] \tag{9.28}$$

Zápis rovnic (9.26) a (9.27) lze podstatně zjednodušit. Zavedeme značení

$$F'_n = \dots + \dots = \dots + \dots \tag{9.29}$$

Dále předpokládejme záporně nabitou částici (většinou elektron) a zvolme nulovou hladinu elektrostatického potenciálu tak, abychom mohli položit $K_z = 0$. Označme ještě $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ a rovnice (9.26) a (9.27) nabudou tvaru

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (9.30)$$

10. Paraxiální rovnice ve speciálních případech

10.1. Magnetické pole

Zavedeme značení pro impuls

$$\mathbf{p} = \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \times \mathbf{v} \quad (10.1)$$

Potom je lagrangián

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) \dot{\phi} \\ &= \frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) \dot{\phi} \end{aligned} \quad (10.2)$$

a rovnice trajektorie jsou

$$p \frac{dx}{dz} - \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{1}{R} \frac{dx}{dz} + \frac{1}{R} \frac{dx}{dz} = \frac{1}{R} \frac{dx}{dz} \quad (10.3)$$

a

$$p \frac{dy}{dz} + \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{R} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{R} \frac{dy}{dz} = \frac{1}{R} \frac{dy}{dz} \quad (10.4)$$

Složky magnetické indukce jsou

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{1}{R} \frac{dx}{dz} - \frac{1}{R} \frac{dx}{dz} = 0, \\ B_y &= \frac{1}{R} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{R} \frac{dy}{dz} = \frac{1}{R} \frac{dy}{dz}, \\ B_z &= \dot{\phi} \end{aligned} \quad (10.5)$$

Jsou-li splněny pohybové rovnice, je účinek

$$S = \int^z \left(\frac{1}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} \right) \dot{\phi} \right) dz \quad (10.6)$$

10.1.1. Rotačně souměrné pole

Se značením

$$\theta = - \int^z \dots \quad (10.7)$$

vyjádříme řešení rovnic (9.26) a (9.27) jako

$$\begin{aligned} x^z &= \dots \\ y^z &= \dots \end{aligned} \quad (10.8)$$

kde

$$\begin{aligned} X^z &= \left(\dots \right) \\ Y^z &= \left(\dots \right) \end{aligned} \quad (10.9)$$

a r_a^z, r_b^z jsou dvě nezávislá řešení rovnice trajektorie v rotující souřadné soustavě

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r^z}{dz^2} + \left(\dots \right) r^z &= 0 \\ r_a^z, r_b^z &= \dots \end{aligned} \quad (10.10)$$

Při této volbě je wronskián

$$W = \dots \quad (10.11)$$

Parametrizaci trajektorie musíme pro výpočet účinku obvykle pozměnit oproti (10.10), kde závisí na počátečních hodnotách souřadnic a směrnic. Například parametrizace pomocí počátečních a koncových hodnot souřadnic dává vyjádření

$$\begin{aligned} x^\zeta &= \dots \\ y^\zeta &= \dots \end{aligned} \quad (10.12)$$

V zápisu pomocí komplexních čísel

$$W_{\zeta} = \dots + \dots \quad (10.13)$$

Potom máme pro směrnice v koncovém bodě

$$\begin{aligned} x' &= \dots \\ y' &= \dots \end{aligned} \quad (10.14)$$

a pro směrnice v počátečním bodě

$$\begin{aligned} x' &= \dots \\ y' &= \dots \end{aligned} \quad (10.15)$$

Účinek je (vynecháváme argument z funkcí)

$$S = \dots + \dots \quad (10.16)$$

Jiné vyjádření účinku získáme vyloučením x_0, y_0 ze vztahů

$$W = \dots + \dots \quad (10.17)$$

Je pak

$$W = \dots + \dots \quad (10.18)$$

10.2. Kvadrupólové pole

Lagrangeova funkce je

$$M = \dots + \dots \quad (10.19)$$

a rovnice trajektorie jsou

$$\begin{aligned}
 p \frac{dx}{dz} &= \left(\dots \right) \left(\dots \right) \\
 p \frac{dy}{dz} &= \left(\dots \right) \left(\dots \right)
 \end{aligned}
 \tag{10.20}$$

Složky elektrické intenzity a magnetické indukce jsou

$$\begin{aligned}
 E_x &= \dots + \dots = - \dots - \dots \\
 E_y &= - \dots + \dots = - \dots + \dots \\
 E_z &= \dots = \dots
 \end{aligned}
 \tag{10.21}$$

I v tomto případě platí, že jsou-li splněny pohybové rovnice, je účinek

$$S = \int^z \left(\dots - \dots + \dots \right) dz
 \tag{10.22}$$

11. Odvození čočkové rovnice z H-J rovnice

11.1. Základní vztahy

Lagrangeova funkce je

$$L = \dots \left(\dots \right)^2 - \dots
 \tag{11.1}$$

Zobecněná hybnost je definována jako

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \dots
 \tag{11.2}$$

Hamiltonova funkce je pak

$$H = \dots + \frac{mv^2}{2}
 \tag{11.3}$$

Z (11.3) a (11.2) máme

$$\left(\dots \right)^2 = \dots - \dots
 \tag{11.4}$$

takže odečtením dostaneme

$$\left(\dots \right)^2 = \dots + \dots
 \tag{11.5}$$

Pro kompaktnost zápisu zavedeme značení pro veličinu rozměru hybnosti

$$K_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \quad (11.6)$$

Hamiltonovu – Jacobiho rovnici dostaneme dosazením

$$\vec{p} \rightarrow \vec{K} \quad \rightarrow \hat{H} \quad (11.7)$$

to znamená

$$\vec{v} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial \vec{K}} = \frac{\partial}{\partial \vec{K}} \left(\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \dots \right) \quad (11.8)$$

Jestliže potenciály nezávisí na čase, máme řešení se zachovávající se energií. Přepíšeme pak (11.8) na

$$H_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \dots \quad (11.9)$$

kde

$$H_{\perp} = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \dots = \Phi \quad (11.10)$$

V částicové optice často pokládáme

$$H_{\perp} = \dots \quad (11.11)$$

Při této volbě je kinetická energie rovna záporně vzaté potenciální energii ($I_{\perp} = -\Phi$)

$$K_{\perp} = -\Phi \quad (11.12)$$

tedy na nulové hladině elektrostatického potenciálu má částice nulovou kinetickou energii. Pro částice s $e < 0$ (typicky elektrony) je v klasicky dosažitelné oblasti $\Phi > 0$, pro kladně nabitě částice ($e > 0$) potom $\Phi < 0$, je tedy vždy $- \Phi > 0$. Zavádí se tzv. relativisticky korigovaný potenciál

$$\Phi \rightarrow -\Psi \quad (11.13)$$

Vždy je $- \Phi > 0$ a v nerelativistické limitě $\Phi \rightarrow \Psi$. Hamiltonova – Jacobiho rovnice je pak

$$\vec{v} \rightarrow \dots \quad (11.14)$$

11.2. Model paraxiálních vlastností čočky

Budeme používat válcové souřadnice, optická osa bude osou z. Pro magnetickou čočku předpokládáme vektorový potenciál ve tvaru

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} \quad (11.15)$$

Pro elektrostatickou čočku předpokládáme průběh osového potenciálu ve tvaru

$$\varphi = \left[\dots \right] \quad (11.16)$$

takže potenciál v paraxiální aproximaci bude

$$\Phi = - \dots = \left[\dots \right] \quad (11.17)$$

Relativisticky korigovaný potenciál je pak

$$\Phi = - \dots = \dots = \dots \quad (11.18)$$

U magnetické čočky je $p^2 \rightarrow \dots$, u elektrostatické čočky bude

$$p^2_{r,z} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. \quad (11.19)$$

V nerelativistické aproximaci se vztah (11.19) podstatně zjednoduší na

$$p^2_{r,z} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} \right. \quad (11.20)$$

Řešení Hamiltonovy – Jacobiho rovnice pro volnou částici s hybností p , která vychází z osového bodu v předmětové rovině $r = \dots$ nebo přichází do osového bodu v obrazové rovině $r = \dots$ je

$$S_0 = \dots + \dots \approx \dots + \dots r^2, \quad (11.21)$$

$$S_1 = \dots + \dots \approx \dots + \dots r^2.$$

Účinek má tvar

$$S = \dots + \dots \quad (11.22)$$

budeme tedy účinek v paraxiální aproximaci hledat v tomto tvaru i v oblasti čočky. Hamiltonova – Jacobiho rovnice se v oblasti $U \ll r$ porovnáním členů u mocnin r rozpadá na dvě

$$\vec{\omega} = \dots + \dots \quad (11.23)$$

V krajních rovinách pak bude

$$\omega + \dots = \dots + \dots \quad (11.24)$$

a

$$\omega + \dots = \dots + \dots \quad (11.25)$$

11.3. Čočková rovnice

Nejobvyklejší tvar čočkové rovnice je

$$\frac{f_0}{z_{Hb}} = \dots \quad (11.26)$$

S využitím vyjádření ohniskových dálek

$$f_0 = \dots = \dots \quad (11.27)$$

můžeme rovnici (11.26) přepsat na tvar

$$z_0 = \dots = \dots \quad (11.28)$$

Tento tvar je pro porovnání s výsledky výpočtu pomocí Hamiltonovy – Jacobiho rovnice vhodnější.

11.4. Magnetická čočka

Z rovnice (11.23) máme

$$\omega = \tilde{\omega} + \tilde{\omega}' + \left(\tilde{\omega}'' \right) \quad (11.29)$$

Substituce

$$\sigma = \frac{f' z}{\dots} \quad (11.30)$$

převeďte druhou rovnici v (11.29) na

$$f' z + \left(\tilde{\omega}'' \right) = \dots \quad (11.31)$$

Řešením je tedy

$$f' z = \dots \left(\tilde{\omega}'' \right) + \dots \left(\tilde{\omega}'' \right) \quad (11.32)$$

a účinek v oblasti čočky je

$$S_{=} = \tilde{\omega} + \rho R \left(\tilde{\omega}'' \right) \quad (11.33)$$

Požadavek spojitosti účinku podle (11.21) a (11.33) v rovinách $Z_{=}$ a $Z_{=}$ vede k nepodstatným podmínkám

$$G_{=} = \tilde{\omega} = - \quad (11.34)$$

jednak k podmínkám

$$\dots = \dots \left(\tilde{\omega}'' \right) \quad (11.35)$$

Vyloučení konstanty $\cot \alpha_2'$ nám dá hodnoty

$$f_{o=} = \dots = \dots = \dots \quad (11.36)$$

a

$$\begin{aligned} Z_{Fo=} &= \dots = \dots \\ Z_{Fi=} &= \dots = \dots \end{aligned} \quad (11.37)$$

Pro tenkou čočku máme

$$K \square > \approx \dots \approx \dots \approx \dots \quad (11.38)$$

11.5. Elektrostatická čočka

Z rovnice (11.23) máme

$$\omega = \int_{-L}^z \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{\rho}{r^2} \right) dz = \omega \quad (11.39)$$

kde podle (11.19)

$$p_z = \int_{-L}^z \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{\rho}{r^2} \right) dz \quad (11.40)$$

Úprava druhé rovnice v (11.39) dává

$$\sigma = \int_{-L}^z \frac{1}{r} dz \quad (11.41)$$

Požadavek spojitosti funkce ω v rovinách $Z=$ a $Z=$ vede na

$$G_{z=0} = \int_{-L}^L \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{\rho}{r^2} \right) dz \quad (11.42)$$

a z rovnic (11.24) a (11.25) dostáváme

$$\frac{\rho_2}{L} \int_{-L}^L \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r^2} \right) dz = \int_{-L}^L \left(\frac{\sigma}{r} + \frac{\rho}{r^2} \right) dz \quad (11.43)$$

Potřebné integrály jsou

$$\int_{-L}^L \frac{1}{r} dz = \int_{-L}^L \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} dz \quad (11.44)$$

a

$$\int_{-L}^L \frac{1}{r^2} dz = \int_{-L}^L \frac{1}{z^2 + r^2} dz = \frac{1}{r} \left[\frac{\ln|z+r|}{r} + \frac{\ln|z-r|}{r} \right] \quad (11.45)$$

V nerelativistické limitě pak

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-L}^L \frac{1}{r^2} dz = \int_{-L}^L \frac{1}{z^2} dz \quad (11.46)$$

a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^L \dots = \dots + \dots \quad (11.47)$$

Vyloučením konstanty C_2' získáme čočkovou rovnici s parametry

$$f_o = \dots = \frac{\Delta T}{\dots} \frac{\beta^2 \rho_2}{\dots}, \quad (11.48)$$

$$z_{Ho} = \frac{\gamma T}{\dots} \frac{\beta^2 K_2 \ln \frac{\rho_2}{\rho_+}}{\dots} \quad (11.49)$$

a

$$z_{Hi} = \dots + \frac{\gamma T}{\dots} \frac{\beta^2 K_1 \ln \frac{\rho_2}{\rho_+}}{\dots} \quad (11.50)$$

Nerelativistické výrazy jsou pak

$$f_o = \frac{\gamma T}{\dots} \frac{\beta^2 \rho_2}{\dots} + \dots \quad (11.51)$$

a

$$z_{Ho} = \frac{\Delta T}{\dots} \frac{\beta^2}{\dots} - \frac{\Delta T}{\dots} \frac{\beta^2}{\dots} \quad (11.52)$$