M1101 Matematická analýza I – 10. 01. 2011 – řešení

1. (**6 bodů**) Vypočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-2}\right)^{3n^2}.$$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2-2}\right)^{3n^2} = (1^\infty) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2-2}\right)^{3n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2-2}\right)^{n^2-2}\right]^{\frac{3n^2}{n^2-2}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2-2}} = \mathrm{e}^3$$

2. (**5 bodů**) Vypočtěte limitu funkce:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sin 3x}\right)^2.$$

Řešení:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{\sin 3x}\right)^2 = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{x}{3x}\right)^2 = \left(1\cdot 1\cdot\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

3. (**10 bodů**) Vyšetřete průběh funkce a načrtněte její graf:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Řešení:

- $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, je lichá, nie je periodická
- nulový bod $x = 0$, funkcia je záporná na $(-\infty, -1)$, $(0, 1)$ a kladná na $(-1, 0)$, $(1, \infty)$

- body nespojitosti $x = -1$, $x = 1$ – nespojitosť II. druhu:
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty,$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty.$$
- monotónnosť a extrémy:
$$f'(x) = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$
body podozrivé na extrém – $-1, 1, 0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}$
- konkávnosť, konvexnosť a inflexné body:
$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$
body podozrivé na inflexiu – $-1, 1, 0$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0
f'	$+$	0	$-$	nedef.	$-$	0
f''	$-$	$-$	$-$	nedef.	$+$	0
f	rast.	lok. max.	kles.	nedef.	kles.	inflexia
f	konkáv.	$\frac{-3\sqrt{3}}{2}$	konkáv.	nedef.	konvex.	0

	$(0, 1)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f'	$-$	nedef.	$-$	0	$+$
f''	$-$	nedef.	$+$	$+$	$+$
f	kles.	nedef.	kles.	lok. min.	rast.
f	konkáv.	nedef.	konvex.	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	konvex.

- asymptoty – bez smernice – $x = -1$, $x = 1$
so smernicou – $y = x$ (pre $x \to \infty$ i pre $x \to -\infty$)
- graf – z predchádzajúcej diskusie sa dá už ľahko načrtnúť :).

4. (**5 bodů**) Najděte první derivaci funkce a napište rovnice tečny a normály v bodě $x = 0$:
$$g(x) = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}.$$

Řešení:
$$g(x) = (x^2+1)^{\operatorname{arctg} x} = \mathrm{e}^{\ln(x^2+1)^{\operatorname{arctg} x}} = \mathrm{e}^{\operatorname{arctg} x \cdot \ln(x^2+1)}$$

$$g'(x)=\left(\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x^2+1)}\right)'=\mathrm{e}^{\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x^2+1)}\left(\operatorname{arctg}x\cdot\ln(x^2+1)\right)'=$$
$$=(x^2+1)^{\operatorname{arctg}x}\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\right)$$

Rovnica tečny v bode $x=0$:

$$y=g'(0)x+g(0)\implies y=1$$

Normála v bode $x=0$ je kolmica na tečnu, teda rovnica normály je $x=0$.

5. (**8 bodů**) Integrujte:

$$\int\frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Návod: Integrál vhodně rozdělte na dva integrály, výraz pod odmocninou upravte na čtverec.

Řešení:

$$\int\frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{-2x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x-9\int\frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$\int\frac{-2x+1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c}t=1+x-x^2\\ \mathrm{d}t=(1-2x)\mathrm{d}x\end{array}\right|=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=2\sqrt{t}+C=$$
$$=2\sqrt{1+x-x^2}+C.$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x=\arcsin\frac{x-1/2}{\sqrt{5}/2}+C.$$
$$\int\frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x=-2\sqrt{1+x-x^2}-9\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

6. (**6 bodů**) Vypočtěte obsah elementární oblasti M:

$$M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le\pi,\quad x\le y\le x+\sin^2 x\}.$$

Řešení:

$$S(M)=\int_0^\pi\left[\sin^2 x+x-x\right]\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$