

8. AFINNÉ PODPRIESTORY A AFINNÉ ZOBRAZENIA

Keď sme v paragrafe 4.1, odvolávajúc sa na geometrický názor, ilustrovali pojem lineárneho podpriestoru, ako príklad sme uviedli, že netriviálne vlastné lineárne podpriestory „nášho“ trojrozmerného vektorového priestoru \mathbb{R}^3 sú práve priamky a roviny *prechádzajúce počiatkom 0*. Kritickejší čitateľ mohol vtedy oprávnene zapochybovať o adekvátnosti a prirodzenosti tohto pojmu, či aspoň pocítiť potrebu zaviesť taký pojem podpriestoru, ktorý by napr. v \mathbb{R}^3 zahŕňal *všetky* priamky a roviny, nielen tie prechádzajúce počiatkom. Podobne sme v paragrafe 6.1 hneď po definícii pojmu lineárneho zobrazenia boli nútení urobiť poznámku o jeho odlišnosti od pojmu lineárnej funkcie používaného v matematickej analýze. Vzápätí sme prijali záväzok, že sa s týmto nedostatkom v príhodný čas vyrovnáme.

Ten čas práve nastal. Spomínané medzery zaplníme definíciami pojmu *afinného podpriestoru* alebo tiež *lineárnej variety* a pojmu *afinného zobrazenia*. *Afinita* znamená *príbuznosť, spriaznenosť*. Čitateľ sám uvidí, že objekty označené prívlastkom „afinný“ sú úzko spriaznené so zodpovedajúcimi objektmi nesúcimi prívlastok „lineárny“. Ťažiskom kapitoly bude klasifikácia vzájomnej polohy afinných podpriestorov vo vektorovom priestore.

8.1. Body a vektory

Na vektory, čiže na prvky vektorových priestorov – aspoň pokiaľ ide o konečnorozmerné vektorové priestory nad \mathbb{R} , – sa dívame ako na orientované úsečky s počiatkom v bode $\mathbf{0}$. Už táto veta prezrádza, že *pôvodne* sa na prvky takéhoto priestoru dívame ako na *body* a celý priestor chápeme ako *homogénny*, t. j. všetky body považujeme za rovnocenné a nevyčleňujeme v ňom nijaký privilegovaný bod za počiatok. Až na základe tohto pôvodného porozumenia dokážeme po vyčlenení nejakého počiatku O (ktorým sa môže stať ľubovoľný bod homogénneho priestoru) nahradiť bod A príslušného priestoru orientovanou úsečkou \overrightarrow{OA} a následne abstrahovať od jej polohy, to znamená uvidieť za ňou *vektor* $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, daný len jej veľkosťou, smerom a orientáciou, ktorý možno umiestniť do ľubovoľného bodu priestoru – nielen do počiatku.

Afinným priestorom nad poľom K rozumieme vektorový priestor V nad týmto poľom, pri pohľade na ktorý sme sa vrátili k onomu pôvodnému porozumeniu jeho štruktúre a prvkom. Tie sa z vektorov stali opäť bodmi a počiatok (t. j. nulový vektor) stratil svoje výsadné postavenie – stal sa z neho bod ako každý iný.

Formálnu definíciu afinného priestoru nad poľom K tu uvádzať nebudeme. Sme totiž toho názoru, že matematická formalizácia rozdielu medzi oboma spomínanými pohľadmi na prvky vektorového priestoru by v tejto chvíli vniesla do veci viac zmätku než svetla. Celkom postačí, keď úlohu prepínača medzi oboma pohľadmi zveríme dvojiciam slov „bod“ – „vektor“ a „afinný“ – „lineárny“, prípadne „afinný“ – „vektorový“. Na druhej

strane však pred nami vyvstáva potreba formálnej definície podmnožín vektorového priestoru, ktoré sú „vernými kópiami“ lineárnych podpriestorov – nemusia však prechádzať počiatkom, ale môžu byť umiestnené „kdekoľvek“.

8.2. Afinné podpriestory

V celom tomto a nasledujúcich dvoch paragrafoch V označuje nejaký pevný, no inak ľubovoľný, vektorový priestor nad poľom K a m, n sú prirodzené čísla.

Kvôli pohodliu čitateľa budeme písmenami $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ (možno s indexmi) značiť výlučne body, $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ označujú zasa výlučne vektory, kým $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ môžu podľa potreby označovať body i vektory. Taktiež sa dohodneme, že rozdiel dvoch bodov budeme chápať ako vektor, kým súčet bodu a vektora ako bod.

Nech $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$. *Priamkou* prechádzajúcou alebo tiež určenou bodmi \mathbf{p}, \mathbf{q} rozumíme množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, ktorú dostaneme tak, že do bodu \mathbf{p} umiestnime všetky možné skalárne násobky vektora $\mathbf{q} - \mathbf{p}$. Typický bod priamky $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ má teda tvar

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) = (1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q},$$

kde $t \in K$, čiže

$$\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \{s\mathbf{p} + t\mathbf{q}; s, t \in K \text{ \& } s + t = 1\} \subseteq V.$$

Tento výraz má, samozrejme, zmysel aj pre $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, vtedy však nejde o priamku ale o jednobodovú množinu $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = \{\mathbf{p}\}$. Z uvedeného tvaru ihneď vidíme, že

$$\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \ell(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

pre ľubovoľné $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$.

Lineárnu kombináciu, t. j. výraz tvaru

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \dots + t_n\mathbf{p}_n = \sum_{i=0}^n t_i\mathbf{p}_i,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n \in V$, $t_0, t_1, \dots, t_n \in K$, nazývame *afinnou kombináciou* bodov $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$, ak platí $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$. Výsledok afinnej kombinácie bodov budeme chápať ako bod; iné lineárne kombinácie bodov ako afinné sa v našich úvahách nevyskytnú. (Ešte si všimnite, že každá afinná kombinácia je neprázdna, t. j. obsahuje aspoň jeden člen.)

Neprázdnu podmnožinu M vektorového priestoru V nazývame jeho *afinným podpriestorom*, prípadne *lineárnou varietou* vo V , ak pre všetky body $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in M$ a každý skalár $s \in K$ platí

$$s\mathbf{p} + (1 - s)\mathbf{q} \in M \quad \text{a} \quad \mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{r} \in M.$$

Inak povedané, $\emptyset \neq M \subseteq V$ je afinný podpriestor, ak M je uzavretá vzhľadom na afinné kombinácie uvedených dvoch typov. Prvá podmienka znamená, že pre všetky $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$ platí $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \subseteq M$, t. j. M s každou dvojicou bodov obsahuje celú priamku nimi určenú. Druhú podmienku dodávame len kvôli poliam charakteristiky 2; ak $\text{char } K \neq 2$, tak už vyplýva z prvej, takže je vlastne zbytočná. Na druhej strane, napr. vo vektorovom priestore V nad poľom \mathbb{Z}_2 pre všetky body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$ platí $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}\}$, teda len prvej podmienke by vyhovovala *každá podmnožina* $M \subseteq V$. Podrobnejšie o tom pojednáva nasledujúce tvrdenie, ktoré je očividne analógiou tvrdenia 4.1.2.

8.2.1. Tvrdenie. Pre ľubovoľnú neprázdnu množinu $M \subseteq V$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:

- (i) M je afinný podpriestor vo V , t.j. pre ľubovoľné $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in M$, $s \in K$ platí $s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q} \in M$ a $\mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{r} \in M$;
- (ii) M je uzavretá vzhľadom na ľubovoľné afinné kombinácie trojíc bodov, t.j. pre všetky $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in M$, $s, t \in K$ platí $s\mathbf{p} + t\mathbf{q} + (1-s-t)\mathbf{r} \in M$;
- (iii) M je uzavretá vzhľadom na akékoľvek afinné kombinácie, t.j. pre všetky $n \in \mathbb{N}$, body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in M$ a skaláry $t_0, t_1, \dots, t_n \in K$ také, že $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$, platí $t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \dots + t_n\mathbf{p}_n \in M$;

Ak $\text{char } K \neq 2$, tak uvedené podmienky sú navyše ekvivalentné s podmienkou

- (i⁻) pre ľubovoľné $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in M$, $s \in K$ platí $s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q} \in M$.

Dôkaz. Implikácie (iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i) sú zrejmé aj bez predpokladu $\text{char } K \neq 2$. Dokážeme implikáciu (i) \Rightarrow (iii); pri dôkaze vyjde navyše najavo, že pre $\text{char } K \neq 2$ stačí na odvodenie záveru (iii) slabšia podmienka (i⁻) miesto (i).

Predpokladajme (i) (teda tým skôr (i⁻)) a pripušíme, že podmienka (iii) neplatí. Označme n najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré to nastane. Potom $n \geq 2$ a pre všetky $k < n$ podmienka (iii) platí, čiže M je uzavretá na afinné kombinácie $\leq n$ bodov. Nech $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n \in M$, $t_0, \dots, t_n \in K$ sú také, že $t_0 + \dots + t_n = 1$ a $t_0\mathbf{p}_0 + \dots + t_n\mathbf{p}_n \notin M$. Treba zvážiť dve možnosti.

(a) Ak $t_i \neq 1$ pre aspoň jedno $i \leq n$, tak bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $t_0 \neq 1$. Označme

$$\mathbf{q} = \frac{t_1}{1-t_0}\mathbf{p}_1 + \dots + \frac{t_n}{1-t_0}\mathbf{p}_n.$$

Keďže

$$\frac{t_1}{1-t_0} + \dots + \frac{t_n}{1-t_0} = \frac{t_1 + \dots + t_n}{1-t_0} = 1,$$

$\mathbf{q} \in M$, lebo \mathbf{q} je afinnou kombináciou n bodov z M . Potom

$$t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \dots + t_n\mathbf{p}_n = t_0\mathbf{p}_0 + (1-t_0)\mathbf{q} \in M$$

vyplýva už z podmienky (i⁻). To je však spor.

(b) Ak $t_i = 1$ pre všetky $i \leq n$, tak ide o afinnú kombináciu $\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_n$ a $t_1 + \dots + t_{n-1} = -1$. Potom $\mathbf{q} = -\mathbf{p}_1 - \dots - \mathbf{p}_{n-1}$ je afinnou kombináciou $n-1$ bodov z M , teda $\mathbf{q} \in M$. Podľa druhej z podmienok v (i) máme

$$\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_0 - \mathbf{q} + \mathbf{p}_n \in M,$$

čo je opäť spor.

Ak $\text{char } K \neq 2$, možno sa zaobísť bez tejto podmienky. Keďže $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, už z (i⁻) vyplýva $\frac{1}{2}\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_n \in M$. Nakoľko $2 + (-1) = 1$, opäť len z (i⁻) dostávame

$$\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 + \dots + \mathbf{p}_{n-1} + \mathbf{p}_n = 2\left(\frac{1}{2}\mathbf{p}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{p}_n\right) - \mathbf{q} \in M.$$

Poznámka. Ak $\text{char } K = \infty$, tak možnosť (b) zrejme nemôže nastať, teda v uvedenom dôkaze stačí uvažovať len možnosť (a). Zároveň vidno, že v druhej časti bodu (b) je podstatný predpoklad $\text{char } K \neq 2$. Bez neho by sme totiž nevedeli zaručiť existenciu prvku $1/2 = 2^{-1} \in K$ inverzného k prvku $2 = 1 + 1 \in K$.

Nasledujúca veta ukazuje, že afinné podpriestory skutočne nie sú ničím iným, než lineárnymi podpriestormi posunutými do ľubovoľného bodu príslušného vektorového priestoru.

8.2.2. Veta. *Nech $M \subseteq V$. Potom M je afinný podpriestor vo V práve vtedy, keď existuje bod $\mathbf{p} \in V$ a lineárny podpriestor $S \subseteq V$ taký, že*

$$M = \mathbf{p} + S = \{\mathbf{p} + \mathbf{u}; \mathbf{u} \in S\}.$$

V tom prípade pre všetky $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in M$, $\mathbf{u} \in S$ platí

$$\begin{aligned} \mathbf{q} - \mathbf{r} &\in S, & \mathbf{q} + \mathbf{u} &\in M, & M &= \mathbf{q} + S, \\ S &= \{\mathbf{x} - \mathbf{q}; \mathbf{x} \in M\} = \{\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\}. \end{aligned}$$

Dôkaz. Nech $M \subseteq V$ je afinný podpriestor a $\mathbf{p} \in M$ je jeho ľubovoľný bod. Položme

$$S = \{\mathbf{x} - \mathbf{p}; \mathbf{x} \in M\}.$$

Potom zrejme $M = \mathbf{p} + S$. Stačí teda dokázať, že $S \subseteq V$ je lineárny podpriestor. Keďže $\mathbf{p} \in M$, platí $\mathbf{0} = \mathbf{p} - \mathbf{p} \in S$. Ukážeme uzavretosť S na lineárne kombinácie. Nech $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, $a, b \in K$. Potom $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{p}$, $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{p}$ pre nejaké $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$. Jednoduchý výpočet dáva

$$a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = a(\mathbf{x} - \mathbf{p}) + b(\mathbf{y} - \mathbf{p}) = a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + (1 - a - b)\mathbf{p} - \mathbf{p}.$$

Prvé tri sčítance tvoria afinnú kombináciu bodov z M , teda $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + (1 - a - b)\mathbf{p} \in M$; preto tiež $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \in S$.

Nech naopak $M = \mathbf{p} + S$ pre nejaký bod $\mathbf{p} \in V$ a lineárny podpriestor $S \subseteq V$. Podľa tvrdenia 8.2.1 stačí ukázať uzavretosť M na afinné kombinácie trojíc. Nech $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$, $s, t \in K$. Potom $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{u}$, $\mathbf{y} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$, $\mathbf{z} = \mathbf{p} + \mathbf{w}$ pre nejaké $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in S$. Počítajme

$$\begin{aligned} s\mathbf{x} + t\mathbf{y} + (1 - s - t)\mathbf{z} &= s(\mathbf{p} + \mathbf{u}) + t(\mathbf{p} + \mathbf{v}) + (1 - s - t)(\mathbf{p} + \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{p} + s\mathbf{u} + t\mathbf{v} + (1 - s - t)\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Keďže $t\mathbf{u} + s\mathbf{v} + (1 - s - t)\mathbf{w} \in S$, dostávame $s\mathbf{x} + t\mathbf{y} + (1 - s - t)\mathbf{z} \in M$.

Ďalšie tri podmienky možno teraz overiť priamymi výpočtami, ktoré prenechávame čitateľovi; štvrtá z nich okamžite vyplýva.

8.2.3. Dôsledok. Každý lineárny podpriestor S vektorového priestoru V je jeho afinným podpriestorom. Afinný podpriestor M vektorového priestoru V je jeho lineárnym podpriestorom práve vtedy, keď $\mathbf{0} \in M$.

Zameraním alebo tiež smerovým podpriestorom afinného podpriestoru $M \subseteq V$ nazývame lineárny podpriestor

$$\text{Dir } M = \{\mathbf{x} - \mathbf{y}; \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M\} \subseteq V.$$

(Označenie pochádza z anglického slova *direction*). Podľa vety 8.2.2 je $\text{Dir } M$ jediný lineárny podpriestor vo V taký, že $M = \mathbf{p} + \text{Dir } M$ pre nejaké (pre každé) $\mathbf{p} \in M$. Taktiež pre každé $\mathbf{p} \in M$ platí

$$\text{Dir } M = \{\mathbf{x} - \mathbf{p}; \mathbf{x} \in M\}.$$

Pre každú usporiadanú $(n + 1)$ -ticu bodov $(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$, vektorového priestoru V , prípadne pre jeho konečnú neprázdnu podmnožinu $\{\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n\}$, označme

$$\ell(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n) = \{t_0\mathbf{p}_0 + \dots + t_n\mathbf{p}_n; t_0, \dots, t_n \in K \text{ \& } t_0 + \dots + t_n = 1\}$$

množinu všetkých afinných kombinácií bodov $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$. Z práve dokázaného tvrdenia vyplýva, že $\ell(\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n)$ je najmenší afinný podpriestor vo V , ktorý obsahuje všetky body $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$; nazývame ho *afinný obal* bodov $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$ alebo tiež *afinný podpriestor generovaný* bodmi $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n$.

Vo všeobecnosti možno pre ľubovoľnú (i nekonečnú) neprázdnu množinu $X \subseteq V$ definovať jej *afinný obal* $\ell(X)$, nazývaný tiež *afinný podpriestor generovaný* množinou X , ako množinu všetkých (konečných) afinných kombinácií bodov z X . Opäť platí, že $\ell(X)$ je najmenší afinný podpriestor vo V , pre ktorý $X \subseteq \ell(X)$.

8.2.4. Tvrdenie. Nech $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in V$. Potom

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= \mathbf{p}_0 + [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0], \\ \text{Dir } \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) &= [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0]. \end{aligned}$$

Dôkaz prenechávame ako cvičenie čitateľovi.

Dimenziou alebo tiež *rozmerom* afinného podpriestoru $M \subseteq V$, označenie $\dim M$, nazývame dimenziu jeho zamerania, teda

$$\dim M = \dim \text{Dir } M.$$

Body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ vektorového priestoru V nazývame *afinne nezávislé*, ak vektory $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0$ sú lineárne nezávislé. Z nasledujúceho očividného tvrdenia okrem iného vyplýva, že body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in V$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď pre nejaké (pre každé) $0 \leq k \leq n$ vektory $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_k$, kde $0 \leq j \leq n$ a $j \neq k$, sú lineárne nezávislé. Inak povedané, platí

8.2.5. Tvrdenie. *Body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in V$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď*

$$\dim \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = n$$

Zrejme 0-rozmerné afinné podpriestory vo V sú práve všetky body $\mathbf{p} \in V$ (presnejšie, všetky jednobodové podmnožiny vo V). Tieto afinné podpriestory nazývame tiež *triviálne*. Jednorozmerné afinné podpriestory vo V nazývame *priamkami*. Každá priamka má naozaj tvar $\ell(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ pre nejaké afinne nezávislé (t. j. rôzne) body $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$. Dvojrozmerné afinné podpriestory vo V nazývame *rovinami*. Taktiež samotný priestor V je svojim *nevlastným* afinným podpriestorom. Ak $\dim V = n$, tak $(n - 1)$ -rozmerné afinné podpriestory vo V nazývame *nadrovinami*.

Kým pojmy „bod“, „priamka“ a „rovina“ sú absolútne v tom zmysle, že závisia len na dimenzii príslušného afinného podpriestoru, pojem nadroviny je relatívny, lebo závisí na vzťahu dimenzií afinného podpriestoru a celého priestoru. Napríklad ak $\dim V = 1$ (t. j. ak samotné V je priamka), tak každý bod vo V je zároveň nadrovinou. Nadrovinami v dvojrozmernom priestore (t. j. v rovine) sú zasa všetky priamky. V trojrozmernom priestore V pojmy roviny a nadroviny splývajú. V štvorrozmernom priestore sú zasa nadrovinami trojrozmerné podpriestory; atď. Ešte poznamenajme, že v 0-rozmernom (t. j. jednobodovom) priestore V niet priamok, rovín ani nadrovín.

8.3. Prienik a spojenie afinných podpriestorov

V tomto paragrafe mierne zovšeobecníme niektoré výsledky paragrafov 4.3 a 5.4. o prieniku a súčte lineárnych podpriestorov do podoby použiteľnej pre afinné podpriestory.

8.3.1. Tvrdenie. *Nech $M, N \subseteq V$ sú afinné podpriestory. Potom $M \cap N$ je afinný podpriestor vo V práve vtedy, keď $M \cap N \neq \emptyset$. V tom prípade*

$$\text{Dir}(M \cap N) = \text{Dir } M \cap \text{Dir } N.$$

Dôkaz. Ak $M \cap N = \emptyset$, tak to samozrejme nie je afinný podpriestor. Nech $M \cap N \neq \emptyset$. Označme $S = \text{Dir } M$, $T = \text{Dir } N$ príslušné smerové podpriestory. Zvoľme ľubovoľný bod $\mathbf{p} \in M \cap N$. Stačí dokázať rovnosť

$$M \cap N = \mathbf{p} + (S \cap T).$$

Zvoľme $\mathbf{q} \in M \cap N$. K nemu existujú $\mathbf{u} \in S$, $\mathbf{v} \in T$ také, že $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{u} = \mathbf{p} + \mathbf{v}$. Potom $\mathbf{u} = \mathbf{v} \in S \cap T$ a $\mathbf{q} \in \mathbf{p} + (S \cap T)$. Teda $M \cap N \subseteq \mathbf{p} + (S \cap T)$. Obrátená inklúzia je triviálna.

Neprázdnosť prieniku $M \cap N$ možno zaručiť za predpokladu, že lineárny priestor $\text{Dir } M + \text{Dir } N$ je „dosť veľký“.

8.3.2. Tvrdenie. *Nech $M, N \subseteq V$ sú afinné podpriestory. Potom*

$$\text{Dir } M + \text{Dir } N = V \Rightarrow M \cap N \neq \emptyset.$$

Dôkaz. Označme $S = \text{Dir } M$, $T = \text{Dir } N$. Zvoľme ľubovoľné $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$. Keďže $S + T = V$, existujú vektory $\mathbf{u} \in S$, $\mathbf{v} \in T$ také, že $\mathbf{q} - \mathbf{p} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Potom

$$\mathbf{q} = \mathbf{p} + (\mathbf{q} - \mathbf{p}) = \mathbf{p} + \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

V dôsledku toho $\mathbf{p} + \mathbf{u} = \mathbf{q} - \mathbf{v} \in M \cap N$, lebo $\mathbf{p} + \mathbf{u} \in M$ a $\mathbf{q} - \mathbf{v} \in N$.

Spojením afinných podpriestorov $M, N \subseteq V$, označenie $M \sqcup N$, nazývame afinný obal ich zjednotenia. Teda

$$M \sqcup N = \ell(M \cup N).$$

Zrejme $M \sqcup N$ je najmenší afinný podpriestor vo V , ktorý obsahuje M aj N , a pre lineárne podpriestory $S, T \subseteq V$ platí $S \sqcup T = S + T$.

8.3.3. Tvrdenie. *Nech $M, N \subseteq V$ sú afinné podpriestory.*

(a) *Ak $M \cap N \neq \emptyset$, tak*

$$\text{Dir}(M \sqcup N) = \text{Dir } M + \text{Dir } N,$$

$$M \sqcup N = M + \text{Dir } N = N + \text{Dir } M.$$

(b) *Ak $M \cap N = \emptyset$, tak pre ľubovoľné $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ platí*

$$\text{Dir}(M \sqcup N) = [\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \text{Dir } M + \text{Dir } N,$$

$$M \sqcup N = M + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \text{Dir } N) = N + ([\mathbf{q} - \mathbf{p}] + \text{Dir } M).$$

Poznámka. Stojí za zmienku, že obe rovnosti z (b) sú splnené aj za predpokladu $M \cap N \neq \emptyset$. V tom prípade však pre ľubovoľné $\mathbf{r} \in M \cap N$ platí

$$\mathbf{q} - \mathbf{p} = (\mathbf{r} - \mathbf{p}) + (\mathbf{q} - \mathbf{r}) \in \text{Dir } M + \text{Dir } N,$$

takže vektor $\mathbf{q} - \mathbf{p}$ možno v príslušných vzťahoch vynechať. Rovnako tomu bude i v príklade 8.3.5.

Dôkaz. Stačí dokázať len (b), lebo (a) z neho vyplýva vo svetle našej poznámky. Označme $S = \text{Dir } M$, $T = \text{Dir } N$ a zvoľme $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$. Budeme dokazovať iba rovnosť

$$M \sqcup N = \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}] + S + T;$$

zvyšok je už jej bezprostredným dôsledkom.

Každý bod $\mathbf{r} \in M \sqcup N$ je afinnou kombináciou

$$\mathbf{r} = \sum_{i=0}^m s_i \mathbf{p}_i + \sum_{j=0}^n t_j \mathbf{q}_j$$

kde $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_m \in M$, $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_n \in M$, $s_0, \dots, s_m, t_0, \dots, t_n \in K$ a $\sum_i s_i + \sum_j t_j = 1$. Potom $\mathbf{p}_i - \mathbf{p} \in S$, $\mathbf{q}_j - \mathbf{q} \in T$ pre $i \leq m, j \leq n$. Označme $s = s_0 + \dots + s_m$, $t = t_0 + \dots + t_n$ a počítajme

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (s\mathbf{p} + t\mathbf{q}) + \sum_{i=0}^m s_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) + \sum_{j=0}^n t_j(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}) \\ &= \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + \sum_{i=0}^m s_i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) + \sum_{j=0}^n t_j(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}) \in \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}] + S + T, \end{aligned}$$

keďže $s = 1 - t$. Teda $M \sqcup N \subseteq \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}] + S + T$. Obrátená inklúzia je triviálna.

8.3.4. Dôsledok. *Nech $M, N \subseteq V$ sú konečnorozmerné afinné podpriestory. Potom*

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim M + \dim N - \dim(M \cap N), & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim M + \dim N - \dim(\text{Dir } M \cap \text{Dir } N) + 1, & \text{ak } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

8.3.5. Príklad. Vo vektorovom priestore V uvažujme konečnorozmerné afinné podpriestory

$$M = \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m], \quad N = \mathbf{q} + [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n].$$

Potom

$$M \sqcup N = \begin{cases} \mathbf{p} + [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ \mathbf{p} + [\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], & \text{ak } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} \dim[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ \dim[\mathbf{q} - \mathbf{p}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n], & \text{ak } M \cap N = \emptyset. \end{cases}$$

Ak navyše predpokladáme, že tak vektory $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$ ako aj vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ sú lineárne nezávislé, tak

$$\dim(M \sqcup N) = \begin{cases} m + n - k, & \text{ak } M \cap N \neq \emptyset, \\ m + n - k + 1, & \text{ak } M \cap N = \emptyset, \end{cases}$$

kde $k = \dim([\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m] \cap [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n])$.

8.3.6. Príklad. V stĺpcovom priestore \mathbb{R}^4 sú dané vektory $\mathbf{x} = (1, 2, 3, 4)^T$, $\mathbf{y} = (0, -3, 1, -1)^T$, $\mathbf{z} = (1, 1, 0, 0)^T$, $\mathbf{u} = (0, -2, 4, 3)^T$, $\mathbf{v} = (2, 6, 2, 5)^T$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1, 1)^T$ a bližšie neurčené body \mathbf{p}, \mathbf{q} . Potom $S = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$, $T = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ sú lineárne podpriestory a $M = \mathbf{p} + S$, $N = \mathbf{q} + N$ sú afinné podpriestory v \mathbb{R}^4 . Nájdeme dimenzie lineárnych podpriestorov $S + T$, $S \cap T$ a afinných podpriestorov $M \cap N$, $M \sqcup N$ v závislosti na \mathbf{p}, \mathbf{q} .

Lineárny podpriestor $S + T$ je generovaný stĺpcami blokovej matice

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 3 & 5 & 1 \end{array} \right),$$

pričom stĺpce ľavého bloku generujú lineárny podpriestor S a stĺpce pravého bloku lineárny podpriestor T . Táto matica je riadkovo ekvivalentná s blokovou maticou

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

v stupňovitom tvare, ktorej riadky majú vedúce prvky v stĺpcoch 1, 2, 3 a 6. Hneď vidíme, že vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ tvoria bázu S a vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}$ bázu $S+T$. Doupravovaním pravého bloku na riadkovo ekvivalentný stupňovitý tvar

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sa možno presvedčiť, že i vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sú lineárne nezávislé, teda tvoria bázu T . Zhrnutím dostávame $\dim S = \dim T = 3$, $\dim(S+T) = 4$. Odtiaľ podľa vety 5.4.1 vyplýva $\dim(S \cap T) = 3 + 3 - 4 = 2$. Takže $S+T = \mathbb{R}^4$, a bez toho, že by sme čokoľvek ďalej počítali, z tvrdenia 8.3.2 vieme, že nezávisle na bodoch \mathbf{p}, \mathbf{q} platí $M \cap N \neq \emptyset$. Preto $\dim(M \cap N) = \dim(S \cap T) = 2$ podľa tvrdenia 8.3.1. S použitím tvrdenia 8.3.3 a dôsledku 8.3.4 dostávame $\dim(M \sqcup N) = \dim(S+T) = 4$.

8.4. Vzájomná poloha afinných podpriestorov

V tomto paragrafe podáme sľúbenú klasifikáciu vzájomnej polohy dvojíc netriviálnych vlastných afinných podpriestorov vo vektorovom priestore V . (Hoci to nie je z logického hľadiska nevyhnutné, aby sme sa vyhli triedeniu trivialít, body a celý priestor V z našich úvah vylučujeme.) Táto téma prirodzeným spôsobom rozširuje látku stredoškolskej geometrie, zahŕňajúcu klasifikáciu vzájomnej polohy priamok v rovine resp. priamok a rovín v (trojrozmernom) priestore.

Polohu netriviálnych vlastných lineárnych variet $M, N \subseteq V$ budeme klasifikovať na základe dvoch kritérií:

(A) Ak platí $\text{Dir } M \subseteq \text{Dir } N \vee \text{Dir } N \subseteq \text{Dir } M$, hovoríme, že M, N sú *rovnobežné* a píšeme $M \parallel N$.

V opačnom prípade, t. j. ak platí $\text{Dir } M \not\subseteq \text{Dir } N \ \& \ \text{Dir } N \not\subseteq \text{Dir } M$, hovoríme, že M, N *nie sú rovnobežné*, a píšeme $M \not\parallel N$.

(B) Ak platí $M \cap N \neq \emptyset$, hovoríme, že M, N *sa pretínajú*.

V opačnom prípade, t. j. ak $M \cap N = \emptyset$, hovoríme, že M, N *sa nepretínajú*, alebo, že sú *disjunktné*.

Celkovo teda dostávame štyri možnosti:

(1) $M \parallel N \ \& \ M \cap N \neq \emptyset$, čiže M, N sú rovnobežné a pretínajú sa.

Ľahko možno nahliadnuť, že v takom prípade platí $\text{Dir } M \subseteq \text{Dir } N \Leftrightarrow M \subseteq N$ a $\text{Dir } N \subseteq \text{Dir } M \Leftrightarrow N \subseteq M$. Teda $M \subseteq N$ alebo $N \subseteq M$. Hovoríme, že jedna z lineárnych variet M, N je *podvarietou* druhej, alebo, že M, N sú vo vzťahu *inklúzie*.

(2) $M \parallel N \ \& \ M \cap N = \emptyset$, čiže M, N sú rovnobežné a nepretínajú sa.

Tento prípad nazývame vzťahom *pravej rovnobežnosti*.

(3) $M \not\parallel N \ \& \ M \cap N \neq \emptyset$, čiže M, N nie sú rovnobežné a pretínajú sa.

Hovoríme, že M, N sú *rôznobežné*.

(4) $M \not\parallel N \ \& \ M \cap N = \emptyset$, čiže M, N nie sú rovnobežné a nepretínajú sa.

V tomto prípade ešte rozlišujeme dve ďalšie možnosti:

(4a) Ak $\text{Dir } M \cap \text{Dir } N = \{\mathbf{0}\}$, hovoríme, že M, N sú *mimobežné*.

(4b) Ak $\text{Dir } M \cap \text{Dir } N \neq \{\mathbf{0}\}$, hovoríme, že M, N sú *čiastočne rovnobežné*.

Prípady (1), (2), (3) sú nám dobre známe zo stredoškolskej planimetrie, s prípadom (4) sa však v rovine stretnúť nemožno – dve priamky v rovine buď splývajú alebo sú to pravé rovnobežky alebo rôznobežky. Zo stredoškolskej stereometrie, okrem prípadov (1), (2), (3), ktoré sa realizujú vo vzájomných polohách dvojíc priamok, dvojíc rovín ako i priamky a roviny v trojrozmernom priestore, poznáme aj prípad (4a) – ide o prípad mimobežných priamok. S prípadom (4b), t. j. s prípadom čiastočnej rovnobežnosti sme sa však dosiaľ nestretli a nedokážeme ho spojiť so žiadnou názornou geometrickou predstavou. Nie je to náhoda. Platí totiž nasledujúce tvrdenie.

8.4.1. Tvrdenie. *Nech $M, N \subseteq V$ sú čiastočne rovnobežné lineárne variety. Potom $\dim M \geq 2, \dim N \geq 2$ a $\dim V \geq 4$.*

Dôkaz. Označme $S = \text{Dir } M, T = \text{Dir } N$. Potom $S \cap T$ je netriviálny vlastný lineárny podpriestor každého zo zameraní S, T . Teda $\dim(S \cap T) \geq 1, \dim M = \dim S \geq 2, \dim N = \dim T \geq 2$ a taktiež

$$\dim(S \cap T) \leq \min(\dim S, \dim T) - 1.$$

S použitím vety 5.4.1 z toho vyplýva

$$\begin{aligned} \dim(S + T) &= \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) \\ &\geq \dim S + \dim T - \min(\dim S, \dim T) + 1 \\ &= \max(\dim S, \dim T) + 1 \geq 3. \end{aligned}$$

Keďže $M \cap N = \emptyset$, podľa tvrdenia 8.3.2 je $S + T$ vlastný lineárny podpriestor vo V . Preto

$$\dim V \geq \dim(S + T) + 1 \geq 4.$$

Na druhej strane v ľubovoľnom vektorovom priestore V dimenzie ≥ 4 nie je ťažké nájsť príklady čiastočne rovnobežných lineárnych variet. Presvedčte sa, že napr.

$$M = [e_1, e_2], \quad N = e_4 + [e_2, e_3]$$

sú čiastočne rovnobežné roviny v K^4 . Skúste nájsť iné príklady.

8.5. Afinné zobrazenia

Nech U, V sú vektorové priestory nad tým istým poľom K . Hovoríme, že $f: V \rightarrow U$ je *afinné zobrazenie*, ak pre ľubovoľné body $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in V$ a skalár $s \in K$ platí

$$\begin{aligned} f(s\mathbf{p} + (1-s)\mathbf{q}) &= sf(\mathbf{p}) + (1-s)f(\mathbf{q}), \\ f(\mathbf{p} - \mathbf{q} + \mathbf{r}) &= f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q}) + f(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Podobným spôsobom ako tvrdenie 8.2.1 možno dokázať, že afinné sú práve tie zobrazenia $f: V \rightarrow U$, ktoré zachovávajú všetky afinné kombinácie trojíc bodov, či, takisto, vôbec všetky afinné kombinácie; v prípade poľa charakteristiky $\neq 2$ stačí žiadať zachovávanie afinných kombinácií dvojíc.

8.5.1. Tvrdenie. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K . Potom pre ľubovoľné zobrazenie $f: V \rightarrow U$ nasledujúce podmienky sú ekvivalentné:*

- (i) *f je afinné zobrazenie;*
- (ii) *pre všetky $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in V$, $s, t \in K$ platí*

$$f(s\mathbf{p} + t\mathbf{q} + (1 - s - t)\mathbf{r}) = sf(\mathbf{p}) + tf(\mathbf{q}) + (1 - s - t)f(\mathbf{r});$$

- (iii) *pre každé $n \in \mathbb{N}$ a všetky body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in V$ a skaláry $t_0, t_1, \dots, t_n \in K$ také, že $t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1$, platí*

$$f(t_0\mathbf{p}_0 + t_1\mathbf{p}_1 + \dots + t_n\mathbf{p}_n) = t_0f(\mathbf{p}_0) + t_1f(\mathbf{p}_1) + \dots + t_nf(\mathbf{p}_n).$$

Ak $\text{char } K \neq 2$, tak uvedené podmienky sú navyše ekvivalentné s podmienkou (i⁻) pre všetky $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V$, $s \in K$ platí

$$f(s\mathbf{p} + (1 - s)\mathbf{q}) = sf(\mathbf{p}) + (1 - s)f(\mathbf{q}).$$

Posunutím alebo transláciou vektorového priestoru V o vektor $\mathbf{u} \in V$ nazývame zobrazenie $V \rightarrow V$ dané predpisom $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{u}$.

Zrejme kompozíciou posunutia o vektor $\mathbf{u} \in V$ a posunutia o vektor $\mathbf{v} \in V$ je posunutie o vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Každé posunutie je bijektívne zobrazenie; inverzné zobrazenie k posunutiu o vektor \mathbf{u} je posunutie o opačný vektor $-\mathbf{u}$.

Z nasledujúcej vety okrem iného vyplýva, že každé afinné zobrazenie možno dostať kompozíciou lineárneho zobrazenia a posunutia.

8.5.2. Veta. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K . Zobrazenie $f: V \rightarrow U$ je afinné práve vtedy, keď existuje vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineárne zobrazenie $\varphi: V \rightarrow U$ také, že pre každé $\mathbf{x} \in V$ platí*

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}.$$

Dôkaz. Treba dokázať dve veci:

- (1) *Pre ľubovoľný vektor $\mathbf{u} \in U$ a lineárne zobrazenie $\varphi: V \rightarrow U$ je predpisom $f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) + \mathbf{u}$ dané afinné zobrazenie $f: V \rightarrow U$.*
- (2) *Ak $f: V \rightarrow U$ je afinné zobrazenie, tak priradenie $\varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$ definuje lineárne zobrazenie $\varphi: V \rightarrow U$.*

V jednom i druhom prípade možno zachovávanie príslušných afinných resp. lineárnych kombinácií overiť priamymi výpočtami, ktoré prenechávame čitateľovi.

*Zrejme vektor $\mathbf{u} \in U$ ako aj lineárne zobrazenie φ sú podmienkou vety určené jednoznačne. Zobrazenie $\varphi = f - f(\mathbf{0})$ nazývame *lineárnou časťou* a vektor $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$ *absolútnym členom* afinného zobrazenia f . Píšeme tiež $f = \varphi + \mathbf{u}$.*

Afinné zobrazenia sú tak zovšeobecnením funkcií $f: K \rightarrow K$ tvaru $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in K$, ktoré (najmä v prípade $K = \mathbb{R}$) v matematickej analýze nazývame lineárnymi, na viacrozmerné vektorové priestory.

8.5.3. Dôsledok. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K . Potom*

- (a) *ľubovoľná translácia priestoru V je afinné zobrazenie;*
- (b) *ľubovoľné lineárne zobrazenie $\varphi: V \rightarrow U$ je afinné;*
- (c) *afinné zobrazenie $f: V \rightarrow U$ je lineárne práve vtedy, keď $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.*

8.5.4. Tvrdenie. *Nech U, V, W sú vektorové priestory nad poľom K a $g: W \rightarrow V$, $f: V \rightarrow U$ sú afinné zobrazenia. Potom aj ich kompozícia $f \circ g: W \rightarrow U$ je afinné zobrazenie.*

Dôkaz. Hoci priamym výpočtom možno overiť, že $f \circ g$ zachováva afinné kombinácie, podáme radšej dôkaz založený na vete 8.5.2, ktorý nám poskytne informáciu navyše.

Nech $f = \varphi + \mathbf{u}$, $g = \psi + \mathbf{v}$, kde $\varphi: V \rightarrow U$, $\psi: W \rightarrow V$ sú lineárne zobrazenia a $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$, $\mathbf{v} = g(\mathbf{0})$. Potom pre $\mathbf{z} \in W$ s využitím linearity φ dostávame

$$(f \circ g)(\mathbf{z}) = \varphi(\psi(\mathbf{z}) + \mathbf{v}) + \mathbf{u} = (\varphi \circ \psi)(\mathbf{z}) + \varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}.$$

Teda $f \circ g$ je afinné zobrazenie zložené z lineárneho zobrazenia $\varphi \circ \psi$ a posunutia o vektor $\varphi(\mathbf{v}) + \mathbf{u}$.

Vzorec odvodený v našom dôkaze stojí za zaznamenanie. Pre lineárne zobrazenia $\psi: W \rightarrow V$, $\varphi: V \rightarrow U$ a vektory $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} \in U$ platí

$$(\varphi + \mathbf{u}) \circ (\psi + \mathbf{v}) = (\varphi \circ \psi) + (\varphi\mathbf{v} + \mathbf{u}).$$

8.5.5. Tvrdenie. *Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K , $f: V \rightarrow U$ je afinné zobrazenie a $M \subseteq V$, $N \subseteq U$ sú afinné podpriestory. Potom $f(M)$ je afinný podpriestor v U a $f^{-1}(N)$ je afinný podpriestor vo V alebo prázdna množina.*

Dôkaz. Nech $f = \varphi + \mathbf{u}$, kde φ je lineárna časť f a $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$. Nech ďalej $M = \mathbf{p} + S$, $N = \mathbf{q} + T$, kde $\mathbf{p} \in M$, $\mathbf{q} \in N$ a $S \subseteq V$, $T \subseteq U$ sú lineárne podpriestory. Potrebný záver vyplýva z tvrdení 6.1.3, 8.2.2 a nasledujúcich rovností

$$f(M) = f(\mathbf{p}) + \varphi(S),$$

$$f^{-1}(N) = \begin{cases} \mathbf{z} + \varphi^{-1}(T), & \text{kde } \mathbf{z} \in V \text{ je ľubovoľné také, že } \varphi(\mathbf{z}) = \mathbf{q} - \mathbf{u}, \\ \emptyset, & \text{ak neexistuje } \mathbf{z} \in V \text{ také, že } \varphi(\mathbf{z}) = \mathbf{q} - \mathbf{u}, \end{cases}$$

ktorých dôkaz prenechávame čitateľovi.

Keďže každé posunutie je bijekcia, afinné zobrazenie $f = \varphi + \mathbf{u}: V \rightarrow U$ s lineárnou časťou φ je injektívne práve vtedy, keď φ je injektívne. Podobne, f je surjektívne práve vtedy, keď φ je surjektívne. Z toho už priamo vyplývajú ďalšie tri výsledky.

Prvý z nich zovšeobecňuje vetu 6.2.3 o dimenzii jadra a obrazu.

8.5.6. Veta. *Nech $f: V \rightarrow U$ je afinné zobrazenie, pričom V je konečnorozmerný vektorový priestor. Potom pre ľubovoľné $\mathbf{y} \in \text{Im } f$ platí*

$$\dim V = \dim f^{-1}(\mathbf{y}) + \dim \text{Im } f.$$

Afinnou transformáciou vektorového priestoru V nazývame ľubovoľné afinné zobrazenie $f: V \rightarrow V$. Aj pre afinné transformácie platí obdoba dôsledku 6.2.4.

8.5.7. Dôsledok. *Nech $f: V \rightarrow V$ je afinná transformácia konečnorozmerného vektorového priestoru V . Potom f je injektívna práve vtedy, keď je surjektívna.*

8.5.8. Tvrdenie. *Nech $f: V \rightarrow U$ je afinné zobrazenie s lineárnou časťou φ a absolútnym členom $\mathbf{u} = f(\mathbf{0})$. Potom f je bijektívne práve vtedy, keď φ je bijektívne. V tom prípade aj inverzné zobrazenie $f^{-1}: U \rightarrow V$ je afinné a platí*

$$f^{-1} = \varphi^{-1} - \varphi^{-1}(\mathbf{u}).$$

Teda f^{-1} je kompozíciou lineárneho zobrazenia φ^{-1} a posunutia o vektor $-\varphi^{-1}(\mathbf{u})$.

Nech U, V sú konečnorozmerné vektorové priestory a α, β sú bázy v U resp. vo V . Rozšírenou maticou afinného zobrazenia $f: V \rightarrow U$ s lineárnou časťou φ a absolútnym členom \mathbf{u} vzhľadom na bázy β, α nazývame blokovú maticu

$$(f)_{\alpha, \beta} = ((\varphi)_{\alpha, \beta} | (\mathbf{u})_{\alpha}).$$

Ak teda $\dim U = m$, $\dim V = n$, $\mathbf{A} = (\varphi)_{\alpha, \beta}$ je matica lineárneho zobrazenia φ v bázach $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, α a $\mathbf{a} = (\mathbf{u})_{\alpha}$ sú súradnice vektora \mathbf{u} v báze α , tak rozšírenou maticou afinného zobrazenia f v bázach β, α je bloková matica

$$(f)_{\alpha, \beta} = ((\varphi \mathbf{v}_1)_{\alpha}, \dots, (\varphi \mathbf{v}_n)_{\alpha} | (\mathbf{u})_{\alpha}) = (\mathbf{A} | \mathbf{a}) \in K^{m \times (n+1)}.$$

Súradnice bodu $\mathbf{x} \in V$ v báze β a súradnice jeho obrazu $f(\mathbf{x}) \in U$ v báze α sú tak spojené rovnosťou

$$(f\mathbf{x})_{\alpha} = (\varphi)_{\alpha, \beta} \cdot (\mathbf{x})_{\beta} + (\mathbf{u})_{\alpha} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x})_{\beta} + \mathbf{a}.$$

Samozrejme, ak f je lineárne zobrazenie, t. j. ak $f = \varphi$ a $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, nemá význam rozširovať maticu $(\varphi)_{\alpha, \beta}$ o nulový stĺpec.

Z tvrdenia 8.5.4, presnejšie z formuly odvodenej počas jeho dôkazu, a z tvrdenia 8.5.8 s použitím výsledkov paragrafov 6.4 a 7.2 vyplýva náš záverečný výsledok.

8.5.9. Tvrdenie. *Nech U, V, W sú konečnorozmerné vektorové priestory nad poľom K a α, β, γ sú nejaké bázy priestorov U, V , resp. W .*

(a) *Ak $g: W \rightarrow V$, $f: V \rightarrow U$ sú afinné zobrazenia, ktoré majú v príslušných bázach rozšírené matice $(g)_{\beta, \gamma} = (\mathbf{B} | \mathbf{b})$, $(f)_{\alpha, \beta} = (\mathbf{A} | \mathbf{a})$, tak ich kompozícia $f \circ g: W \rightarrow U$ má v bázach γ, α rozšírenú maticu*

$$(f \circ g)_{\alpha, \gamma} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} | \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}).$$

(b) *Ak $f: V \rightarrow U$ je afinná bijekcia s rozšírenou maticou $(f)_{\alpha, \beta} = (\mathbf{A} | \mathbf{a})$ v bázach β, α , tak k nej inverzné zobrazenie je afinná bijekcia $f^{-1}: U \rightarrow V$, ktorá má v bázach α, β rozšírenú maticu*

$$(f^{-1})_{\beta, \alpha} = (\mathbf{A}^{-1} | -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{a}).$$

CVIČENIA

1. Dokážte postupne záverečné štyri podmienky z tvrdenia 8.2.2.
2. Nech V je vektorový priestor nad poľom K .
 - (a) Tri afinne nezávislé body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \in V$ sa nazývajú *nekolinéárne*. Dokážte, že $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ sú *kolinéárne* práve vtedy, keď ležia na jednej priamke.
 - (b) Podobne, štyri afinne nezávislé body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3 \in V$ sa nazývajú *nekomplanárne*. Dokážte, že $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ sú *komplanárne* práve vtedy, keď ležia v jednej rovine.
3. Nech V je vektorový priestor nad poľom K a $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{q} \in V$. Dokážte postupne nasledujúce tvrdenia:
 - (a) Body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ sú afinne nezávislé práve vtedy, keď pre nejaké (ľubovoľné) $i \leq n$ sú lineárne nezávislé vektory $\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i$, kde $j \in \{0, 1, \dots, n\} \setminus \{i\}$.
 - (b) $\mathbf{q} \in \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ práve vtedy, keď $\mathbf{q} - \mathbf{p}_0 \in [\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0]$. Odvodte z toho obe rovnosti z tvrdenia 8.2.4.
 - (c) Ak body $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ sú afinne nezávislé, tak $\mathbf{q} \in \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$ práve vtedy, keď vektory $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_0, \mathbf{q} - \mathbf{p}_0$ sú lineárne závislé.
4. Vo vektorovom priestore \mathbb{R}^4 sú dané body $\mathbf{p}_0 = (1, 1, 2, 2)^T$, $\mathbf{p}_1 = (0, 1, 0, 1)^T$, $\mathbf{p}_2 = (1, 2, 0, 3)^T$ a $\mathbf{q} = (0, 2, -4, 2)^T$, $\mathbf{r} = (-1, 2, -4, 1)^T$.
 - (a) Zistite, či platí $\mathbf{q} \in \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, $\mathbf{r} \in \ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$.
 - (b) Vypočítajte dimenzie afinných podpriestorov $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q})$, $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{r})$.
 - (c) Vypočítajte dimenzie afinných podpriestorov $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \cap \ell(\mathbf{q}, \mathbf{r})$, $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \sqcup \ell(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ a určte vzájomnú polohu afinných podpriestorov $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, $\ell(\mathbf{q}, \mathbf{r})$.
 - (d) Vypočítajte dimenzie afinných podpriestorov $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) \cap \ell(\mathbf{q}, \mathbf{r})$, $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) \sqcup \ell(\mathbf{q}, \mathbf{r})$ a určte vzájomnú polohu afinných podpriestorov $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$, $\ell(\mathbf{q}, \mathbf{r})$.
5.
 - (a) Nájdite príklad troch priamok v \mathbb{R}^3 tak, aby ľubovoľné dve z nich boli mimobežné.
 - (b) Dokážte, že priamka a rovina v trojrozmernom vektorovom priestore nemôžu byť mimobežné.
 - (c) Vo vektorovom priestore \mathbb{R}^4 nájdite príklad mimobežnej priamky a roviny.
 - (d) Dokážte, že dve roviny vo štvorrozmernom vektorovom priestore nemôžu byť mimobežné.
 - (e) Nájdite príklad dvoch mimobežných rovín v \mathbb{R}^5 .
6. Nech $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4$ sú ľubovoľné afinne nezávislé body vo vektorovom priestore V nad poľom K . Potom roviny $\ell(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, $\mathbf{p}_4 + [\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_0]$ sú čiastočne rovnobežné. Dokážte.
7. *Repér* vo vektorovom priestore sa zvykne definovať ako usporiadaná $(n+1)$ -tica afinne nezávislých bodov $\rho = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) \in V^{n+1}$, taká, že $\ell(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = V$, prípadne ako usporiadaná $(n+1)$ -tica $(\mathbf{r}, \beta) = (\mathbf{r}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \in V^{n+1}$, pozostávajúca z ľubovoľného bodu $\mathbf{r} \in V$ a bázy $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ vektorového priestoru V . Dokážte nasledujúce dve tvrdenia:
 - (a) Nech $\rho = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ je usporiadaná $(n+1)$ -tica bodov z V . Potom ρ je repér vo V v zmysle prvej definície, práve vtedy, keď $\beta = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_0)$ je báza vektorového priestoru V , t. j. práve vtedy, keď (\mathbf{r}_0, β) je repér v zmysle druhej definície.
 - (b) Nech \mathbf{r} je bod z V a $\beta = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ je usporiadaná n -tica vektorov z V . Potom (\mathbf{r}, β) je repér v zmysle druhej definície práve vtedy, keď $\rho = (\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{r} + \mathbf{v}_n)$ je repér v zmysle prvej definície.
 Z toho dôvodu nie je potrebné rozlišovať medzi repérmi v zmysle jednej či druhej definície.
8. Nech $\rho = (\mathbf{r}, \beta)$ je repér vo vektorovom priestore V nad poľom K . *Afinnými súradnicami bodu* $\mathbf{x} \in V$ *vzhľadom na repér* ρ nazývame súradnice vektora $\mathbf{x} - \mathbf{r}$ vzhľadom na bázu β , čiže $(\mathbf{x})_\rho = (\mathbf{x} - \mathbf{r})_\beta$. Ak je repér ρ známy z kontextu, hovoríme len o *afinných súradniciach bodu* \mathbf{x} . Dokážte postupne nasledujúce tvrdenia:
 - (a) $(\mathbf{0}, \varepsilon)$, kde $\varepsilon = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ je kanonická báza, je repér v K^n a pre každé $\mathbf{x} \in K^n$ platí $(\mathbf{x})_{(\mathbf{0}, \varepsilon)} = \mathbf{x}$.
 - (b) Body repéru $\rho = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ majú vzhľadom na tento repér afinné súradnice $(\mathbf{r}_0)_\rho = \mathbf{0}$, $(\mathbf{r}_1)_\rho = \mathbf{e}_1, \dots, (\mathbf{r}_n)_\rho = \mathbf{e}_n$.
 - (c) Ak $\dim V = n$ a $\rho = (\mathbf{r}, \beta)$ je repér vo V , tak predpisom $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x})_\rho$ je definované bijektívne afinné zobrazenie $V \rightarrow K^n$ a pre každé $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)^T \in K^n$ platí

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\beta} \cdot (\mathbf{x})_{\rho}, \quad (\mathbf{r} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{c})_{\rho} = \mathbf{c}.$$

9. V \mathbb{R}^3 sú dané body $\mathbf{r}_0 = (5, 2, 1)^T$, $\mathbf{r}_1 = (0, 2, 1)^5$, $\mathbf{r}_2 = (5, 0, 2)^T$, $\mathbf{r}_3 = (5, 2, 0)^T$.
 (a) Dokážte, že $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$ je repér v \mathbb{R}^3 .
 (b) Nájdite afinné súradnice bodov $\mathbf{x} = (4, 4, -3)^T$, $\mathbf{y} = (-5, -2, -1)^T$, $\mathbf{z} = (0, 0, 0)^T$ vzhľadom na repér $\boldsymbol{\rho}$.
 (c) Nájdite body \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{r} , ak poznáte ich afinné súradnice $(\mathbf{p})_{\rho} = (0, 2, 1)^T$, $(\mathbf{q})_{\rho} = (-1, 1, -1)^T$, $(\mathbf{r})_{\rho} = (0, 0, 0)^T$.

10. Nech $\boldsymbol{\pi} = (\mathbf{p}, \boldsymbol{\alpha})$, $\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{r}, \boldsymbol{\beta})$ sú dva repéry vo vektorovom priestore V nad poľom K . Potom afinné súradnice ľubovoľného bodu $\mathbf{x} \in V$ vzhľadom na tieto repéry sú zviazané vzťahom

$$(\mathbf{x})_{\boldsymbol{\pi}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p})_{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}} \cdot ((\mathbf{x})_{\boldsymbol{\rho}} - (\mathbf{p})_{\boldsymbol{\rho}}),$$

kde $\mathbf{P}_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}$ je matica prechodu z bázy $\boldsymbol{\beta}$ do bázy $\boldsymbol{\alpha}$. Dokážte.

11. Dokážte tvrdenie 8.5.1. (*Návod*: Modifikujte dôkaz tvrdenia 8.2.1.)
 12. Dokážte podmienky (1), (2) z dôkazu tvrdenia 8.5.2.
 13. Doplňte vynechané dôkazy oboch rovností z dôkazu tvrdenia 8.5.5.
 14. Na základe tvrdenia 8.5.5 doplňte dôkazy vety 8.5.6, dôsledku 8.5.7 a tvrdenia 8.5.8.
 15. Predpokladajme, že dvaja pozorovatelia P a P' popisujú udalosti v čase a v trojrozmernom priestore vzhľadom na po dvoch rovnobežné a rovnako orientované súradné osi x, y, z , resp. x', y', z' , pričom počiatok súradnej sústavy pozorovateľa P' má z hľadiska pozorovateľa P v čase $t = t_0$, zodpovedajúcom času $t' = 0$ pozorovateľa P' , súradnice $(x_0, y_0, z_0)^T$. Nech navyše pozorovateľ P' sa vzhľadom na pozorovateľa P pohybuje rovnomerne priamočiarno rýchlosťou $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ (pozri príklad 6.4.7 a cvičenie 6.14).
 (a) Odvoďte tvar *Galileovej transformácie*, ktorou sú za týchto okolností v klasickej (t. j. v nerelativistickej) fyzike zviazané časopriestorové súradnice bodových udalostí z hľadiska pozorovateľov P resp. P' :

$$t' = t - t_0, \quad x' = x - x_0 - v_x t, \quad y' = y - y_0 - v_y t, \quad z' = z - z_0 - v_z t.$$

Nahliadnite, že ide o afinnú transformáciu s rozšírenou maticou $(\mathbf{G}_v | -\mathbf{s}_0)$, kde \mathbf{G}_v je matica Galileovej transformácie z cvičenia 6.14 a $\mathbf{s}_0 = (t_0, x_0, y_0, z_0)^T$.

- (b) Nech $f, g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ sú Galileove transformácie s rozšírenými maticami $(\mathbf{G}_v | -\mathbf{s}_0)$ resp. $(\mathbf{G}_w | -\mathbf{s}_1)$, kde $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1 \in \mathbb{R}^4$. Nájdite rozšírenú maticu kompozície afinných zobrazení $f \circ g$ a rozšírenú maticu inverzného zobrazenia f^{-1} . Dokážte, že ide opäť o Galileove transformácie uvedeného typu a vysvetlite fyzikálny význam získaných výsledkov.
16. Nech U, V sú vektorové priestory nad poľom K . Označme $\mathcal{A}(V, U)$ množinu všetkých *afinných* zobrazení $f: V \rightarrow U$. Dokážte postupne nasledujúce tvrdenia:
 (a) $\mathcal{A}(V, U)$ s operáciami súčtu a skalárneho násobku definovanými po zložkách tvorí *lineárny* podpriestor vektorového priestoru U^V . $\mathcal{A}(V, U)$ navyše obsahuje vektorový priestor $\mathcal{L}(V, U)$ všetkých lineárnych zobrazení $\varphi: V \rightarrow U$ ako svoj lineárny podpriestor. (Pozri príklad 1.6.5 a tvrdenie 6.5.1.)
 (b) Priradením $f \mapsto (f - f(\mathbf{0}), f(\mathbf{0}))$ je definovaný lineárny izomorfizmus vektorových priestorov $\mathcal{A}(V, U) \rightarrow \mathcal{L}(V, U) \times U$ (pozri príklad 1.6.4).
 (c) Nech $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ sú nejaké bázy priestorov U resp. V . Potom priradením $f \mapsto (f)_{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}$ je daný lineárny izomorfizmus vektorových priestorov $\mathcal{A}(V, U) \rightarrow K^{m \times (n+1)}$.
 (d) Predpokladajme, že U, V sú konečnorozmerné a $\dim U = m$, $\dim V = n$. Odvoďte, či už z (b) alebo z (c), že potom aj $\mathcal{A}(V, U)$ je konečnorozmerný a $\dim \mathcal{A}(V, U) = m(n+1)$.
 (e) Ak V je konečnorozmerný, tak jeho duál $V^* = \mathcal{L}(V, K)$ tvorí nadrovinu v $\mathcal{A}(V, K)$ (pozri text tesne pred tvrdením 6.5.3).