Báze a dimenze vektorových prostorů

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ je konečná posloupnost vektorů z $\mathbf{V}$. Existují-li prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$, z nichž alespoň jeden je různý od nuly 0, takové, že $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$, řekneme, že vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou **lineárně závislé**. Tedy konečná posloupnost vektorů z $\mathbf{V}$ je lineárně závislá, existuje-li lineární kombinace těchto vektorů s koeficienty z T, jež nejsou všechny nulové, taková, že výsledkem této lineární kombinace je nulový vektor.

Je-li $n = 1$, tedy máme-li co do činění s posloupností skládající se pouze z jediného vektoru $\mathbf{u}$ z $\mathbf{V}$, pak uvedená definice dává, že vektor $\mathbf{u}$ je lineárně závislý právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{o}$. Pro $n > 1$ se hodí následující kritérium.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ z $\mathbf{V}$, kde $n > 1$, je lineárně závislá právě tehdy, když existuje index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že vektor $\mathbf{u}_i$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}$, $\mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$.

Důkaz. Jsou-li vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ lineárně závislé, existují prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$, z nichž alespoň jeden není roven nule 0, takové, že $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$. Nechť $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ je takový index, že $s_i \neq 0$. Pak odtud plyne, že $s_i \cdot \mathbf{u}_i = -s_1 \cdot \mathbf{u}_1 - \cdots - s_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} - s_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} - \cdots - s_n \cdot \mathbf{u}_n$, takže $\mathbf{u}_i = (-s_i^{-1} \cdot s_1) \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + (-s_i^{-1} \cdot s_{i-1}) \cdot \mathbf{u}_{i-1} + (-s_i^{-1} \cdot s_{i+1}) \cdot \mathbf{u}_{i+1} + \cdots + (-s_i^{-1} \cdot s_n) \cdot \mathbf{u}_n$.

Naopak je-li vektor $\mathbf{u}_i$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{i-1}$, $\mathbf{u}_{i+1}, \ldots, \mathbf{u}_n$, pak existují prvky $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n \in T$ takové, že $\mathbf{u}_i = t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + t_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} + t_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} + \cdots + t_n \cdot \mathbf{u}_n$. Odtud vychází $t_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \cdots + t_{i-1} \cdot \mathbf{u}_{i-1} + (-1) \cdot \mathbf{u}_i + t_{i+1} \cdot \mathbf{u}_{i+1} + \cdots + t_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$, přičemž koeficient u $\mathbf{u}_i$ je -1, čili je nenulový.

Poznamenejme, že z dosavadních úvah jsou patrné mimo jiné tyto skutečnosti: obsahuje-li například posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ z $\mathbf{V}$ nulový vektor $\mathbf{o}$ anebo obsahuje-li tato posloupnost dvakrát tentýž vektor, pak je lineárně závislá.

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ opět vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Není-li posloupnost vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ z $\mathbf{V}$ lineárně závislá, řekneme, že tato posloupnost je **lineárně nezávislá**. Jinak řečeno, vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé, jestliže pro libovolná $s_1, s_2, \dots, s_n \in T$ splňující $s_1 \cdot \mathbf{u}_1 + s_2 \cdot \mathbf{u}_2 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{u}_n = \mathbf{o}$ platí, že $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$.

Poznamenejme, že je-li $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ lineárně nezávislá posloupnost vektorů z $\mathbf{V}$, pak každá podposloupnost vybraná z této posloupnosti je rovněž lineárně nezávislá.

Je-li $M \subseteq \mathbf{V}$ konečná podmnožina, $M = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$, pak místo značení $\langle M \rangle$ pro podprostor vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ generovaný množinou M, jenž byl předmětem studia v minulé kapitole, píšeme stručně jen $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n \rangle$ a mluvíme o podprostoru generovaném vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Platí následující **Steinitzova věta o výměně**.

Věta. Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ jsou takové vektory z $\mathbf{V}$, že je splněno $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle$ a vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ jsou přitom lineárně nezávislé. Pak platí $m \leq n$ a při vhodném přečíslování vektorů $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ platí rovněž

$$\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \dots, \mathbf{w}_n \rangle.$$

Důkaz se provede indukcí vzhledem k m s využitím druhého tvrzení uvedeného v odstavci o generování podprostorů vektorových prostorů v minulé kapitole.

Je-li $m = 1$, pak $\mathbf{v}_1 \in \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \rangle$. Poněvadž $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{o}$, je tedy nutně $n \geq 1$, takže $m \leq n$. Dále podle právě zmíněného tvrzení z minulé kapitoly existují $s_1, \dots, s_n \in T$ taková, že $\mathbf{v}_1 = s_1 \cdot \mathbf{w}_1 + \cdots + s_n \cdot \mathbf{w}_n$. Přitom alespoň jeden z prvků $s_1, \ldots, s_n$ je nenulový. Přečíslujme vektory $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$, a tím i prvky $s_1, \ldots, s_n$ tak, aby bylo $s_1 \neq 0$. Pak odtud plyne, že $\mathbf{w}_1 = s_1^{-1} \cdot \mathbf{v}_1 - (s_1^{-1} \cdot s_2) \cdot \mathbf{w}_2 - \cdots - (s_1^{-1} \cdot s_n) \cdot \mathbf{w}_n$. Z těchto rovností dále plyne, že $\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$, neboť generátory každého z těchto podprostorů jsou obsaženy ve druhém z těchto podprostorů. Platí tedy požadovaná rovnost.

Nechť dále $m > 1$ a předpokládejme, že tvrzení věty platí pro $m - 1$. Vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}$ jsou lineárně nezávislé, takže podle tohoto předpokladu $m - 1 \leq n$ a při vhodném přečíslování vektorů $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ je $\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{w}_m, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$. Ale $\mathbf{v}_m \in \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$, takže $\mathbf{v}_m \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{w}_m, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$. Podle již zmíněného tvrzení z minulé kapitoly to znamená, že existují $t_1, \ldots, t_n \in T$ taková, že $\mathbf{v}_m = t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + t_{m-1} \cdot \mathbf{v}_{m-1} + t_m \cdot \mathbf{w}_m + \cdots + t_n \cdot \mathbf{w}_n$. Z předchozího tvrzení přitom plyne, že alespoň jeden z prvků $t_m, \ldots, t_n$ je nenulový, neboť vektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé. To také nevyhnutelně znamená, že $m \leq n$. Přečíslujme vektory $\mathbf{w}_m, \ldots, \mathbf{w}_n$, a tím také prvky $t_m, \ldots, t_n$ tak, aby bylo $t_m \neq 0$. Pak z poslední rovnosti plyne, že $\mathbf{w}_m = -(t_m^{-1} \cdot t_1) \cdot \mathbf{v}_1 - \cdots - (t_m^{-1} \cdot t_{m-1}) \cdot \mathbf{v}_{m-1} + t_m^{-1} \cdot \mathbf{v}_m - (t_m^{-1} \cdot t_{m+1}) \cdot \mathbf{w}_{m+1} - \cdots - (t_m^{-1} \cdot t_n) \cdot \mathbf{w}_n$. Odtud potom vyplývá, že $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{m-1}, \mathbf{w}_m, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$, neboť zase generátory každého z těchto podprostorů leží i ve druhém podprostoru. Odtud a z výše uvedeného indukčního předpokladu nakonec plyne, že $\langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$. Opět tedy platí požadovaná rovnost.

Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Řekneme, že konečná posloupnost $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektorů z $\mathbf{V}$ je **báze** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, jestliže

- vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ jsou lineárně nezávislé a přitom
- vektory $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ generují celý prostor $\mathbf{V}$, což znamená, že $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \rangle = \mathbf{V}$.

Poznamenejme ale, že odnikud neplyne, že by v daném vektorovém prostoru musela nějaká báze existovat, ani že by snad měla být jen jediná, pokud existuje.

Příklady. Nechť $(T, +, \cdot)$ je těleso. Viděli jsme, že pak kartézská mocnina $T^n = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n) \mid s_1, s_2, \ldots, s_n \in T\}$ spolu s přirozeně definovanými operacemi sčítání $+$ a skalárního násobení $\cdot$ tvoří vektorový prostor $(T^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak vektory

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0),\\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0),\\
\mathbf{e}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0, 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}$$

očividně tvoří bázi vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$. Říkáme, že je to **kanonická báze** prostoru $(T^n, +, \cdot)$. Existuje ale mnoho jiných bází. Kupříkladu následující vektory

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 &= (1, 1, 1, \ldots, 1, 1),\\
\mathbf{f}_2 &= (0, 1, 1, \ldots, 1, 1),\\
\mathbf{f}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 1, 1),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{f}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}$$

tvoří rovněž bázi vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$.

Buď opět $(T, +, \cdot)$ těleso. Viděli jsme také, že pak okruh polynomů $(T[x], +, \cdot)$ tvoří vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Tento vektorový prostor ale nemá žádnou bázi. Opravdu, pokud by nějaká báze tohoto prostoru existovala, byla by to konečná posloupnost polynomů $f_1, f_2, \ldots, f_m$ z $T[x]$, která by kromě jiného měla tu vlastnost, že by pomocí lineárních kombinací generovala celou množinu $T[x]$. Lze přitom předpokládat, že všechny polynomy $f_1, f_2, \dots, f_m$ by byly nenulové. Ve skutečnosti zde ale platí, že $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle \neq T[x]$. Stačí si totiž všimnout stupňů polynomů $f_1, f_2, \dots, f_m$. (Stupněm nenulového polynomu h z T[x] rozumíme nejvyšší exponent k takový, že koeficient u mocniny x^k v polynomu h je nenulový.) Pak jistě existuje přirozené číslo n takové, že stupně všech polynomů $f_1, f_2, \dots, f_m$ jsou menší než n. To ale znamená, že pak také stupeň každého nenulového polynomu g z $\langle f_1, f_2, \dots, f_m \rangle$ je menší než n. Polynomy $f_1, f_2, \dots, f_m$ tedy negenerují celou množinu $T[x]$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Existuje-li konečná podmnožina $M \subseteq \mathbf{V}$ taková, že $\langle M \rangle = \mathbf{V}$, pak z každé podmnožiny $N \subseteq \mathbf{V}$ s vlastností, že $\langle N \rangle = \mathbf{V}$, lze vybrat konečnou podmnožinu $L \subseteq N$ takovou, že $\langle L \rangle = \mathbf{V}$.

Důkaz. Skutečně, jestliže $\langle N \rangle = \mathbf{V}$, pak pro každý vektor $\mathbf{u} \in M$ máme $\mathbf{u} \in \langle N \rangle$, takže podle příslušného tvrzení o generování podprostorů z minulé kapitoly existuje přirozené číslo n, vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in N$ a prvky $t_1, \dots, t_n \in T$ takové, že $\mathbf{u} = t_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + t_n \cdot \mathbf{v}_n$. Vyberme pro každý vektor $\mathbf{u} \in M$ takové vektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in N$ a sestavme ze všech těchto vybraných vektorů množinu L. Pak $L \subseteq N$ a L je konečná množina, neboť množina M je konečná. Navíc odtud plyne, že $M \subseteq \langle L \rangle$, takže $\langle M \rangle \subseteq \langle L \rangle$. Poněvadž $\langle M \rangle = \mathbf{V}$, znamená to, že $\langle L \rangle = \mathbf{V}$.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Existuje-li konečná podmnožina $M \subseteq \mathbf{V}$ taková, že $\langle M \rangle = \mathbf{V}$, pak z každé podmnožiny $N \subseteq \mathbf{V}$ s vlastností, že $\langle N \rangle = \mathbf{V}$, lze vybrat nějakou bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Důkaz. Podle předchozího tvrzení pak lze z každé podmnožiny $N \subseteq \mathbf{V}$ s vlastností, že $\langle N \rangle = \mathbf{V}$, vybrat konečnou podmnožinu $L \subseteq N$ takovou, že $\langle L \rangle = \mathbf{V}$. Ukážeme dále, že z každé konečné podmnožiny $L \subseteq \mathbf{V}$ splňující $\langle L \rangle = \mathbf{V}$ lze již vybrat bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Poněvadž $\mathbf{V} \neq \{\mathbf{o}\}$, musí být $L \neq \emptyset$ a také $L \neq \{\mathbf{o}\}$. Vypišme vektory množiny L do posloupnosti $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$. Jsou-li tyto vektory lineárně nezávislé, pak již tvoří bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Jsou-li naopak lineárně závislé, pak poněvadž $L \neq \{\mathbf{o}\}$, máme $k > 1$ a podle úvodního tvrzení této kapitoly existuje index $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ takový, že vektor $\mathbf{w}_j$ je lineární kombinací zbývajících vektorů této posloupnosti. To ale znamená, že $\mathbf{w}_j \in \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{w}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_k \rangle$, takže máme $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{j-1}, \mathbf{w}_{j+1}, \ldots, \mathbf{w}_k \rangle$. Je tedy možné z množiny generátorů L vektor $\mathbf{w}_j$ vyškrtnout, aniž se změní podprostor, který tato množina generuje. Opakujeme-li tento postup několikrát, nakonec dostaneme vybranou podposloupnost vektorů, tedy podrobněji řečeno, zůstanou nám indexy $i_1, i_2, \ldots, i_\ell \in \{1, 2, \ldots, k\}$ splňující $i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell$ takové, že bude platit $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k \rangle = \langle \mathbf{w}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_2}, \ldots, \mathbf{w}_{i_\ell} \rangle$ a přitom vektory $\mathbf{w}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_2}, \ldots, \mathbf{w}_{i_\ell}$ budou již lineárně nezávislé. Budou tedy tyto vektory tvořit bázi vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Věta. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Tvoří-li posloupnosti vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m$ a $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ dvě báze vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, pak platí rovnost $m = n$.

Důkaz. Podle definice pojmu báze vektorového prostoru jsou vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m$ lineárně nezávislé a přitom $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m \in \langle \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n \rangle$. Podle Steinitzovy věty o výměně tedy platí, že $m \leq n$. Podobně ale vektory $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n$ jsou lineárně nezávislé a přitom $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots, \mathbf{g}_n \in \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_m \rangle$. Takže opět podle Steinitzovy věty o výměně platí, že $n \leq m$. Celkem tedy $m = n$.

Ve tvrzení předcházejícím této poslední větě jsme viděli, že každý nenulový vektorový prostor, který je generován nějakou konečnou množinou vektorů, má také nějakou bázi. V poslední větě jsme dále viděli, že pak všechny báze takového prostoru mají stejný počet vektorů. Můžeme tedy zavést následující pojem. Je-li $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$, který obsahuje konečnou podmnožinu $M \subseteq \mathbf{V}$ takovou, že $\langle M \rangle = \mathbf{V}$, a který tudíž má i nějakou bázi, pak počet n vektorů kterékoliv báze tohoto prostoru se nazývá **dimenze** vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. O prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ samotném pak říkáme, že je to vektorový prostor **konečné dimenze**. Mezi takové prostory řadíme i nulový vektorový prostor $(\{\mathbf{o}\}, +, \cdot)$, jehož dimenzi klademe rovnu 0.

Příklad. Buď $(T, +, \cdot)$ těleso a n přirozené číslo. Pak z prvního z předchozích příkladů plyne, že dimenze vektorového prostoru $(T^n, +, \cdot)$ je rovna n.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Nechť $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ jsou lineárně nezávislé vektory z $\mathbf{V}$. Pak $m \leq n$ a existují vektory $\mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n \in \mathbf{V}$ takové, že posloupnost vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, $\mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Důkaz. Nechť $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ je nějaká báze vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Pak $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$. Podle Steinitzovy věty o výměně je tedy $m \leq n$ a při vhodném přečíslování vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ platí, že $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle$. Generují tedy zejména vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$ celý prostor $\mathbf{V}$. Podle předchozího tvrzení to ovšem znamená, že z těchto vektorů $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, $\mathbf{w}_{m+1}, \ldots, \mathbf{w}_n$ lze vybrat bázi prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Poněvadž těchto vektorů je ale jenom n, podle předchozí věty musí tyto vektory samy už tvořit bázi vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Řekneme, že vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ z $\mathbf{V}$ tvoří **minimální množinu generátorů** prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, jestliže tento prostor generují, tedy splňují $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle = \mathbf{V}$, avšak pro každou podmnožinu $M \subseteq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, $M \neq \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ je již $\langle M \rangle \neq \mathbf{V}$. Dále řekneme, že vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ z $\mathbf{V}$ tvoří **maximální lineárně nezávislou posloupnost vektorů** v prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, jsou-li tyto vektory lineárně nezávislé, avšak pro kterýkoliv vektor $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$ vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n, \mathbf{z}$ jsou již lineárně závislé. Dodejme, že v této situaci musí ovšem vektor $\mathbf{z}$ očividně být lineární kombinací vektorů $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$. Takže pak vektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ rovněž generují celý prostor $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Odtud a z předchozích výsledků potom plyne následující chrakterizace bází vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Důsledek. Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nenulový vektorový prostor nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro libovolnou posloupnost $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ vektorů z $\mathbf{V}$ jsou následující tři podmínky ekvivalentní:

(i) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří minimální množinu generátorů prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$,

(ii) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ tvoří maximální lineárně nezávislou posloupnost vektorů v prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$,

(iii) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ je báze prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$.

Každý podprostor vektorového prostoru konečné dimenze je sám prostorem konečné dimenze:

Tvrzení. Buď $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$. Pak pro každý podprostor $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ platí, že prostor $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ sám je konečné dimenze, a je-li m jeho dimenze, pak $m \leq n$, přičemž $m = n$ právě tehdy, když $\mathbf{W} = \mathbf{V}$.

Důkaz. Je-li $\mathbf{W} = \{\mathbf{o}\}$, není co dokazovat. Předpokládejme tedy, že $\mathbf{W} \neq \{\mathbf{o}\}$. Podle předchozího tvrzení žádná posloupnost lineárně nezávislých vektorů z $\mathbf{W}$ nemůže mít více než n vektorů. Vyberme lineárně nezávislou posloupnost $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ vektorů z $\mathbf{W}$ tak, aby jejich počet m byl nejvyšší možný. Pak ovšem $m \leq n$ a přitom $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ zřejmě tvoří maximální lineárně nezávislou posloupnost vektorů v podprostoru $\mathbf{W}$, takže jde o bázi prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$. Má tedy tento prostor konečnou dimenzi m. Přitom zmíněnou bázi lze doplnit dalšími vektory z $\mathbf{V}$ na bázi celého prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Je-li ovšem $m = n$, pak již $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ musí být bází prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, takže $\mathbf{W} = \mathbf{V}$.

Je-li $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a je-li $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{V}$ podprostor tohoto vektorového prostoru, pak podle posledního tvrzení víme, že prostor $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ sám je konečné dimenze $m \leq n$. Tuto dimenzi m prostoru $(\mathbf{W}, +, \cdot)$ značíme symbolem $\dim \mathbf{W}$ anebo podrobněji, je-li potřeba zdůraznit úlohu tělesa $(T, +, \cdot)$, symbolem $\dim_T \mathbf{W}$.

Platí **věta o dimenzi součtu a průniku podprostorů**:

Věta. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V}$ jsou podprostory tohoto vektorového prostoru. Pak platí rovnost

$$\dim \mathbf{X} + \dim \mathbf{Y} = \dim(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) + \dim(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}).$$

Důkaz. Je-li $\mathbf{X} = \{\mathbf{o}\}$ nebo $\mathbf{Y} = \{\mathbf{o}\}$, pak uvedená rovnost zřejmě platí. Předpokládejme tedy dále, že $\mathbf{X} \neq \{\mathbf{o}\} \neq \mathbf{Y}$, takže $\dim \mathbf{X} > 0$ a $\dim \mathbf{Y} > 0$. Průnik podprostorů $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$ je pak též podprostorem ve $(\mathbf{V}, +, \cdot)$, a tedy buďto $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{o}\}$, anebo $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} \neq \{\mathbf{o}\}$, takže $\dim(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}) > 0$. V tom případě nechť posloupnost vektorů $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k$, kde $k > 0$, tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbf{X} \cap \mathbf{Y}, +, \cdot)$. Případu $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{o}\}$ pak odpovídá hodnota $k = 0$. Podle předminulého tvrzení potom existují vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_h$ takové, že posloupnost vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_h, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbf{X}, +, \cdot)$, přičemž $h + k > 0$, a též existují vektory $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_\ell$ takové, že posloupnost vektorů $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_\ell$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbf{Y}, +, \cdot)$, přičemž $k + \ell > 0$. Ukážeme, že pak posloupnost vektorů

$$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_h, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_\ell$$

tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbf{X}+\mathbf{Y},\ +,\ \cdot\ )$. Tím potom bude ověřena také výše uvedená rovnost, neboť pak bude vycházet $\dim \mathbf{X} + \dim \mathbf{Y} = h + k + k + \ell = \dim(\mathbf{X}+\mathbf{Y}) + \dim(\mathbf{X}\cap\mathbf{Y})$.

Fakt, že výše uvedené vektory generují celý podprostor $\mathbf{X}+\mathbf{Y}$, plyne přímo z toho, že vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_h, \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k$ generují celý podprostor $\mathbf{X}$ a vektory $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_\ell$ zase generují celý podprostor $\mathbf{Y}$. Zbývá tedy dokázat lineární nezávislost výše uvedených vektorů.

Nechť tedy $r_1, r_2, \ldots, r_k, s_1, s_2, \ldots, s_h, t_1, t_2, \ldots, t_\ell \in T$ jsou takové prvky, že platí

$$\begin{aligned} s_1{\cdot}\mathbf{x}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{x}_2 + \cdots + s_h{\cdot}\mathbf{x}_h + r_1{\cdot}\mathbf{z}_1 + r_2{\cdot}\mathbf{z}_2 + \cdots + r_k{\cdot}\mathbf{z}_k& \\ + t_1{\cdot}\mathbf{y}_1 + t_2{\cdot}\mathbf{y}_2 + \cdots + t_\ell{\cdot}\mathbf{y}_\ell &= \mathbf{o}. \end{aligned}$$

Odtud pak plyne, že

$$\begin{aligned} s_1{\cdot}\mathbf{x}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{x}_2 + \cdots + s_h{\cdot}\mathbf{x}_h + r_1{\cdot}\mathbf{z}_1 + r_2{\cdot}\mathbf{z}_2 + \cdots + r_k{\cdot}\mathbf{z}_k& \\ = -t_1{\cdot}\mathbf{y}_1 - t_2{\cdot}\mathbf{y}_2 - \cdots - t_\ell{\cdot}\mathbf{y}_\ell&. \end{aligned}$$

Vektor na levé straně rovnosti ovšem náleží do podprostoru $\mathbf{X}$, zatímco vektor na pravé straně rovnosti náleží do podprostoru $\mathbf{Y}$. Náleží tedy oba tyto vektory do podprostoru $\mathbf{X}\cap\mathbf{Y}$. Bází vektorového prostoru $(\mathbf{X}\cap\mathbf{Y}, +, \cdot)$ je ovšem posloupnost vektorů $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k$ (pokud $k > 0$). Znamená to tedy, že musí existovat prvky $q_1, q_2, \ldots, q_k \in T$ takové, že platí

$$-t_1{\cdot}\mathbf{y}_1 - t_2{\cdot}\mathbf{y}_2 - \cdots - t_\ell{\cdot}\mathbf{y}_\ell = q_1{\cdot}\mathbf{z}_1 + q_2{\cdot}\mathbf{z}_2 + \cdots + q_k{\cdot}\mathbf{z}_k,$$

odkud vychází, že

$$q_1{\cdot}\mathbf{z}_1 + q_2{\cdot}\mathbf{z}_2 + \cdots + q_k{\cdot}\mathbf{z}_k + t_1{\cdot}\mathbf{y}_1 + t_2{\cdot}\mathbf{y}_2 + \cdots + t_\ell{\cdot}\mathbf{y}_\ell = \mathbf{o}.$$

Poněvadž ale posloupnost vektorů $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_\ell$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbf{Y}, +, \cdot)$, plyne odtud, že $q_1 = q_2 = \cdots = q_k = t_1 = t_2 = \cdots = t_\ell = 0$. Z druhé ze shora uvedených rovností pak ale plyne, že

$$s_1{\cdot}\mathbf{x}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{x}_2 + \cdots + s_h{\cdot}\mathbf{x}_h + r_1{\cdot}\mathbf{z}_1 + r_2{\cdot}\mathbf{z}_2 + \cdots + r_k{\cdot}\mathbf{z}_k = \mathbf{o},$$

což vzhledem k tomu, že posloupnost vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_h$, $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_k$ tvoří bázi vektorového prostoru $(\mathbf{X}, +, \cdot)$, má za následek, že také $s_1 = s_2 = \cdots = s_h = r_1 = r_2 = \cdots = r_h = 0$. Toto zjištění spolu s předchozím potvrzuje lineární nezávislost shora uvedené posloupnosti vektorů.

Tvrzení. Nechť $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ představují některou bázi tohoto prostoru. Pak pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existují jednoznačně určené prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$ takové, že $\mathbf{u} = s_1{\cdot}\mathbf{f}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + s_n{\cdot}\mathbf{f}_n$.

Poznámka. Prvky $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se pak nazývají **souřadnice** vektoru $\mathbf{u}$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$.

Důkaz. Existence prvků $s_1, s_2, \ldots, s_n$ plyne z faktu, že vektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ generují prostor $(\mathbf{V}, +, \cdot)$. Jejich jednoznačnost plyne z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ následující úvahou. Nechť $t_1, t_2, \ldots, t_n \in T$ jsou obecně jakékoliv prvky takové, že $\mathbf{u} = t_1{\cdot}\mathbf{f}_1 + t_2{\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + t_n{\cdot}\mathbf{f}_n$. Odečtením odtud dostáváme, že $\mathbf{o} = (s_1 - t_1) \cdot \mathbf{f}_1 + (s_2 - t_2) \cdot \mathbf{f}_2 + \cdots + (s_n - t_n) \cdot \mathbf{f}_n$. To znamená, že $s_1 - t_1 = 0$, $s_2 - t_2 = 0$, …, $s_n - t_n = 0$, takže máme $s_1 = t_1$, $s_2 = t_2$, …, $s_n = t_n$.

V situaci z posledního tvrzení tedy pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ existují jeho jednoznačně určené souřadnice $s_1, s_2, \ldots, s_n \in T$ v bázi $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$, to znamená prvky takové, že je splněno $\mathbf{u} = s_1{\cdot}\mathbf{f}_1 + s_2{\cdot}\mathbf{f}_2 + \cdots + s_n{\cdot}\mathbf{f}_n$. Vzpomeneme-li si nyní na násobení matic nad vektorovým prostorem $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ s maticemi nad tělesem $(T, +, \cdot)$ zavedené na konci kapitoly o vektorových prostorech, můžeme tuto rovnost zapsat také ve tvaru

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \ldots & \mathbf{f}_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}.$$

Zavedeme-li ještě označení $\underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_n\end{pmatrix}$ a označíme-li symbolem $\mathbf{s}$ výše zapsaný sloupec souřadnic $s_1, s_2, \dots, s_n$, pak poslední rovnost lze psát rovněž ve stručném tvaru

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{s}.$$

Nechť ještě jednou $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ je nenulový vektorový prostor konečné dimenze n nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a nechť $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$ je některá jeho báze. Značme opět $\underline{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix}\mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_n\end{pmatrix}$. Nechť $r \in T$ je libovolný prvek a nechť $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ jsou libovolné dva vektory. Nechť $s_1, s_2, \dots, s_n$, resp. $t_1, t_2, \dots, t_n$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{u}$, resp. $\mathbf{v}$ v bázi $\underline{\mathbf{f}}$. Pak

$$s_1 + t_1, s_2 + t_2, \dots, s_n + t_n \text{ jsou souřadnice vektoru } \mathbf{u} + \mathbf{v} \text{ a}$$
$$r \cdot s_1, r \cdot s_2, \dots, r \cdot s_n \text{ jsou souřadnice vektoru } r \cdot \mathbf{u},$$

obojí ovšem opět v bázi $\underline{\mathbf{f}}$. Z této skutečnosti je patrno, že zobrazení

$$\mathtt{C}_{\underline{\mathbf{f}}} : \mathbf{V} \longrightarrow T^n$$

přiřazující každému vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ uspořádanou n-tici jeho souřadnic $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ v bázi $\underline{\mathbf{f}}$ je bijekcí množiny vektorů $\mathbf{V}$ na kartézskou mocninu T^n, která přitom zachovává operace sčítání $+$ i vnějšího skalárního násobení $\cdot$ ve vektorových prostorech $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ a $(T^n, +, \cdot)$. Názorně lze tuto skutečnost vystihnout sdělením, že na oba zmíněné prostory je takto možno hledět jako na dvě kopie jednoho a téhož vektorového prostoru nad tělesem $(T, +, \cdot)$. V této situaci říkáme, že zobrazení $\mathtt{C}_{\underline{\mathbf{f}}}$ je izomorfismem vektorového prostoru $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ na vektorový prostor $(T^n, +, \cdot)$. Přesně bude pojem izomorfismu dvou vektorových prostorů nad týmž tělesem zaveden později.