Matice

Nechť $(R, +, \cdot)$ je okruh a nechť m, n jsou přirozená čísla. Matice typu m/n nad okruhem $(R, +, \cdot)$ vznikne, když libovolných $m{\cdot}n$ prvků z R naskládáme do obdélníkového schematu o m řádcích a n sloupcích. Formálně se **matice typu** m/n nad okruhem $(R, +, \cdot)$ definuje jako libovolné zobrazení

$$A \,:\, \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \;\to\; R$$

přiřazující každé uspořádané dvojici (i, j), kde $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, nějaký prvek z R. Označíme-li pro každá i, j tuto hodnotu v R, kterou zobrazení A přiřazuje dvojici (i, j), pomocí a_{ij}, pak obvyklý způsob, jak se matice A zapisuje, je ve tvaru

$$A \;=\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pak prvek a_{ij} leží v i-tém řádku a v j-tém sloupci matice A. Stručněji se tato matice často zapisuje ve tvaru

$$A \;=\; (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n}$$

anebo jen ve tvaru $A = (a_{ij})$ s udáním, že jde o matici typu m/n.

Mějme nadále matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad $(R, +, \cdot)$. Upotřebíme v dalším textu následující označení. Pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ označme

$$\mathbf{r}_i(A) = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

i-tý řádek matice A a pro každé $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ označme

$$\mathbf{s}_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

j-tý sloupec matice A. Potom výchozí matici A můžeme ztotožnit jednak se sloupcem složeným z jejích řádků, takže lze psát

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(A) \\ \mathbf{r}_2(A) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(A) \end{pmatrix},$$

a také ji můžeme ztotožnit s řádkem složeným z jejích sloupců, takže lze rovněž psát

$$A = \big(\mathbf{s}_1(A) \;\; \mathbf{s}_2(A) \;\; \dots \;\; \mathbf{s}_n(A)\big) .$$

Matici typu m/n, jejíž všechny prvky jsou rovny nulovému prvku 0 okruhu $(R, +, \cdot)$, značíme jako O_{mn} anebo stručně jen jako O, jsou-li rozměry této matice zřejmé z kontextu, a říkáme, že je to **nulová matice**.

Operace s maticemi

Pro libovolné dvě matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ téhož typu m/n nad okruhem $(R, +, \cdot)$ definujeme jejich **součet** $A+B$ jako matici $C = (c_{ij})$ typu m/n, kde pro každá $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. To znamená, že lze psát, že $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

Dále pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad okruhem $(R, +, \cdot)$ a pro libovolný prvek $c \in R$ definujeme **násobek** $c{\cdot}A$ matice A prvkem c jako matici $D = (d_{ij})$ typu m/n, kde pro každá $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $d_{ij} = c{\cdot}a_{ij}$. Takže lze psát, že $c{\cdot}A = (c{\cdot}a_{ij})$.

Zejména můžeme k dané matici $A = (a_{ij})$ uvažovat matici $(-1){\cdot}A$, kde 1 je jednotkový prvek okruhu $(R, +, \cdot)$ a -1 je prvek k němu opačný. Vzpomeneme-li si ale, že pro libovolný prvek

$a \in R$ platí $(-1)\cdot a = -(1\cdot a) = -a$, vidíme, že pro matici $(-1)\cdot A$ dostáváme $(-1)\cdot A = ((-1)\cdot a_{ij}) = (-a_{ij})$. Z toho důvodu matici $(-1)\cdot A$ značíme stručně jako $-A$, takže lze psát $-A = (-a_{ij})$. O této matici $-A$ říkáme, že je to matice **opačná** k matici A. Je jasné, že potom platí $A + (-A) = O$.

Označíme-li symbolem $\mathrm{Mat}_{mn}(R)$ množinu všech matic typu m/n nad okruhem $(R, +, \cdot)$, pak sčítání matic je binární operací na množině $\mathrm{Mat}_{mn}(R)$ a je zřejmý následující fakt.

Tvrzení. $(\mathrm{Mat}_{mn}(R), +)$ je komutativní grupa.

Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n a libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/p, obě nad okruhem $(R, +, \cdot)$, definujeme jejich **součin** $A \cdot B$ jako matici $C = (c_{ik})$ typu m/p, kde pro každá $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ a $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ klademe

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}.$$

Přístupněji lze tuto definici násobení matic formulovat ve dvou krocích. V prvním kroku nejprve definujeme součin libovolné matice $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ typu $1/n$ nad $(R, +, \cdot)$ s libovolnou maticí $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ typu $n/1$ nad $(R, +, \cdot)$ jako matici typu $1/1$, tedy vlastně jako prvek z R daný předpisem

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + \dots + x_n\cdot y_n.$$

Poznamenejme, že z této definice s využitím distributivity v okruhu $(R, +, \cdot)$ bezprostředně plyne, že pro libovolné matice

$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ typu $1/n$ nad $(R, +, \cdot)$ a pro libovolné matice $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ typu $n/1$ nad $(R, +, \cdot)$ platí rovnosti:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{y} &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{y}, \\ \mathbf{u}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{z}. \end{aligned}$$

Jedná se zde přitom o rovnosti prvků z R.

Ve druhém kroku pak s využitím dříve zavedeného označení pro řádky a sloupce matic můžeme výše uvedenou definici součinu libovolné matice $A = (a_{ij})$ typu m/n nad $(R, +, \cdot)$ s libovolnou maticí $B = (b_{jk})$ typu n/p nad $(R, +, \cdot)$ zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} A\cdot B &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(A) \\ \mathbf{r}_2(A) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_m(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{s}_1(B) & \mathbf{s}_2(B) & \dots & \mathbf{s}_p(B) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1(A)\cdot\mathbf{s}_1(B) & \mathbf{r}_1(A)\cdot\mathbf{s}_2(B) & \dots & \mathbf{r}_1(A)\cdot\mathbf{s}_p(B) \\ \mathbf{r}_2(A)\cdot\mathbf{s}_1(B) & \mathbf{r}_2(A)\cdot\mathbf{s}_2(B) & \dots & \mathbf{r}_2(A)\cdot\mathbf{s}_p(B) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{r}_m(A)\cdot\mathbf{s}_1(B) & \mathbf{r}_m(A)\cdot\mathbf{s}_2(B) & \dots & \mathbf{r}_m(A)\cdot\mathbf{s}_p(B) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zopakujme, že součin $A\cdot B$ je tedy maticí typu m/p nad $(R, +, \cdot)$. Navíc je odtud okamžitě vidět, že pro tento součin matic a pro každé $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ platí

$$\mathbf{r}_i(A\cdot B) = \mathbf{r}_i(A)\cdot B,$$

a podobně pro každé $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ platí

$$\mathbf{s}_k(A\cdot B) = A\cdot\mathbf{s}_k(B).$$

Takto definované násobení matic je asociativní:

Tvrzení. Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n, pro libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/p a pro libovolnou matici

$C = (c_{k\ell})$ typu p/q, všechny nad okruhem $(R, +, \cdot)$, platí

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

Důkaz. Podle definice součinu matic máme $A \cdot B = D$, kde $D = (d_{ik})$ je matice typu m/p, přičemž pro libovolná i, k máme $d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$. Dále máme $(A \cdot B) \cdot C = D \cdot C = F$, kde $F = (f_{i\ell})$ je matice typu m/q, přičemž pro libovolná i, ℓ máme

$$f_{i\ell} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} \cdot c_{k\ell} = \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \Big) \cdot c_{k\ell}.$$

Podobně máme $B \cdot C = G$, kde $G = (g_{j\ell})$ je matice typu n/q, přičemž pro libovolná j, ℓ máme $g_{j\ell} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{k\ell}$. Dále máme $A \cdot (B \cdot C) = A \cdot G = H$, kde $H = (h_{i\ell})$ je matice typu m/q, přičemž pro libovolná i, ℓ máme

$$h_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot g_{j\ell} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \Big(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} \cdot c_{k\ell} \Big).$$

Odtud ovšem s využitím distributivity a asociativity násobení v okruhu $(R, +, \cdot)$ pro libovolná i, ℓ dostáváme

$$h_{i\ell} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{k\ell} = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \cdot c_{k\ell} = f_{i\ell}.$$

To znamená, že $H = F$, což bylo třeba ukázat.

Násobení matic je dále distributivní vůči sčítání matic:

Tvrzení. Pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n a pro libovolné matice $B = (b_{jk})$ a $C = (c_{jk})$, obě typu n/p, přitom vše nad okruhem $(R, +, \cdot)$, platí

$$A \cdot (B + C) = A {\cdot} B + A {\cdot} C.$$

Pro libovolné matice $F = (f_{ij})$ a $G = (g_{ij})$, obě typu m/n, a pro libovolnou matici $H = (h_{jk})$ typu n/p, přitom všechny matice nad okruhem $(R, +, \cdot)$, platí

$$(F + G) \cdot H = F{\cdot}H + G{\cdot}H.$$

Důkaz. Dokážeme první z uvedených rovností; důkaz druhé z nich je analogický. Při tomto důkazu současně ilustrujeme použití dvoukrokové definice součinu matic. Obě matice $A \cdot (B + C)$ a $A{\cdot}B + A{\cdot}C$ v první rovnosti jsou typu m/p. Podle zmíněné definice součinu matic je pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a každé $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ prvek v i-tém řádku a k-tém sloupci matice $A \cdot (B + C)$ roven

$$\mathbf{r}_i(A){\cdot}\mathbf{s}_k(B + C) = \mathbf{r}_i(A){\cdot}(\mathbf{s}_k(B) + \mathbf{s}_k(C)),$$

zatímco prvek v i-tém řádku a k-tém sloupci matice $A{\cdot}B + A{\cdot}C$ je roven

$$\mathbf{r}_i(A){\cdot}\mathbf{s}_k(B) + \mathbf{r}_i(A){\cdot}\mathbf{s}_k(C).$$

Připomeňme, že $\mathbf{r}_i(A)$ je matice typu $1/n$, zatímco $\mathbf{s}_k(B)$ a $\mathbf{s}_k(C)$ jsou matice typu $n/1$. Z dřívějších poznámek o součinech takovýchto matic ovšem víme, že

$$\mathbf{r}_i(A){\cdot}(\mathbf{s}_k(B) + \mathbf{s}_k(C)) = \mathbf{r}_i(A){\cdot}\mathbf{s}_k(B) + \mathbf{r}_i(A){\cdot}\mathbf{s}_k(C)$$

pro všechna uvedená i a k. To znamená, že máme $A \cdot (B + C) = A{\cdot}B + A{\cdot}C$. Důkaz druhé z výše uvedených rovností, jak bylo již řečeno, je analogický.

Matice nad okruhem $(R, +, \cdot)$ mající týž počet řádků jako sloupců, to znamená matice typu n/n pro nějaké přirozené číslo n se nazývají **čtvercové matice řádu** n. Je-li $A = (a_{ij})$ taková čtvercová matice řádu n, pak o prvcích a_{ii} pro $i = 1, 2, \ldots, n$ říkáme, že tvoří **hlavní diagonálu** matice A.

Čtvercovou matici řádu n nad netriviálním okruhem $(R, +, \cdot)$, v níž všechny prvky na hlavní diagonále jsou rovny jednotkovému prvku 1 zmíněného okruhu a všechny ostatní prvky jsou rovny nulovému prvku 0 tohoto okruhu, označujeme symbolem E_n nebo krátce jen E. Máme tedy

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

kde je celkem n řádků a n sloupců. O matici E_n říkáme, že je to **jednotková matice** řádu n nad $(R, +, \cdot)$.

Tato terminologie je odůvodněna faktem plynoucím přímo z definice násobení matic, že pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad daným okruhem $(R, +, \cdot)$ platí $E_m \cdot A = A = A \cdot E_n$.

V souladu s označením zavedeným výše symbolem $\mathrm{Mat}_{nn}(R)$ značíme množinu všech čtvercových matic řádu n nad okruhem $(R, +, \cdot)$. Pak vedle sčítání také násobení matic je binární operací na množině $\mathrm{Mat}_{nn}(R)$ a je evidentní následující fakt.

Tvrzení. $(\mathrm{Mat}_{nn}(R), +, \cdot)$ je okruh.

Poznamenejme, že je-li okruh $(R, +, \cdot)$ netriviální, pak byť by třeba byl sám komutativní, pro $n > 1$ okruh $(\mathrm{Mat}_{nn}(R), +, \cdot)$ není komutativní:

Vezměme například matici $C_n = (c_{ij})$ řádu n, kde $c_{11} = 1$ a $c_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice indexů i, j, takže máme

$$C_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

a vezměme dále matici $D_n = (d_{ij})$ řádu n, kde $d_{12} = 1$ a $d_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice indexů i, j, takže máme

$$D_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak vychází $C_n \cdot D_n = D_n$, zatímco $D_n \cdot C_n = O_{nn}$.

Transponovaná matice

Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

typu m/n nad okruhem $(R, +, \cdot)$. Uvažme matici $A^\top$ typu n/m, která vznikne z matice A záměnou řádků a sloupců, tedy matici

$$A^\top = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

O matici $A^\top$ říkáme, že je to matice **transponovaná** k matici A.

Je jasné, že pro zmíněnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad okruhem $(R, +, \cdot)$ pak platí

$$(A^\top)^\top = A.$$

Transponováním libovolné matice $\mathbf{x}$ typu $1/n$ nad $(R, +, \cdot)$ dostaneme matici $\mathbf{x}^\top$ typu $n/1$ a transponováním libovolné matice

$\mathbf{y}$ typu $m/1$ nad $(R, +, \cdot)$ dostaneme matici $\mathbf{y}^\top$ typu $1/m$. Odtud je pak rovněž zřejmé, že pro již zmíněnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n nad $(R, +, \cdot)$, pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí rovnosti

$$\mathbf{s}_i(A^\top) = \mathbf{r}_i(A)^\top \quad \text{a} \quad \mathbf{r}_j(A^\top) = \mathbf{s}_j(A)^\top.$$

Je-li navíc okruh $(R, +, \cdot)$ komutativní, pak z komutativity násobení v tomto okruhu pro libovolnou matici $\mathbf{x}$ typu $1/n$ a pro libovolnou matici $\mathbf{y}$ typu $n/1$, obě nad $(R, +, \cdot)$, plyne rovnost

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \;=\; \mathbf{y}^\top \cdot \mathbf{x}^\top$$

prvků z R. Odtud a z definice násobení matic pak plyne následující fakt:

Tvrzení. Je-li $(R, +, \cdot)$ komutativní okruh, pak pro libovolnou matici $A = (a_{ij})$ typu m/n a pro libovolnou matici $B = (b_{jk})$ typu n/p, obě nad okruhem $(R, +, \cdot)$, platí

$$(A \cdot B)^\top \;=\; B^\top \cdot A^\top.$$

Důkaz. Opět použijeme dvoukrokovou definici součinu matic. Obě matice $(A \cdot B)^\top$ i $B^\top \cdot A^\top$ jsou typu p/m. Přitom podle zmíněné definice součinu matic pro libovolná $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ a $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ je prvek v i-tém řádku a k-tém sloupci matice $A \cdot B$ roven $\mathbf{r}_i(A) \cdot \mathbf{s}_k(B)$, takže prvek v k-tém řádku a i-tém sloupci matice $(A \cdot B)^\top$ je taktéž roven $\mathbf{r}_i(A) \cdot \mathbf{s}_k(B)$. Prvek v k-tém řádku a i-tém sloupci matice $B^\top \cdot A^\top$ je podle zmíněné definice součinu matic roven $\mathbf{r}_k(B^\top) \cdot \mathbf{s}_i(A^\top) = \mathbf{s}_k(B)^\top \cdot \mathbf{r}_i(A)^\top$. Podle poslední poznámky před tímto tvrzením ovšem platí rovnost

$$\mathbf{r}_i(A) \cdot \mathbf{s}_k(B) \;=\; \mathbf{s}_k(B)^\top \cdot \mathbf{r}_i(A)^\top$$

pro všechna uvedená i, k. To potvrzuje, že $(A \cdot B)^\top \;=\; B^\top \cdot A^\top$.

Blokové matice

V některých situacích bývá vhodné mít danou matici A nad okruhem $(R, +.\cdot)$ rozdělenou několika vodorovnými a svislými čarami na části nazývané **bloky**, což jsou opět matice nad okruhem $(R, +, \cdot)$ obecně menších rozměrů. Na samotnou matici A pak lze pohlížet nikoliv jen jako na matici nad $(R, +, \cdot)$, ale také jako na matici, jejímiž prvky jsou její bloky. Formálně přesná definice následuje.

Bloková matice je matice $A = (A_{ij})$ typu m/n, jejímiž prvky jsou matice A_{ij} nad okruhem $(R, +, \cdot)$ navzájem kompatibilních rozměrů. To znamená, že existují přirozená čísla $r_1, \ldots, r_m$ a $s_1, \ldots, s_n$ taková, že pro každé $i \in \{1, \ldots, m\}$ a každé $j \in \{1, \ldots, n\}$ je matice A_{ij} typu r_i/s_j :

$$
A \;=\; \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccc} \overbrace{\hphantom{A_{11}}}^{s_1} & \overbrace{\hphantom{A_{12}}}^{s_2} & \overbrace{\hphantom{A_{13}}}^{s_3} & \cdots & \overbrace{\hphantom{A_{1n}}}^{s_n} \end{array} \\
\begin{array}{c} r_1\{ \\ r_2\{ \\ r_3\{ \\ \vdots \\ r_m\{ \end{array} &
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1n} \\ \hline
A_{21} & A_{22} & A_{23} & \ldots & A_{2n} \\ \hline
A_{31} & A_{32} & A_{33} & \ldots & A_{3n} \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline
A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \ldots & A_{mn}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Vypíšeme-li tedy v zápisu této blokové matice $A = (A_{ij})$ každý blok A_{ij} pomocí jeho prvků, můžeme na matici A pohlížet prostě jako na matici typu $r_1 + \cdots + r_m \big/ s_1 + \cdots + s_n$ nad $(R, +, \cdot)$.

Lze tedy uvedeným způsobem blokové matice chápat jako běžné matice. Tím jsou pak i pro blokové matice definovány operace sčítání a násobení matic. Jsou-li ovšem sčítané, případně násobené matice rozděleny do bloků “sobě odpovídajícím způsobem”, pak jejich součet, případně součin je matice, kterou lze opět zapsat jako blokovou matici. Navíc v takovém případě je možno zmíněné operace provádět “po blocích”. Podrobně to vypadá, jak je uvedeno dále.

Jsou-li $A = (A_{ij})$ a $B = (B_{ij})$ dvě blokové matice typu m/n, přičemž pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ a každé $j \in \{1, \dots, n\}$ jsou A_{ij} i B_{ij} matice typu r_i/s_j nad $(R, +, \cdot)$, pak pro součet těchto blokových matic platí

$$A + B \;=\; \big(A_{ij} + B_{ij}\big),$$

což vyjadřuje fakt, že $A + B$ je opět bloková matice typu m/n, jejímiž bloky jsou matice $A_{ij} + B_{ij}$ typů r_i/s_j.

Je-li $A = (A_{ij})$ bloková matice typu m/n, přičemž pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$ a každé $j \in \{1, \dots, n\}$ je A_{ij} matice typu r_i/s_j nad $(R, +, \cdot)$, a je-li $C = (C_{jk})$ bloková matice typu n/p, přičemž pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ a každé $k \in \{1, \dots, p\}$ je C_{jk} matice typu s_j/t_k nad $(R, +, \cdot)$, pak lze ukázat, že pro součin těchto blokových matic platí

$$A \cdot C \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot C_{jk}\right),$$

což v tomto případě vyjadřuje fakt, že $A \cdot C$ je bloková matice typu m/p, jejímiž bloky jsou matice $\sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot C_{jk}$ typů r_i/t_k. Ověření tohoto faktu je snazší provést na příkladech, jejichž propočtem se ozřejmí princip, který je příčinou toho, že toto tvrzení platí v plné obecnosti, jak je zde uvedeno.