Domácí úlohy ke cvičení č. 8

1. V každé z následujících úloh je dán vektorový prostor $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ a podprostory $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$. Pokaždé potom rozhodněte, zda součet $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ těchto podprostorů je přímým součtem a zda platí, že $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{V}$.

a) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{2n+1}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde $n > 0$, a jeho podprostory

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{(r_1, r_2 \ldots, r_{2n+1}) \mid r_1 = r_3 = \cdots = r_{2n-1} = r_{2n+1}\}, \\ \mathbf{Q} &= \{(r_1, r_2 \ldots, r_{2n+1}) \mid r_1 = 0 = r_2 = r_4 = \cdots = r_{2n-2} = r_{2n}\}. \end{aligned}$$

b) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde $n > 0$, a jeho podprostory

$$\mathbf{P} = \mathbb{R}^n, \qquad \mathbf{Q} = (i \cdot \mathbb{R})^n,$$

kde $i \cdot \mathbb{R} = \{i \cdot r \mid r \in \mathbb{R}\}$.

c) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{2n}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde $n > 1$, a jeho podprostory

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{(r_1, r_2 \ldots, r_{2n}) \mid r_1 = r_3 = \cdots = r_{2n-1},\ r_2 = r_4 = \cdots = r_{2n}\}, \\ \mathbf{Q} &= \{(r_1, r_2 \ldots, r_{2n}) \mid r_1 = r_2,\ r_3 = r_4,\ \ldots\ ,\ r_{2n-1} = r_{2n}\}. \end{aligned}$$

d) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{2n-1}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde $n > 1$, a jeho podprostory

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \langle &(1,0,1,0,1,\ldots,1,0,1),\ (0,1,0,0,0,\ldots,0,0,0), \\ &(0,0,0,1,0,\ldots,0,0,0),\ \ldots\ ,\ (0,0,0,0,0\ldots,0,1,0)\rangle, \\ \mathbf{Q} = \langle &(0,1,0,1,0,\ldots,0,1,0),\ (1,0,0,0,0,\ldots,0,0,0), \\ &(0,0,1,0,0,\ldots,0,0,0),\ \ldots\ ,\ (0,0,0,0,0,\ldots,0,0,1)\rangle. \end{aligned}$$

e) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, kde $n > 0$, a jeho podprostory

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \langle &(1+i, 0, 0, \ldots, 0),\ (0, 1+i, 0, \ldots, 0),\ \ldots \\ &\ldots\ ,\ (0, \ldots, 0, 1+i, 0),\ (0, \ldots, 0, 0, 1+i)\rangle, \\ \mathbf{Q} = \langle &(1-i, 0, 0, \ldots, 0),\ (0, 1-i, 0, \ldots, 0),\ \ldots \\ &\ldots\ ,\ (0, \ldots, 0, 1-i, 0),\ (0, \ldots, 0, 0, 1-i)\rangle. \end{aligned}$$

f) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a jeho podprostory

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R} \mid f(0) = f(1) = 0\}, \\ \mathbf{Q} &= \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R} \mid f \text{ je lineární funkce}\}. \end{aligned}$$

g) Je dán vektorový prostor $(\mathbb{R}^{\langle 0,1\rangle}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ a jeho podprostory

$$\mathbf{P} = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R} \mid (\forall x \in \langle 0,1\rangle)(f(1-x) = f(x))\},$$
$$\mathbf{Q} = \{f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R} \mid (\forall x \in \langle 0,1\rangle)(f(1-x) = -f(x))\}.$$

2. V každé z následujících úloh jsou dána tři zobrazení $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pokaždé rozhodněte, zda se jedná o lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ nad tělesem $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

a) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin(x + \frac{\pi}{4})$.

b) $f(x) = x,\ g(x) = x^2,\ h(x) = x^3$.

c) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = e^x$.

d) $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2},\ g(x) = \cos^2 \frac{x}{2},\ h(x) = \cos x$.

e) $f(x) = \sqrt{1 + x^2},\ g(x) = \left(1 + \sqrt{|x|}\right)^2,\ h(x) = 1 + |x|$.

f) $f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin 2x$.

g) $f(x) = 1,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$.

h) $f(x) = 1 + 2x + 3x^2,\ g(x) = 1 + 3x + 5x^2,\ h(x) = 1 + 5x + 9x^2$.

i) $f(x) = \sqrt[3]{x^2},\ g(x) = \sqrt[4]{x^2},\ h(x) = \sqrt[6]{x^2}$.

j) $f(x) = x^2 - 3,\ g(x) = (x + 1)^2,\ h(x) = x^2 - x - 5$.