Masarykova univerzita
Přírodvědecká fakulta

Bakalářská práce

Lineární algebra, sbírka příkladů

Brno 2007

Lenka Malounková

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury.

V Brně dne 14. května 2007 ....

Děkuji tímto RNDr. Pavlu Horákovi za rady, které mi během vypracovávání poskytl a za ochotu a trpělivost, s kterou se mi věnoval při konzultačních hodinách.

Obsah

Úvod

Obsahem mé bakalářské práce je vypracování sbírky řešených příkladů ze sbírky příkladů RNDr. Pavla Horáka *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I.* k předmětu **M1115 Lineární algebra a geometrie 1**, který je povinným předmětem v bakalářských studijních oborech Matematika se zaměřením na vzdělávání a Matematika pro víceoborové studium v rámci programu Matematika na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity.
Konkrétně se jedná o příklady testového charakteru, tzv. "A" příklady, které svým zadáním prověřují především pochopení definic, vět a tvrzení a jejich užití v praxi, a to z kapitol 3 až 7. Číslování kapitol, paragrafů a příkladů souhlasí s číslováním ve výše uvedené sbírce. Záměrně jsou vynechány příklady číslo: 7.2.A5 až 7.2.A9, 7.3.A1 až 7.3.A10, 7.4.A7 a 7.4.A8, a to z důvodu toho, že sbírka příkladů byla vypracována k předmětu **Algebra a teoretická aritmetika I** z roku 1991, zatímco nyní se používají k výše uvedenému předmětu. Dále jsem po dohodě s RNDr. Horákem vynechala všechny příklady číslo A10.d).
Zadání příkladů jsou totožná se zadáními ve výše uvedené sbírce kromě příkladů 7.1.A5 a 7.1.A7, ve kterých jsem nahradila slovo *defekt* slovním obratem *dimenze* $Ker\,\varphi$ a slovo *hodnost* slovním obratem $Im\,\varphi$. Dále používám u označení tělesa komplexních čísel písmeno **C** místo ve skriptech používaného písmene **K**. Ostatní označení jsou naprosto totožná s označeními ve skriptech.
Stejně jako ve sbírce příkladů zkratka "U. p." znamená "Udejte příklad".
Celá práce je sestavená tak, že pod zadáním každého příkladu je uvedeno řešení, označení **Řešení:**, a u většiny příkladů je připojen i komentář k řešení, označení **Komentář:**. Komentář se nevyskytuje jednak u příkladů, u nichž jsem nepovažovala za nutné řešení jakkoliv komentovat, dále u příkladů, jejichž odpověď je "neexistuje", neboť zdůvodnění této odpovědi je součástí řešení, a dále u většiny příkladů, kde je za úkol uvést příklad nějaké podmínky.

Není-li uvedeno jinak, má příklad více možných řešení a uvedené jedno řešení je pouze jedna z možností.

Čísla všech definic a vět, které se vyskytují v komentářích k řešením jsou výhradně ze skript RNDr. Pavla Horáka *Lineární algebra a geometrie 1* z roku 2007, která jsou uveřejněná na internetu na adrese `http://www.math.muni.cz/~horak/LA_SKRIPTA.pdf`.

Mám-li se rozpomenout na své začátky s lineární algebrou, potažmo jí předcházejícím Základům matematiky, nebyly nijak veselé. Přesto, že jsem měla pocit, že z matematiky toho vím z gymnázia dost, opak byl skutečností. O důkazech vět jsem neměla ani potuchu a to, že matematika není jen o počítání s čísly jsem se dozvěděla pořádně rovněž až na vysoké škole. Velmi obtížné pro mě ze začátku bylo i se vyjadřovat přesně matematicky, tj. formulovat definice a věty přesně podle jejich znění, ne ledabyle. Provést důkaz věty, byl pro mě v začátcích studia nepřekonatelný problém. Nějak mi totiž stále unikal smysl, proč něco dokazovat, když to zní rozumně a funguje to na mnoha příkladech. Obdobná situace byla i při řešení příkladů typu "A", které jsou obsahem této práce. Já sama bych takovou sbírku uvítala s největším nadšením, protože, přesto, že jsem zkoušku úspěšně absolovovala, řešení některých příkladů se mi ozřejmilo až během vypracovávání této sbírky. Dost příkladů jsem se tenkrát, nejen já, ale i mnoho mých kolegů, prostě naučila nazpamět a tiše doufala, že se mě na ně nikdo nebude vyptávat.

Pokud tedy máte stejné pocity i vy při studiu lineární algebry, vězte, že pokud se prokoušete začátky a nebudete se vzdávat předčasně, všechny tyto pocity zmizí. Doufám, že k tomu malou měrou přispěje i tato sbírka.

Bakalářská práce je k dispozici všem zájemcům na veřejném webu Masarykovy univerzity `http://www.is.muni.cz/`, pod odkazy Lidé - Absolventi a archiv závěrečných prací.

Kapitola 3

VEKTOROVÉ PROSTORY

§1: Vektorový prostor nad číselným tělesem

[3.1.A1]. U. p. vektorového prostoru nad číselným tělesem, který obsahuje konečně mnoho vektorů.

Řešení: nulový vektorový prostor

Komentář: Jediné možné řešení neboť, obsahuje-li vektorový prostor libovolný nenulový vektor, pak obsahuje nekonečně mnoho vektorů.

[3.1.A2]. U. p. vektorového prostoru nad číselným tělesem, který obsahuje právě 8 vektorů.

Řešení: Neexistuje, neboť obsahuje-li vektorový prostor libovolný nenulový vektor, pak obsahuje nekonečně mnoho vektorů.

V následujících 5 příkladech budeme uvádět řešení vyjmenováním parametrů potřebných pro zadání vektorového prostoru. Musíme tedy u každého příkladu popsat číselné těleso a množinu vektorů, dále zadat sčítání vektorů a násobení čísla s vektorem.

[3.1.A3]. Popište vektorový prostor $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}}$.

Řešení:
číselné těleso: $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{2}}) = \{a + \sqrt{2}b \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$
množina vektorů: $\mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{Q}(\sqrt{\mathbf{2}})\}$
sčítání vektorů: $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$
násobení čísla s vektorem: $t.\mathbf{u} = (t.u_1, t.u_2)$

[3.1.A4]. Popište vektorový prostor $\mathbf{Q}(\mathbf{i})^{\mathbf{3}}$.

Řešení:
číselné těleso: $\mathbf{Q}(\mathbf{i}) = \{a + ib \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$
množina vektorů: $\mathbf{Q}(\mathbf{i})^{\mathbf{3}} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{Q}(\mathbf{i})\}$
sčítání vektorů: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
násobení čísla s vektorem: $t.\mathbf{u} = (t.u_1, t.u_2, t.u_3)$

[3.1.A5]. Popište vektorový prostor $\mathbf{R_4}[\mathbf{x}]$.

Řešení:
číselné těleso: reálná čísla $\mathbf{R}$
množina vektorů: polynomy f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 stupňů 0 až 4, tzn. $f_1 = 1, f_2 = x, f_3 = x^2$, $f_4 = x^3, f_5 = x^4$
sčítání vektorů: stejné jako běžné sčítání polynomů
násobení čísla s vektorem: stejné jako násobení polynomu číslem

[3.1.A6]. Popište vektorový prostor $\mathbf{C^5}$.
Řešení:
číselné těleso: $\mathbf{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{R}\}$
množina vektorů: $\mathbf{C^5} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1, \ldots, x_5 \in \mathbf{C}\}$
sčítání vektorů: $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4, u_5 + v_5)$, přičemž v každé složce ještě musíme pamatovat na to, že počítáme s komplexními čísly a řídit se pak podle pravidel sčítání dvou komplexních čísel.
násobení čísla s vektorem: $t.\mathbf{u} = (t.u_1, t.u_2, t.u_3, t.u_4, t.u_5)$, přičemž opět v každé složce musíme pamatovat na to, že jak číslo t tak číslo ve složce vektoru je komplexní a pak se musíme řídit pravidly pro násobení dvou komplexních čísel.

[3.1.A7]. Nechť $(T, +, \cdot)$ je libovolné číselné těleso. Popište, jak lze T chápat jako vektorový prostor nad T.
Řešení:
číselné těleso: T
množina vektorů: T
sčítání vektorů: sčítání prvků v tělese T
násobení čísla s vektorem: násobení prvků v tělese T

[3.1.A8]. U. p. vektorového prostoru V nad T a dvou různých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ takových, že $3{\cdot}\mathbf{u}{=}3{\cdot}\mathbf{v}$

Řešení: Neexistuje, protože: $3{\cdot}\mathbf{u} = 3{\cdot}\mathbf{v} \Rightarrow 3{\cdot}\mathbf{u} - 3{\cdot}\mathbf{v} = \mathbf{o} \Rightarrow 3{\cdot}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{o}$. Poslední vztah je platný pouze tehdy, je-li $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{o}$, tedy pokud $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, což je spor s předpokladem, že $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

[3.1.A9]. U. p. dostatečné, ale nikoliv nutné podmínky pro to, aby součin čísla t s vektorem $\mathbf{u}$ byl nulový vektor.

Řešení: $\mathbf{u} = \mathbf{o}$

[3.1.A10]. U. p. nutné a dostatečné podmínky pro to, aby součin čísla t s vektorem $\mathbf{u}$ byl nenulový vektor.

Řešení: $\mathbf{u} \neq \mathbf{o} \wedge t \neq \mathbf{0}$

§2: Podprostory vektorového prostoru

[3.2.A1]. U. p. podmnožiny M vektorového prostoru $\mathbf{Q^4}$, která
a) je nekonečná a není podprostorem v $\mathbf{Q^4}$

Řešení: $M = \{(x, y, z, 1) \mid$ x, y, z $\in \mathbf{Q}\}$

Komentář: Součet dvou prvků této množiny, jistě do M nenáleží, tedy tato množina nesplňuje 1. podmínku vektorového podprostoru.

b) je konečná a je podprostorem v $\mathbf{Q^4}$.

Řešení: prázdná množina

Komentář: Tato množina generuje prostor obsahující nulový vektor a tento prostor je triviálním podprostorem $\mathbf{Q^4}$.

[3.2.A2]. U. p. netriviálního podprostoru ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}[\mathbf{x}]$.
Řešení: $\mathbf{R_2}[\mathbf{x}]$
Komentář: Podprostor obsahuje všechny polynomy stupně ≤ 2.

[3.2.A3]. U. p. podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{Q^3}$ tak, že
a) $(1,\ 4,\ 2) \in W \wedge (1,\ 1,\ 1) \notin W$
Řešení: $W = L((1,4,2))$

b) W obsahuje právě 3 vektory.
Řešení: Neexistuje, protože vektorový prostor obsahuje buď jeden vektor (nulový) nebo nekonečně mnoho vektorů.

[3.2.A4]. U. p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbf{R^3}$ tak, že:
a) W_1, W_2 jsou disjunktní
Řešení: Neexistuje, protože každý podprostor obsahuje nulový vektor, tedy průnik dvou podprostorů nemůže být prázdný.

b) $W_1 \cap W_2 \subset \{(1,\ 4,\ 2)\}$
Řešení: Neexistuje, protože průnikem podprostorů W_1, W_2 by musela být prázdná množina, což nelze.

c) $W_1 \cap W_2 = \{(1,\ 4,\ 2)\}$
Řešení: Neexistuje, protože průnik dvou podprostorů musí vždy obsahovat nulový vektor.

d) $W_1 \cap W_2 \supset \{(1,\ 4,\ 2)\}$.
Řešení: $W_1 = L((1,4,2))$, $W_2 = L((1,4,2),(1,0,0))$

[3.2.A5]. U. p. podmnožiny M ve vektorovém prostoru $\mathbf{R^4}$ tak, aby platilo
a) $M \subset [M]$
Řešení: $M = \{(1,\ 0,\ 0,\ 0)\}$

b) $M = [M]$
Řešení: $M = \{t.(1,\ 0,\ 0,\ 0) \mid t \in \mathbf{R}\}$

c) $M \supset [M]$
Řešení: Neexistuje, protože víme, že vždy platí $M \subseteq [M]$.

d) $[M] = \{(0,\ 0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1,\ 1),\ (-5,\ -5,\ -5,\ -5)\}$.
Řešení: Neexistuje, protože podprostor $[M]$,tj. podprostor generovaný množinou M, obsahuje nekonečně mnoho vektorů.

[3.2.A6]. U. p. nekonečné množiny $M \subset Q^2$ tak, že $[M] = \mathbf{Q^2}$.
Řešení: $M = \mathbf{Q^2}$ - $\{(0,\ 0)\ \}$
Komentář: Je vidět, že M není podprostor a tedy podprostor generovaný M musí být ostře nad M, což splňuje pouze $\mathbf{Q^2}$.

[3.2.A7]. U. p. dvou podmnožin M, L ve vektorovém prostoru $\mathbf{R^3}$ takových, že $M \neq L$, ale $[M] = [L]$.

Řešení: $M = \{(1,\ 0,\ 0)\}$, $L = \{(2,\ 0,\ 0)\}$

Komentář: Množiny M, L jsou různé, přesto obě generují stejný podprostor, konkrétně podprostor $\{\ (t, 0, 0) \mid t \in \mathbf{R}\ \}$.

[3.2.A8]. U. p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 v $\mathbf{R^2}$ tak, že jejich součet $W_1 + W_2$ není přímým součtem.

Řešení: $W_1 = \mathrm{L}((1{,}0))$, $W_2 = \mathbf{R^2}$

Komentář: Jediné možné řešení.

[3.2.A9]. U. p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 v $\mathbf{R^4}$ tak, že
a) $W_1 \cup W_2 \subset W_1 + W_2$

Řešení: $W_1 = L((1, 0, 0, 0))$, $W_2 = L((0, 1, 0, 0))$

b) $W_1 \cup W_2 \supset W_1 + W_2$

Řešení: Neexistuje, protože podle věty 2.4.2. platí: $W_1 + W_2 = [W_1 \cup W_2]$, tedy součet podprostorů $W_1 + W_2$ je nejmenším podprostorem v $\mathbf{R^4}$ obsahujícím sjednocení $W_1 \cup W_2$ a proto tedy nelze, aby součet podprostorů byl pod jejich sjednocením.

c) $W_1 \cup W_2 = W_1 + W_2$

Řešení: $W_1 = L((1, 0, 0, 0))$, $W_2 = L((2, 0, 0, 0))$

d) $W_1 \cup W_2 = W_1 \dot{+} W_2$.

Řešení: $W_1 = L((1,\ 0,\ 0,\ 0))$, $W_2 = \mathbf{o}$

Komentář: Sjednocením těchto podprostorů je sám podprostor W_1, a zároveň se jedná i o přímý součet neboť průnikem uvedených podprostorů je nulový vektor.

[3.2.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby součet dvou podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru V byl přímým součtem.

Řešení:
a) $\mathbf{o} \in W_1$
b) $W_1 = \{\mathbf{o}\ \}$
c) $W_1 \cap W_2 = \mathbf{o}$

§3: Lineární závislost a nezávislost vektorů

[3.3.A1].U. p. tří různých vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{R^2}$, které
a) generují prostor $\mathbf{R^2}$

Řešení: $\mathbf{u} = (1,\ 0)$, $\mathbf{v} = (1,\ 1)$, $\mathbf{w} = (0,\ 2)$

b) negenerují prostor $\mathbf{R^2}$.

Řešení: $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0)$

Komentář: Je vidět, že např. vektor (0, 1) nelze napsat jako lineární kombinaci zadaných vektorů.

[3.3.A2]. U. p. různých vektorů (tj. polynomů) $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbf{R_2}[\mathbf{x}]$, které
a) generují prostor $\mathbf{R_2}[\mathbf{x}]$

Řešení: $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$, $f_4 = -1 + x$

b) negenerují prostor $\mathbf{R_2}[\mathbf{x}]$.

Řešení: $f_1 = 1$, $f_2 = \mathrm{x}$, $f_3 = 1 - x$, $f_4 = 2 + \mathrm{x}$

Komentář: Je vidět, že např. polynom 2. stupně nelze získat jako lineární kombinaci zadaných vektorů.

[3.3.A3]. U. p. tří různých vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R^4}$ tak, že vektor $\mathbf{u}$ generuje tentýž prostor v $\mathbf{R^4}$, jako vektory $\mathbf{v}, \mathbf{w}$.

Řešení: $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 0, 0, 0)$, $\mathbf{w} = (3, 0, 0, 0)$

[3.3.A4]. U. p. vektoru $\mathbf{u} \in \mathbf{R^3}$ tak, aby vektor $\mathbf{u}$ generoval jiný podprostor v $\mathbf{R^3}$, než vektor $\sqrt{2}\cdot\, \mathbf{u}$.

Řešení: Neexistuje, protože podprostor generovaný vektorem $\mathbf{u}$ je roven $L(\mathbf{u})$, podprostor generovaný vektorem $\sqrt{2}\cdot\, \mathbf{u}$ je roven $L(\sqrt{2}\cdot\, \mathbf{u})$, přičemž zřejmě platí: $L(\mathbf{u}) = L(\sqrt{2}\cdot\, \mathbf{u})$.

[3.3.A5]. U. p. nenulových vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{Q^3}$ tak, aby
a) $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{u} + \mathbf{v})$

Řešení: $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 6)$

b) $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq L(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})$.

Řešení: Neexistuje, neboť: $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})$, tzn. $L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \subseteq L(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})$ a dále $\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \in L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, tzn. $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) \subseteq L(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Tedy oba podprostory se musí rovnat.

[3.3.A6]. U. p. vektorů $\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3} \in \mathbf{R^4}$, které jsou lineárně závislé a přitom vektor $\mathbf{u_1}$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}$.

Řešení: $\mathbf{u_1} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{u_2} = (0, 1, 0, 0)$,$\mathbf{u_3} = (0, 2, 0 ,0)$

Komentář: Vektory jsou lineárně závislé, neboť např. $0\cdot\mathbf{u_1} + (-2)\cdot\mathbf{u_2} + 1\cdot\mathbf{u_3} = \mathbf{o}$. Je ale vidět, že vektor $\mathbf{u_1}$ nelze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících dvou vektorů.

[3.3.A7]. U. p. tří vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{Q^4}$, takových, že
a) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé

Řešení: Neexistuje, protože věta 3. 2. 3 říká, že pokud vybereme je z nějaké posloupnosti vektorů (v našem případě $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$) lineárně závislou posloupnost vektorů (v našem případě $\mathbf{u}, \mathbf{v}$), pak i původní posloupnost vektorů je lineárně závislá.

b) $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé a $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně závislé.

Řešení: $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{w} = (1, 1, 0, 0)$

[3.3.A8]. U. p. nekonečně mnoha vektorů $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}, \ldots$, $\mathbf{u_n}, \ldots$ z vektorového prostoru $\mathbf{R^3}$ tak, aby každé dva z nich byly lineárně nezávislé.
Řešení: $\mathbf{u_1} = (1,\, 1,\, 0)$, $\mathbf{u_2} = (1,\, 2,\, 0)$, $\mathbf{u_3} = (1,\, 3,\, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{u_n} = (1,\, \mathrm{n},\, 0)$, $\ldots$

[3.3.A9]. U. p. vektorů z $\mathbf{R^3}$, které
a) jsou lineárně nezávislé a negenerují prostor $\mathbf{R^3}$

Řešení: (1, 0, 0), (0, 1, 0)

Komentář: Pro generování prostoru jsou nutné nejméně 3 vektory.

b) jsou lineárně nezávislé a generují prostor $\mathbf{R^3}$

Řešení: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)

Komentář: V tomto případě musí být vektory právě 3.

c) jsou lineárně závislé a negenerují prostor $\mathbf{R^3}$

Řešení: (1, 0, 0), (2, 0, 0)

d) jsou lineárně závislé a generují prostor $\mathbf{R^3}$.

Řešení: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)

[3.3.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ z vektorového prostoru V byly lineárně nezávislé.
Řešení:
a) $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$
b) $\mathbf{u} = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$
c) vektor $\mathbf{u}$ není násobkem vektoru $\mathbf{v}$

§4: Báze a dimenze vektorového prostoru

[3.4.A1]. U. p. vektorů z vektorového prostoru $\mathbf{R_2[x]}$, které
a) jsou generátory, ale nejsou bází vektorového prostoru $\mathbf{R_2[x]}$

Řešení: $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$, $f_4 = 1 - x$

Komentář: Např. první tři vektory tvoří bázi, čtvrtý je libovolný.

b) jsou lineárně nezávislé, ale nejsou bází vektorového prostoru $\mathbf{R_2[x]}$.

Řešení: $f_1 = 1$, $f_2 = x$

Komentář: Řešením jsou jeden nebo dva lineárně nezávislé vektory.

[3.4.A2]. U. p. vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{Q^2}$, které
a) jsou lineárně nezávislé

Řešení: Neexistuje, protože $\dim \mathbf{Q^2} = 2$, a tedy v tomto prostoru jsou maximálně 2 lineárně nezávislé vektory.

b) negenerují vektorový prostor $\mathbf{Q^2}$.

Řešení: $\mathbf{u} = (1,\, 0)$, $\mathbf{v} = (2,\, 0)$, $\mathbf{w} = (3,\, 0)$

Komentář: Vektory jsou evidentně lineárně závislé a např. vektor $(1,\, 1)$ není možné obržet žádnou lineární kombinací uvedených vektorů.

[3.4.A3]. Uveďte, co všechno můžete říct o čísle n, víte-li, že vektory $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$, $\mathbf{u_4}$
a) generují vektorový prostor $\mathbf{Q^n}$

Řešení: $n \leq 4$

Komentář: Vzhledem k tomu, že $\dim \mathbf{Q^n} = n$, může vektorový prostor generovat n nebo více vektorů. V našem případě $\dim \mathbf{Q^4} = 4$ a tedy musí $n \leq 4$

b) jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru $\mathbf{R_n}[\mathbf{x}]$.

Řešení: $n \geq 4$

Komentář: Vzhledem k tomu, že $\dim \mathbf{R_n}[\mathbf{x}] = n + 1$, může v tomto vektorovém prostoru být maximálně $n + 1$ lineárně nezávislých vektorů. V našem případě tedy musí $n \geq 4$.

[3.4.A4]. Uveďte, co všechno můžete říct o čísle s, víte-li, že vektory $\mathbf{u_1}, \ldots,\, \mathbf{u_s}$
a) generují vektorový prostor $\mathbf{R_5}[\mathbf{x}]$

Řešení: $s \geq 6$

Komentář: Protože $\dim \mathbf{R_5}[\mathbf{x}] = 6$, generuje tento prostor 6 nebo více vektorů.

b) jsou lineárně nezávislé vektory ve vektorovém prostoru $\mathbf{C^5}$.

Řešení: $n \leq 5$

Komentář: Protože $\dim \mathbf{C^5} = 5$, může být v tomto prostoru maximálně 5 lineárně nezávislých vektorů.

[3.4.A5]. U. p. dvou různých podprostorů W_1, W_2 vektorového prostoru $\mathbf{R^3}$ takových, že průnik $W_1 \cap W_2$
a) nemá bázi

Řešení: $W_1 = L((1,\, 0,\, 0))$, $W_2 = L((0,\, 1,\, 0))$

Komentář: Průnikem musí být nulový vektorový prostor.

b) má bázi $\mathbf{u} = (1,\, 1,\, 1)$, $\mathbf{v} = (3,\, 2,\, 1)$.

Řešení: $W_1 = L((1,\, 1,\, 1),\, (3,\, 2,\, 1))$, $W_2 = \mathbf{R^3}$

Komentář: Jeden z podprostorů musí být 2-dimenzionální s bází $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, druhý musí být 3-dimenzionální, tzn. musí se rovnat celému prostoru $\mathbf{R^3}$.

[3.4.A6]. U. p. jednodimenzionálního podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{R_4}[\mathbf{x}]$.

Řešení: $W = L(f)$, kde $f = x + 1$

[3.4.A7]. U. p. dvoudimenzionálního podprostoru W ve vektorovém prostoru $\mathbf{R^4}$ tak, že:
a) W obsahuje vektor $(\sqrt{2}, 3, \sqrt{5}, 7)$

Řešení: $W = L((1,\, 0,\, 0,\, 0),\, (\sqrt{2}, 3, \sqrt{5}, 7))$

b) W obsahuje vektory $(1,\, 1,\, 1,\, 1)$, $(0,\, 1,\, 0,\, 0)$, $(0,\, 0,\, 1,\, 0)$.

Řešení: Neexistuje, protože uvedené vektory jsou lineárně nezávislé.

[**3.4.A8**]**.** U. p. dvou podprostorů W_1, W_2 vektorového prostoru $\mathbf{Q^3}$ takových, že
a) $\dim W_1 = \dim W_2 \wedge W_1 \neq W_2$

Řešení: $W_1 = L((1, 0, 0))$, $W_2 = L((0, 1, 0))$

b) $\dim W_1 = \dim W_2 \wedge W_1 \subset W_2$.

Řešení: Neexistuje, protože je-li jeden podprostor ostře pod druhým podprostorem, pak i dimenze tohoto podprostoru je ostře menší než dimenze druhého podprostoru.

[**3.4.A9**]**.** U. p. třídimenzionálních podprostorů W_1, W_2 ve vektorovém prostoru $\mathbf{R^5}$ takových, že jejich součet je přímým součtem.

Řešení: Neexistuje, protože pokud si rozepíšemem větu o dimenzích součtu a průniku podprostorů, vidíme, že $\dim(W_1 + W_2) \leq 5$ a $\dim W_1 + \dim W_2 = 6$. Dimenze průniku by pak musela být ≥ 1, což je spor s tím, že součet podprostorů má být přímý.

[**3.4.A10**]**.** U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná i dostatečná
pro to, aby dva vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ byly bází vektrového prostoru $\mathbf{R^2}$.

Řešení:

a) vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou různé od nulového vektoru

Komentář: POZOR! V tomto případě je odpověď "Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně nezávislé" nebo odpověď "Vektory $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ generují prostor $\mathbf{R^2}$" špatně, neboť se jedná o 2 vektory v prostoru dimenze 2, tzn. výše uvedené odpovědi by byly podmínky nutné a dostatečné.

b) $\mathbf{u} = (1, 2)$, $\mathbf{v} = (2, 1)$

c) $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ jsou lineárně závislé

Kapitola 4

MATICE A DETERMINANTY

§1: Determinanty

[**4.2.A1**]**.** U. p. čtvercové matice A (nad $\mathbf{R}$) takové, že $\det A$ má právě 16 členů.
Řešení: Neexistuje, protože počet členů determinantu je $n!$, pro žádné n není $n!$ roven 16.

[**4.2.A2**]**.** U. p. čtvercové matice A řádu 5 (nad $\mathbf{Q}$), jejíž všechny prvky jsou nenulové, ale $\det A = 0$.

Řešení: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Komentář: Řádky matice jsou lineárně závislé a tedy podle věty 2. 4. 2. je $\det A = 0$.

[**4.2.A3**]**.** U. p. matice A řádu n (nad $\mathbf{C}$) tak, aby $\det A = c$, kde c je libovolné, pevné komplexní číslo.
Řešení: Matice A řádu n má na diagonále jedničky kromě například prvního řádku, kde je libovolné pevné komplexní číslo c.
Komentář: Determinant výše popsané matice je roven součinu prvků na diagonále, tedy $\det A = c$.

[**4.2.A4**]**.** U. p. matice A řádu 3 (nad $\mathbf{R}$) tak, aby $|A'| = -|A|$.

Řešení: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Komentář: Podle věty 2. 1. platí, že $\det A = \det A'$. Jediné reálné číslo, pro které platí současně věta 2. 1. a požadovaná rovnost je 0, tedy $\det A$ se musí rovnat 0.

[**4.2.A5**]**.** Nechť A je matice řádu 5 (nad $\mathbf{R}$) taková, že $|A| = \sqrt{2}$. Nechť matice B vznikne z matice A tak, že každý její prvek vynásobíme číslem $-\sqrt{3}$. Uveďte, čemu se rovná $|B|$.
Řešení: $\det B = (-\sqrt{3})^5 \cdot \sqrt{2} = -9 \cdot \sqrt{6}$
Komentář: Důvodem výskytu páté mocniny ve výpočtu je to, že vynásobíme-li každý prvek matice číslem $-\sqrt{3}$, znamená to, že každý řádek násobíme tímto číslem.

[**4.2.A6**]**.** Nechť A je matice řádu 6 (nad $\mathbf{R}$) a nechť jsou pevně zvoleny 3 její sloupce. Uveďte, kolik submatic řádu 3 lze ze zvolených sloupců vybrat.
Řešení: 20 submatic
Komentář: V matici řádu 6 lze z pevných sloupců vybrat $\binom{6}{3}$ submatic řádu 3.

[**4.2.A7**]**.** Nechť A je matice řádu n (nad T) a nechť $0 < k < n$ je celé číslo. Uveďte, kolik submatic řádu k lze matici A sestrojit.

Řešení: $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k}$

Komentář: k sloupců v submatici lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby. K těmto vybraným sloupcům lze k řádků vybrat opět $\binom{n}{k}$ způsoby. Protože obě volby jsou nezávislé, výsledky vynásobíme.

[**4.2.A8**]**.** U. p. matice A řádu 3 (nad $\mathbf{R}$) takové, že $|A| \neq 0$ a všechny minory řádu 2 v matici A jsou nulové.

Řešení: Neexistuje, protože provedeme-li výpočet $|A|$ podle Laplacovy věty například rozvojem podle prvního řádku, dostaneme: $|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$, přičemž algebraické doplňky A_{1i} (což jsou minory řádu 2) jsou rovny nule.

[**4.2.A9**]**.** U. p. matice A řádu 3 (nad $\mathbf{R}$) takové, že $|A| = 0$ a všechny minory řádu 2 v matici A jsou nenulové.

Řešení: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Komentář: Vypsáním lze ověřit, že všechny minory řádu 2 jsou nenulové, přitom zřejmě determinant uvedené matice je roven nule, neboť třetí řádek je lineární kombinací prvního a druhého řádku.

[**4.2.A10**]**.** U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby determinant čtvercové matice A byl nenulový.

Řešení:
a) všechny řádky matice A jsou nenulové
b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

§2: Algebra matic

[**4.3.A1**]**.** U. p. matic A, B (nad $\mathbf{R}$), které nejsou čtvercové a přitom existují oba součiny $A \cdot B$ i $B \cdot A$.

Řešení: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Komentář: Oba součiny matic $A \cdot B$, $B \cdot A$ existují pouze tehdy, pokud matice A je typu m/n, a zároveň matice B je typu n/m. V našem případě $m = 2$ a $n = 3$.

[4.3.A2]. U. p. matice $X \in \mathrm{Mat}_{mm}(T)$ tak, aby $X \cdot A = t \cdot A$, kde $A \in \mathrm{Mat}_{mn}(T)$ je daná matice a $t \in T$ je dané číslo.

Řešení: $X = \begin{bmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t \end{bmatrix}$

[4.3.A3]. U. p. báze vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{32}(\mathbf{Q})$.

Řešení:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Komentář: Je vidět, že uvedené matice jsou lineárně nezávislé a dále, že libovolnou matici z vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{32}(\mathbf{Q})$ můžeme vyjádřit jako jejich lineární kombinaci.

[4.3.A4]. U. p. generátorů vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, které nejsou bází tohoto prostoru.

Řešení: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Komentář: Uvedené matice nejsou bází vektorového prostoru $\mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, neboť zřejmě poslední matice je lineární kombinací předcházejících. Bází vektorového prostoru jsou první čtyři matice.

[4.3.A5]. U. p. dvou regulárních matic A, B, které jsou děliteli nuly v okruhu $(\mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R}), +, \cdot)$.

Řešení: Neexistuje, protože pokud A, B jsou děliteli nuly v okruhu $(\mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R}), +, \cdot)$, pak $A \neq 0_{33}$, $B \neq 0_{33} \wedge A \cdot B = 0_{33}$. Jsou-li však A, B regulární, pak podle Cauchyovy věty musí být i $A \cdot B$ regulární, tzn. nemůže nastat $A \cdot B = 0_{33}$.

[4.3.A6]. U. p. dvou singulárních matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ takových, že matice $A \cdot B$ je regulární.

Řešení: Neexistuje, protože podle Cauchyovy věty platí: $|A| = 0 \wedge |B| = 0 \Rightarrow |A \cdot B| = 0$, a tedy $|A \cdot B|$ je singulární.

[4.3.A7]. U. p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{44}(\mathbf{Q})$, k níž neexistuje matice inverzní.

Řešení: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Komentář: Uvedená matice je singulární, protože první a druhý řádek jsou totožné, a tedy k ní neexistuje inverzní matice.

[4.3.A8]. U. p. matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{Q})$, k níž existuje více než jedna inverzní matice.

Řešení: Neexistuje, protože k matici existuje nejvíce jedna inverzní matice, neboť$(\mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{Q}), \cdot)$ je pologrupa s jedničkou a, jak víme, v pologrupě s jedničkou existuje ke každému prvku nejvýše jeden prvek inverzní.

[4.3.A9]. U. p. matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$ takových, že $A \cdot B = E_2$ a $B \cdot A \neq E_2$.

Řešení: Neexistuje, protože, je-li $A \cdot B = E_2$, pak A, B jsou regulární, tzn. existují inverzní matice A^{-1}, B^{-1} a potom $A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot A = A^{-1} \cdot E_2 \cdot A$, neboli $B \cdot A = E_2$.

[4.3.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby k matici $A \in \mathrm{Mat}_{nn}(\mathbf{R})$ existovala matice inverzní.

Řešení:

a) všechny řádky matice A jsou nenulové

b) A je jednotková matice řádu n

c) matice A je regulární

§3: Hodnost matice a další vlastnosti matic

[4.4.A1]. U. p. matice A (nad $\mathbf{R}$) takové, že řádky matice A jsou lineárně nezávislé a sloupce matice A jsou lineárně závislé.

Řešení: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

[4.4.A2]. Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{69}(\mathbf{Q})$ existuje nenulový minor řádu 4. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

Řešení: $4 \leq h(A) \leq 6$

[4.4.A3]. Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{75}(\mathbf{R})$ jsou všechny minory řádu 4 nulové. Uveďte, co všechno lze říci o hodnosti matice A.

Řešení: $h(A) \leq 3$

Komentář: POZOR! Z Laplaceovy věty plyne, že jsou-li v matici A všechny minory řádu 4 nulové, potom také všechny minory řádu většího než 4 jsou v matici A nulové.

[4.4.A4]. Nechť v matici $A \in \mathrm{Mat}_{88}(\mathbf{Q})$ existuje nenulový minor řádu 3 a 5 a existuje nulový minor řádu 2, 4 a 6. Uveďte, co všechno lze pak říci o hodnosti matice A.

Řešení: $5 \leq h(A) \leq 8$

Komentář: V tomto příkladě je důležitý pouze fakt, že existuje nenulový minor řádu 5. Informace o nulových minorech řádu 2, 4 a 6 jsou pro určení hodnosti matice A nepodstatné.

[4.4.A5]. U. p. matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ takových, že $h(A \cdot B) \neq h(B \cdot A)$.

Řešení: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Komentář: Vynásobením matic ověříme, že: $A \cdot B = 0_{33}$ a $B \cdot A = B \neq 0_{33}$ a tedy $h(A \cdot B) = 0$ a $h(B \cdot A) = 1$.

[4.4.A6]. U. p. regulárních matic $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ tak, že $h(A \cdot B) = 2$.

Řešení: Neexistuje, protože víme, že $h(A \cdot R) = h(A)$, kde $R \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ je regulární matice. V našem případě $R = B$ a tedy $h(A \cdot B) = h(A) = 3$, protože A je regulární.

[4.4.A7]. U. p. nenulové matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$, kterou nelze konečným počtem elementárních řádkových úprav převést na jednotkovou matici.

Řešení: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Komentář: Uvedená matice má zřejmě hodnost 2. Provedení libovolné elementární řádkové úpravy nemění hodnost matice, tzn. danou matici nelze elementárními řádkovými úpravami převést na jednotkovou matici, která má hodnost 3.

[4.4.A8]. U. p. matice H tak, aby $H \cdot A$ byla matice, která vznikne ze zadané matice $A \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$ přičtením dvojnásobku 3. řádku k 1. řádku.

Řešení: $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Komentář: Matice H vznikne z matice E_3 provedením úpravy popsané v zadání, tj. přičtením dvojnásobku 3. řádku k 1. řádku (viz důkaz věty 5. 4.).

[4.4.A9]. U. p. bází (1) a (2) vektorového prostoru $\mathbf{R^2}$ tak, že maticí přechodu od báze (1) k bázi (2) je matice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Řešení: Neexistuje, protože matice přechodu od báze k bázi musí být regulární, avšak matice v zadání příkladu je singulární.

[4.4.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby $h(A \cdot B) \neq h(A)$, kde $A, B \in \mathrm{Mat}_{33}(\mathbf{R})$.

Řešení:
a) $A \neq O_{33}$
b) $A = E_3 \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Kapitola 5

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

§1: Základní vlastnosti soustav lineárních rovnic

[5.1.A1]. U. p. dvou ekvivalentních soustav lineárních rovnic (nad **Q**), které sestávají z různého počtu rovnic.

Řešení:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

[5.1.A2]. U. p. soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých (nad **R**), která má právě jedno řešení.

Řešení: Neexistuje, neboť řešitelná soustava rovnic má jediné řešení, pokud počet neznámých je roven hodnosti matice soustavy. V našem případě je $h(A) \leq 3$, tzn. $h(A) \neq 4$.

[5.1.A3]. U. p. soustavy 4 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad **R**), která má právě jedno řešení.

Řešení:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Komentář: V uvedeném příkladu je vidět, že hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice soustavy a tedy soustava má jedno řešení.

[5.1.A4]. U. p. soustavy 2 lineárních rovnic o 2 neznámých (nad **R**), která má právě dvě řešení.

Řešení: Neexistuje, protože soustava lineárních rovnic má buď žádné, jedno nebo nekonečně mnoho řešení.

[5.1.A5]. U. p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 (nad **Q**) tak, že neznámé x_1, x_2, x_3 musí být zvoleny za volné neznámé.

Řešení:

$$\begin{array}{rcl} x_4 & = & 1 \\ 2x_4 & = & 2 \\ x_4 & = & 1 \end{array}$$

Komentář: Řešení je vynuceno; soustava rovnic se musí sestávat ze 3 lineárně závislých rovnic, v nichž se vyskytuje pouze neznámá x_4.

[**5.1.A6**]. U. p. řešitelné soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 (nad $\mathbf{Q}$) tak, že neznámé x_2, x_4 nelze volit za volné neznámé.

Řešení:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & & & & = & 2 \\ & & & & & x_4 & = & 3 \end{array}$$

Komentář: Z rovnic je vidět, že neznámé x_2, x_4 se rovnají konkrétním číslům a tedy je nelze volit jako volné neznámé.

[**5.1.A7**]. Je dána soustava 3 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$), jejíž matice soustavy je singulární. Uveďte, co všechno lze říci o počtu řešení této soustavy.

Řešení: Soustava má buď nekonečně mnoho řešení nebo je neřešitelná.

[**5.1.A8**]. Je dána soustava 4 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{R}$), jejíž rozšířená matice soustavy je regulární. Uveďte, co všechno lze říci o počtu řešení této soustavy.

Řešení: Soustava nemá řešení.

Komentář: Ze zadání plyne, že $h(\bar{A}) = 4$, zatímco $h(A) \neq 4$, protože A má 3 sloupce.

[**5.1.A9**]. U. p. nehomogenní soustavy lineárních rovnic o 4 neznámých (nad $\mathbf{R}$) tak, že množina všech řešení této soustavy je podprostorem ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^4$.

Řešení: Neexistuje, neboť nulový vektor $\mathbf{o}$ zde není řešením a proto množina řešení nemůže být podprostorem.

[**5.1.A10**]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby soustava k lineárních rovnic o n neznámých (nad T) byla neřešitelná.

Řešení:

a) Soustava lineárních rovnic je nehomogenní.

b) Jedna z rovnic má tvar: $0 \cdot x_1 = 1$.

c) Hodnost matice soustavy se nerovná hodnosti rozšířené matice soustavy.

§2: Homogenní soustavy lineárních rovnic

[**5.2.A1**]. U. p. homogenní soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých x_1, x_2, x_3, x_4 (nad $\mathbf{R}$) tak, že za volné neznámé je nutno volit právě neznámé x_1, x_3.

Řešení:

$$\begin{array}{ccccc} x_2 & & & = & 0 \\ & & x_4 & = & 0 \\ x_2 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

[5.2.A2]. U. p. podprostoru W v $\mathbf{R^5}$, který není množinou řešení žádné homogenní soustavy lineárních rovnic o 5 neznámých nad $\mathbf{R}$.

Řešení: Neexistuje, protože podle věty 3. 1. má homogenní soustava rovnic buď pouze nulové řešení nebo nekonečně mnoho řešení.

[5.2.A3]. U. p. homogenní soustavy 3 lineárních rovnic o 5 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, že její podprostor řešení má dimenzi 4.

Řešení:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & = & 0 \end{array}$$

Komentář: Řešení plyne z věty 3. 2.: $\dim U = n - h(A)$.

[5.2.A4]. U. p. homogenní soustavy 2 lineárních rovnic o 5 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, že její podprostor řešení má dimenzi 2.

Řešení: Neexistuje. Odpověď plyne z věty 3. 2.: $\dim U = n - h(A)$. V našem případě $\dim U = 2$, $n = 5$ a tedy $h(A)$ se musí rovnat 3.

[5.2.A5]. Nechť W je podprostor řešení homogenní soustavy 4 lineárních rovnic o 6 neznámých (nad $\mathbf{R}$). Udejte, jakých všech hodnot může nabývat $\dim W$.

Řešení: $2 < \dim W \leq 6$

Komentář: Řešení plyne z věty 3. 2.: $\dim U = n - h(A)$.

[5.2.A6]. U. p. homogenní soustavy lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$) tak, aby bází jejího podprostoru řešení byly vektory (1, 1, 0, 0, 0) a (0, 0, 0, 0, 1).

Řešení:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & & = 0 \\ & & & & x_3 & & = 0 \\ & & & & & x_4 & = 0 \end{array}$$

Komentář: Odpověď plyne z věty 3. 2.: $\dim U = n - h(A)$; podle této $h(A) = 3$, tyto 3 lineárně nezávislé rovnice musí mít takový tvar, aby dané vektory byly řešeními.

[5.2.A7]. U. p. homogenní soustavy lineárních rovnic (nad $\mathbf{R}$) tak, aby bází jejího podprostoru řešení byl vektor (1, 1, 1, 1).

Řešení:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Komentář: Odpověď plyne z věty 3. 2.: $\dim U = n - h(A)$; podle této $h(A) = 3$, tyto 3 lineárně nezávislé rovnice musí mít takový tvar, aby zadaný vektor byl řešením.

[5.2.A8]. U. p. homogenní soustavy 3 lineárních rovnic o 4 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, aby její podprostor řešení neměl bázi.

Řešení: Neexistuje. Vektorový podprostor nemá bázi $\Leftrightarrow$ je nulový, to znamená mělo by se jednat o homogenní soustavu lineárních rovnic, která má pouze nulové řešení.
Z věty 3. 2.: $\dim U = n - h(A)$ plyne: $0 = 4 - h(A) \Rightarrow h(A) = 4$, což nelze.

[5.2.A9]. U. p. homogenní soustavy 4 lineárních rovnic o 3 neznámých (nad $\mathbf{Q}$) tak, aby její podprostor řešení neměl bázi.

Řešení:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & & & & & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 0 \\ & & & & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

Komentář: Soustava má jediné řešení a to, že všechny 3 neznámé se rovnají 0. Podprostor řešení je tedy nulový vektor. Tento podprostor nemá bázi.

[5.2.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby homogenní soustava k lineárních rovnic o n neznámých (nad $\mathbf{R}$) měla nekonečně mnoho řešení.

Řešení:
a) Nulový vektor $\mathbf{o}$ je řešením soustavy.

b) Homogenní soustava lineárních rovnic má tvar: $x_1 + x_2 = 0$.

c) $h(A) < n$, tj. hodnost matice soustavy je menší než počet neznámých.

Kapitola 6

EUKLIDOVSKÉ VEKTOROVÉ PROSTORY

§1: Skalární součin, velikost a odchylka vektorů

[6.1.A1]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{C}$ nad $\mathbf{R}$ definujte skalární součin.

Řešení: Je-li $\mathbf{u} = a + bi = (a, b)$, $\mathbf{v} = c + di = (c, d)$, pak $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = ac + bd$

[6.1.A2]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R_3}[\mathbf{x}]$ definujte skalární součin dvěma různými způsoby.

Řešení: Je-li $f = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$, $g = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0x^0$, pak lze skalární součin f, g definovat:

1. způsob: $f \cdot g = a_3b_3 + a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$

2. způsob: $f \cdot g = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x,\ f, g \in \mathbf{R_3}[\mathbf{x}]$

[6.1.A3]. U. p. reálného vektorového prostoru, ve kterém nelze definovat skalární součin.

Řešení: Neexistuje. Odpověď plyne z věty 1. 1., která říká, že v každém reálném vektorovém prostoru lze definovat skalární součin.

[6.1.A4]. U. p. nenulového vektoru $\mathbf{u}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R^4}$ tak, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$.

Řešení: Neexistuje, protože podle 4. axiomu definice skalárního součinu pro $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ platí: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0$.

[6.1.A5]. U. p. normovaných vektorů $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R^3}$ tak, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sqrt{3}$.

Řešení: Neexistuje, protože podle Schwarzovy nerovnosti platí: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq ||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}||$. V našem případě tedy vychází: $\sqrt{3} \leq 1 \cdot 1$, což neplatí.

[6.1.A6]. U. p. normovaných, lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R^3}$ tak, že $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$.

Řešení: Neexistuje. Odpověď opět plyne ze Schwarzovy nerovnosti a jejího důsledku. V našem případě ve Schwarzově nerovnosti nastává rovnost, což je možné tehdy, jsou-li vektory lineárně závislé.

[6.1.A7]. Nechť skalární součin dvou normovaných vektorů z euklidovského prostoru $\mathbf{R^n}$ je roven -1. Uveďte, co lze říci o lineární závislosti či nezávislosti těchto vektorů.

Řešení: vektory jsou lineárně závislé

Komentář: Odpověď plyne ze Schwarzovy nerovnosti a jejího důsledku, neboť v našem případě vychází: $|-1| = 1$ a tedy ve Schwarzově nerovnosti nastane rovnost.

[6.1.A8]. Nechť $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ jsou normované vektory z euklidovského prostoru $\mathbf{R^4}$. Uveďte, co všechno lze říci o velikosti vektoru $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Řešení: $0 \leq ||\mathbf{u} + \mathbf{v}|| \leq 2$

Komentář: Podle věty 1. 4. 3. platí: $||\mathbf{u}+\mathbf{v}|| \leq ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$. V našem případě $||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}|| = 2$, protože vektory jsou normované.

[6.1.A9]. U. p. vektorů $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R^2}$ tak, že odchylka těchto vektorů je $\frac{2}{3}\pi$.

Řešení: $\mathbf{u} = (1,\ 0)$, $\mathbf{v} = (-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$

Komentář: Složky jednoho z vektorů si zvolíme, co nejjednodušeji, a složky druhého vektoru dopočítáme podle vzorce pro výpočet odchylky dvou vektorů.

[6.1.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby pro vektory $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ z euklidovského prostoru $\mathbf{R^3}$ platilo: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$.

Řešení:
a) vektory $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$ jsou nenulové
b) $\mathbf{u} = (1,\ 2)$,$\mathbf{v} = (3,\ 3)$

§2: Ortogonálnost

[6.2.A1]. U. p. báze euklidovského prostoru $\mathbf{R^4}$, která je ortogonální a není ortonormální.

Řešení: (2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0), (0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)

[6.2.A2]. U. p. dvou různých ortonormálních bází euklidovského prostoru $\mathbf{R^2}$.

Řešení:
1. báze: (1, 0), (0, 1)
2. báze: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

[6.2.A3]. U. p. ortogonálních vektorů, které generují euklidovský prostor $\mathbf{R^3}$, ale nejsou bází $\mathbf{R^3}$.

Řešení: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0)

Komentář: Při řešení postupujeme tak, že napíšeme nějakou ortogonální bázi $\mathbf{R^3}$ a přidáme k ní nulový vektor.

[6.2.A4]. Nechť $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$, $\mathbf{u_4}$ jsou nenulové ortogonální vektory z euklidovského prostoru $\mathbf{R^n}$. Uveďte, co všechno lze pak říci o čísle n.

Řešení: $n \leq 4$

[6.2.A5]. Nechť $\mathbf{e_1},\ldots,\mathbf{e_k}$ jsou vektory získané z vektorů $\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_k}$ Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem. Uveďte, kolik z vektorů $\mathbf{e_1},\ldots,\mathbf{e_k}$ je nulových.

Řešení: Je-li $\dim L(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}) = r$ (≤ 4), pak i $\dim L(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}) = r$, což znamená, že právě $(4 - r)$ z vektorů $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, $\mathbf{e_4}$ je nulových. (Zbývajících r vektorů je nenulových a tvoří ortogonální bázi podprostoru $L(\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4})$, tj. podprostoru generovaného vektory $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$, $\mathbf{u_4}$.)

[6.2.A6]. U. p. ortogonálních množin A, B v euklidovském prostoru $\mathbf{R^4}$ tak, že A je konečná množina a B je nekonečná množina.

Řešení: $A = \{(1, 0, 0, 0)\}$, $B = \{(0, 0, x, y) | \; x, y \in \mathbf{R}\}$

[6.2.A7]. U. p. netriviálního podprostoru W euklidovském prostoru $\mathbf{R^4}$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp < \dim W$.

Řešení: $W = L((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$

Komentář: Podle věty 2. 6. 2. je $W \dot{+} W^\perp = \mathbf{R^4}$, tzn. pak podle věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů platí: $\dim W + \dim W^\perp = 4$. Potom (vzhledem k tomu, že W musí být netriviální) vychází, že $\dim W = 3$. Správnou odpovědí je tedy jakýkoliv podprostor v $\mathbf{R^4}$, který má dimenzi 3.

[6.2.A8]. U. p. podprostoru W euklidovském prostoru $\mathbf{R^5}$ tak, aby platilo, že $\dim W^\perp = \dim W$.

Řešení: Neexistuje, protože podle věty 2. 6. 2. je $W \dot{+} W^\perp = \mathbf{R^5}$. Dále podle věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů platí: $\dim W^\perp + \dim W = \dim (W + W^\perp) + \dim (W \cap W^\perp)$. Uvedené podmínky nelze splnit v případě, že $\dim W^\perp = \dim W$.

[6.2.A9]. U. p. podprostoru W euklidovském prostoru $\mathbf{R^4}$ tak, aby ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{u} = (1, 2, 3, 4)$ do podprostoru W byl nulový vektor.

Řešení: $W = L((-4, -3, 2, 1))$

Komentář: Ze zadání plyne, že podprostor W musí být zvolen tak, aby vektor $\mathbf{u}$ ležel v podprostoru $W^\perp$.

[6.2.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
pro to, aby podmnožiny A, B euklidovského prostoru $\mathbf{R^3}$ byly ortogonální.

Řešení:

a) $A \cap B = \emptyset \vee A \cap B = \{\mathbf{o}\}$

b) $A = \mathbf{R^3}$, $B = \{\mathbf{o}\}$

Kapitola 7

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

§1: Základní vlastnosti lineárního zobrazení

[7.1.A1]. U. p. injektivního lineárního zobrazení φ, přičemž
a) $\varphi : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$
Řešení: $\varphi\left((x_1, x_2)\right) = (x_1, x_2, 0)$, pro $(x_1, x_2) \in \mathbf{R^2}$ libovolné

b) $\varphi : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$.
Řešení: Neexistuje, protože podle věty 1. 6. platí, že φ je injektivní $\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 0$ a zároveň podle věty 1. 7. platí: $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim V$. Pokud tedy dosadíme naše hodnoty jednotlivých dimenzí dosteneme: $0 + 2 = 3$, což neplatí.

[7.1.A2]. U. p. surjektivního lineárního zobrazení φ, přičemž
a) $\varphi : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$
Řešení: Neexistuje, protože podle věty 1. 7. platí: $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim V$. Dosadíme-li známé hodnoty dimenzí z našeho příkladu dostaneme: $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + 3 = 2$. Hodnota dimenze jádra by se tedy musela rovnat záporné hodnotě, což nelze.

b) $\varphi : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$.
Řešení: $\varphi\left((x_1, x_2, x_3)\right) = (x_1, x_2)$, pro $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R^3}$ libovolné

[7.1.A3]. U. p. bijektivního zobrazení $\varphi : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^3}$, které není lineárním zobrazením.
Řešení: $\varphi\left((x_1, x_2, x_3)\right) = (x_1, x_2, 1)$
Komentář: Nulový vektor $\mathbf{o} \in V$ se nezobrazí na nulový vektor $\mathbf{o'} \in V'$

[7.1.A4]. U. p. lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$ takového, že platí: $\varphi\left((1, 0, 0)\right) = (1, 0)$ a $\varphi\left((2, 0, 0)\right) = (0, 2)$.
Řešení: Neexistuje, protože podle věty 1. 9. 1. platí, že jsou-li zobrazované vektory lineárně závislé, pak i jejich obrazy jsou lineárně závislé.

[7.1.A5]. U. p. lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R^5} \to \mathbf{R^4}$, že $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) = 2$.
Řešení: Zobrazení zadáme pomocí obrazů vektorů báze prostoru $\mathbf{R^5}$:
$\varphi\,(1, 0, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 1, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 0)$
$\varphi\,(0, 0, 0, 1, 0) = (0, 1, 0, 0)$
$\varphi\,(0, 0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 1)$
Komentář: Vektory $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$ zřejmě tvoří bázi $\operatorname{Ker}\varphi$.

[7.1.A6]. U. p. lineárního zobrazení $\varphi : \mathbf{R^5} \to \mathbf{R^4}$ takového, že je $\operatorname{Im}\varphi = [(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1)]$.

Řešení: Zobrazení zadáme pomocí obrazů vektorů báze prostoru $\mathbf{R^5}$:
$\varphi\,(1, 0, 0, 0, 0) = (1, 2, 3, 4)$
$\varphi\,(0, 1, 0, 0, 0) = (4, 3, 2, 1)$
$\varphi\,(0, 0, 1, 0, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 0, 0, 1, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 0, 0, 0, 1) = \mathbf{o}$

Komentář: Podle věty 1. 2. 2. se generátory $\mathbf{R^5}$ zobrazí na generátory $\varphi\,(\mathbf{R^5}) = \operatorname{Im}\varphi$. Je tedy ihned vidět, že $\operatorname{Im}\varphi = [(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1)]$.

[7.1.A7]. Nechť $\varphi : \mathbf{R^k} \to \mathbf{R^n}$ je lineární zobrazení takové, že $\operatorname{Ker}\varphi = 4$ a $\operatorname{Im}\varphi = 5$. Uveďte, co všechno lze pak říci o číslech k, n.

Řešení: $k = 9$, $n \geq 5$

Komentář: Řešení plyne z věty 1. 7.: $\dim(\operatorname{Ker}\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \dim V$, kde $V = \mathbf{R^k}$.

[7.1.A8]. U. p. izomorfismu $\varphi : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R_3[x]}$.

Řešení: Neexistuje, protože podle věty 1. 10. (věta o izomorfismu vektorových prostorů) platí, že dva vektorové prostory jsou izomorfní právě tehdy, když mají stejnou dimenzi. V našem případě: $\dim \mathbf{R^3} = 3 \neq 4 = \dim \mathbf{R_3[x]}$.

[7.1.A9]. U. p. tří různých vektorových prostorů, které jsou navzájem izomorfní.

Řešení: $\mathbf{R^6}$, $\mathbf{R_5[x]}$, $\mathrm{Mat}_{32}(\mathbf{R})$

Komentář: Víme, že aby vektorové prostory byly navzájem izomorfní, musí být zadané nad stejným číselným tělesem. Proto jsme omezeni na výběr z prostorů n-tic, polynomů a matic. Dále nesmíme zapomenout, že prostory musí mít stejnou dimenzi.

[7.1.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná, ale není dostatečná
b) je dostatečná, ale není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ bylo injektivní.

Řešení:
a) $\varphi\,(\mathbf{o}) = \mathbf{o'}$
b) $V = V' \wedge \varphi = \mathrm{id}_V$

§2: Lineární transformace a její matice

[7.2.A1]. U. p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R^4}$, která
a) není injektivní

Řešení: $\varphi\,((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1, 0, x_3, 0)$

b) je injektivní a není surjektivní.

Řešení: Neexistuje, neboť z věty 2. 1. plyne, že je-li lineární transformace injektivní, pak je i surjektivní.

[7.2.A2]. U. p. lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbf{R^3}$ tak, že
a) $\operatorname{Ker}\varphi = [(1, 2, 3),(4, 5, 6)]$

Řešení: Lineární transformaci zadáme pomocí obrazů vektorů báze prostoru $\mathbf{R^3}$. Za bázi vezmeme vektory (1, 2, 3),(4, 5, 6) a libovolný vektor, který je s nimi tvoří bázi $\mathbf{R^3}$, např. vektor (0, 0, 1).:
$\varphi\,(1, 2, 3) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(4, 5, 6) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$

Komentář: Vektory (1, 2, 3),(4, 5, 6) zřejmě patří do jádra, obraz posledního vektoru báze můžeme zvolit libovolně různě od nulového vektoru.

b) $\operatorname{Im}\varphi = [(1, 2, 3),(4, 5, 6)]$.

Řešení: Lineární transformaci zadáme pomocí obrazů vektorů báze prostoru $\mathbf{R^3}$ takto:
$\varphi\,(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$
$\varphi\,(0, 1, 0) = (4, 5, 6)$
$\varphi\,(0, 0, 1) = (4, 5, 6)$

Komentář: Protože vektory (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) jsou generátory $\mathbf{R^3}$ (neboť jsou bází), podle věty 1. 2. 2. musí i jejich obrazy být generátory podprostoru $\varphi\,(\mathbf{R^3})$. V našem případě je $\varphi\,(\mathbf{R^3}) = [(1, 2, 3),(4, 5, 6)]$.

[7.2.A3]. U. p. neidentické lineární transformace vektorového prostoru $\mathbf{R^4}$ tak, že
$\mathbf{R^4} = \operatorname{Ker}\varphi \dotplus \operatorname{Im}\varphi$.

Řešení: Lineární transformaci zadáme pomocí obrazů vektorů báze prostoru $\mathbf{R^4}$ takto:
$\varphi\,(1, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 1, 0, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$
$\varphi\,(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 1, 0)$

Komentář: Postupujeme tak, že si předem zvolíme, jak bude vypadat jádro a obraz, přičemž musí platit: $\operatorname{Ker}\varphi \dotplus \operatorname{Im}\varphi = \mathbf{R^4}$. V našem příkladě jsme si zvolili:
$\operatorname{Ker}\varphi = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)]$, $\operatorname{Im}\varphi = [(0, 0, 1, 0), (0,0, 0, 1)]$ a podle toho jsme pak zadali transformaci φ. Je vidět, že $\operatorname{Ker}\varphi$ a $\operatorname{Im}\varphi$ nemusí mít stejnou dimenzi, např. jsme mohli zvolit:
$\operatorname{Ker}\varphi = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$ a $\operatorname{Im}\,\varphi = [(0, 0, 1, 0)]$. Pak by zobrazení φ mohlo být definováno takto:
$\varphi\,(1, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 1, 0, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 0, 1, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$.

[7.2.A4]. U. p. lineární transformace φ vektorového prostoru V tak, že platí $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\varphi$, přičemž
a) $V = \mathbf{R^4}$

Řešení: Lineární transformaci zadáme pomocí obrazů vektorů báze prostoru $\mathbf{R^4}$. Tedy:
$\varphi\,(1, 0, 0, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 1, 0, 0) = \mathbf{o}$
$\varphi\,(0, 0, 1, 0) = (1, 0, 0, 0)$
$\varphi\,(0, 0, 0, 1) = (0, 1, 0, 0)$

Komentář: Je přímo vidět, že $\mathrm{Ker}\,\varphi = [(1,\ 0,\ 0,\ 0),\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)]$ a $\mathrm{Im}\,\varphi = [(1,\ 0,\ 0,\ 0),\ 0,\ 1,\ 0,\ 0)]$.

b) $V = \mathbf{R^5}$.

Řešení: Neexistuje, neboť podle věty 1. 7. platí: $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = \dim V$ a tedy v našem případě by muselo platit: $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\,\varphi) = 5$. Ale protože zároveň podle zadání musí platit $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\varphi$ a protože víme, že pokud se dva podprostory rovnají mají i stejnou dimenzi, dosazením dostaneme: $2{\cdot}\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = 5$, tzn. $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \frac{5}{2}$, což není možné.

[7.2.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná a není dostatečná
b) je dostatečná a není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby lineární transformace φ vektorového prostoru V byla bijektivním zobrazením.

Řešení:
a) $\varphi(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$

Komentář: Odpověď: "φ je injektivní" je v tomto případě špatně, je nutné si totiž uvědomit, co říká věta 2. 1. .

b) $\varphi = \mathrm{id}_V$

c) φ zobrazuje libovolnou bázi V opět na bázi ve V

§4: Ortogonální zobrazení, ortogonální matice

Úmluva: Stejně jako ve sbírce příkladů i zde předpokládáme, že ve všech příkladech o euklidovském prostoru $\mathbf{R^n}$ (není-li výslovně řečeno jinak) je skalární součin v tomto prostoru definován "obvyklým způsobem", tzn. pro vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.

[7.4.A1]. U. p. ortogonálního zobrazení $\varphi : \mathbf{R^2} \to \mathbf{R^3}$

Řešení: $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1, x_2, 0)$

[7.4.A2]. U. p. ortogonálního zobrazení $\varphi : \mathbf{R^3} \to \mathbf{R^2}$

Řešení: Neexistuje, protože ortogonální zobrazení φ musí být injektivní, tzn. $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathbf{o}$. Pak tedy dostáváme $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\ \varphi) = \dim \mathbf{R^3}$, neboli $\dim(\mathrm{Im}\ \varphi) = 3$, což není možné, neboť $\mathrm{Im}\ \varphi$ je zároveň podprostorem v $\mathbf{R^2}$

[7.4.A3]. U. p. ortogonální transformace φ euklidovského prostoru $\mathbf{R^4}$ tak, aby tato transformace φ nebyla surjektivním zobrazením.

Řešení: Neexistuje, což plyne z věty 4. 4. 1., která říká, že je-li φ ortogonální transformace euklidovského prostoru, pak je φ bijektivní, tedy i surjektivní.

[7.4.A4]. Uveďte, co všechno lze říci o dimenzích euklidovských prostorů V, V', víte-li, že nulové lineární zobrazení $\omega : V \to V'$ je ortogonálním zobrazením.

Řešení: $\dim V = 0$, $\dim V' \geq 0$

Komentář: Víme, že je-li zobrazení ortogonální, pak je i injektivní (věta 4. 3.). Dále víme, že je-li zobrazení injektivní, má každý vektor z V' nejvýše jeden vzor z V, a tedy i nulový vektor **o'** prostoru V' má nejvýše jediný vzor, a to nulový vektor prostoru V. Ale protože je navíc zobrazení podle zadání nulové, je tento nulový vektor jediným vektorem celého prostoru V (uvědomte si, co znamená nulové zobrazení.) a tedy $\dim V = 0$. Pokud v naší úvaze postoupíme k prostoru V' zjistíme, že je nám vlastně úplně jedno, jak tento prostor vypadá, neboť největším problémem byl nulový vektor, který už máme vyřešený. A tedy dimenze prostoru V' může nabývat libovolných hodnot od nuly výše.

[7.4.A5]. U. p. euklidovského prostoru, který je izomorfní s euklidovským prostorem $\mathbf{R^5}$.

Řešení: $\mathbf{R_4}[\mathbf{x}]$ se skalárním součinem $f \cdot g = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x,\ f, g \in \mathbf{R_4}[\mathbf{x}]$

Komentář: Podle věty 4. 2. platí, že dva euklidovské prostory jsou izomorfní právě, když mají stejnou dimenzi. Skalární součin jsme mohli definovat i jiným způsobem, neboť definování skalárního součinu nemá vliv na izomorfii prostorů.

[7.4.A6]. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R_2}[\mathbf{x}]$ definujte dvěma různými způsoby skalární součin tak, aby vzniklé euklidovské prostory nebyly izomorfní.

Řešení: Neexistuje, neboť definování skalárního součinu nemá vliv na izomorfii prostorů. Prostory jsou izomorfní, existuje-li mezi nimi bijektivní zobrazení zachovávající skalární součin.

[7.4.A9]. U. p. matic A, $B \in \mathrm{Mat}_{22}(\mathbf{R})$, které nejsou ortogonální, ale jejich součin $A \cdot B$ je ortogonální maticí.

Řešení: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Komentář: Sami si můžete ověřit, že $B = A^{-1}$, a tedy součin $A \cdot B$ je jednotková matice, která je jistě ortogonální, přičemž matice A, B evidentně ortogonální nejsou.

[7.4.A10]. U. p. podmínky, která
a) je nutná a není dostatečná
b) je dostatečná a není nutná
c) je nutná a dostatečná
pro to, aby matice $A \in \mathrm{Mat}_{44}(\mathbf{R})$ byla ortogonální.

Řešení:

a) A je regulární

b) $A = E_4$

c) $A \cdot A' = E_4$

Literatura

[1] Horák, P. *Lineární algebra a geometie 1.*
http://www.math.muni.cz/~horak/LA_SKRIPTA.pdf, 2007.

[2] Horák, P. *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I.*
3. vydání Brno: Masarykova univerzita, 2006.