Ⓐ V závislosti na parametru p řešte soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 \phantom{{}-x_4} &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 &= p+1 \\ x_1 + 2x_2 + (p-2)x_3 + (p-1)x_4 &= 2p \end{aligned}$$

Ⓑ V závislosti na parametru q řešte soustavu

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 \phantom{{}+y_4} &= 1 \\ 3y_1 + 4y_2 + 2y_3 + y_4 &= q+3 \\ y_1 + 2y_2 + qy_3 + (q+1)y_4 &= 2q \end{aligned}$$

(A) Vypočtěte 2. řádek součinu dvou matic tvaru $n \times n$ tak, že napíšete, čemu se rovná člen a_{2j}

$$
\begin{pmatrix}
2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 2
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
3 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
3 & 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
3 & 3 & 3 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 1
\end{pmatrix}
$$

(B) Vypočtěte 2. sloupec součinu dvou matic tvaru $n \times n$ tak, že napíšete, čemu se rovná člen b_{i2}

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
1 & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
4 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
4 & 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
4 & 4 & 4 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 1 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
4 & 4 & 4 & 4 & \cdots & 4 & 4
\end{pmatrix}
$$

(A) Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všech funkcí $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$W = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \forall s,t \in \mathbb{R} : s \leq t \Rightarrow f(s) \leq f(t) \}$$

Své tvrzení <u>ODŮVODNĚTE</u>!

(B) Rozhodněte, zda podmnožina $U \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je vektorovým podprostorem prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ všech funkcí $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$U = \{ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in (n, \infty) : f(x) = 0 \}$$

Své tvrzení <u>ODŮVODNĚTE</u>!

(A) Zjistěte, zda jsou vektory $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^5$ lineárně nezávislé. Chci odůvodnění pomocí definice.

$$u_1 = (1, -4, 2, -3, -2),$$
$$u_2 = (3, -2, 1, 2, -4),$$
$$u_3 = (2, 3, -1, 4, -3).$$

(B) Zjistěte, zda jsou vektory $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^5$ lineárně nezávislé. Chci odůvodnění pomocí definice.

$$v_1 = (1, 3, -2, 4, -3),$$
$$v_2 = (3, 4, 3, -3, -4),$$
$$v_3 = (2, -1, -4, 3, -2).$$

(A) Nechť $U = [u_1, u_2]$, $V = [v_1, v_2]$ jsou dva podprostory v $\mathbb{R}^4$. Najděte bázi $U \cap V$ a dimenzi $U + V$.

$$u_1 = (1, 1, -1, -1), \quad u_2 = (2, 3, 2, -2)$$

$$v_1 = (2, 0, 1, 1), \quad v_2 = (4, 4, 7, -1)$$

(B) Nechť $W = [w_1, w_2]$, $Z = [z_1, z_2]$ jsou dva podprostory v $\mathbb{R}^4$. Najděte bázi $W \cap Z$ a dimenzi $W + Z$.

$$w_1 = (1, 1, -1, 1), \quad w_2 = (2, 1, 2, 0)$$

$$z_1 = (2, 0, -1, 3), \quad z_2 = (5, 2, 0, 4)$$

Ⓐ Najděte bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 \end{pmatrix}.$$

Ⓑ Najděte bázi jádra a obrazu lineárního zobrazení $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\psi\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 \\ 4y_1 + y_2 + 5y_3 + 9y_4 \\ 2y_1 - 2y_2 \qquad + 2y_4 \end{pmatrix}$$

(A) Najděte matici zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bazích

$$\alpha = \left((1,1,0)^T, (1,2,1)^T, (1,2,-1)^T\right) \text{ v } \mathbb{R}^3$$

a

$$\beta = \left((1,2)^T, (3,5)^T\right) \text{ v } \mathbb{R}^2.$$

(B) Najděte matici zobrazení $\psi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

v bazích

$$\gamma = \left((1,1,2)^T, (1,0,1)^T, (1,-1,2)^T\right) \text{ v } \mathbb{R}^3$$

a

$$\delta = \left((1,2)^T, (2,3)^T\right) \text{ v } \mathbb{R}^2.$$

Ⓐ Jsou dána lineární zobrazení

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$

taková, že

$f(1,1,0) = (2,5)$ $f(1,1,2) = (3,1)$ $f(1,0,1) = (3,1)$

$g(1,2) = 3$, $g(2,1) = -1$.

Najděte předpis pro složené zobrazení

$g \circ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$

$$(g \circ f)(x_1, x_2, x_3) = \ldots$$