Domácí úkoly ke cvičení č. 10

1. Nechť lineární zobrazení φ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ je zadáno tak, že pro vektory báze $\alpha = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, kde

$$\mathbf{f}_1 = (1, 1, 2),\ \mathbf{f}_2 = (2, 1, 1),\ \mathbf{f}_3 = (1, 2, 1),$$

jsou stanoveny jejich obrazy

$$\varphi(\mathbf{f}_1) = (1, 1, 2, 4),\ \varphi(\mathbf{f}_2) = (1, 3, 3, 3),\ \varphi(\mathbf{f}_3) = (1, 5, 4, 2).$$

Nechť dále lineární zobrazení ψ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$ je zadáno tak, že pro vektory báze $\beta = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, kde

$$\mathbf{g}_1 = (1, 0, -1, 2),\ \mathbf{g}_2 = (2, 1, 0, -1),\ \mathbf{g}_3 = (1, -2, -1, 0),\ \mathbf{g}_4 = (0, 1, -2, -1),$$

jsou stanoveny jejich obrazy

$$\psi(\mathbf{g}_1) = (1, 1, 1, 3, 3),\ \psi(\mathbf{g}_2) = (1, 3, 3, 1, 1),\ \psi(\mathbf{g}_3) = (1, 4, 2, 1, 4),\ \psi(\mathbf{g}_4) = (2, 3, 5, 4, 1).$$

Uvažte složené lineární zobrazení $\psi \circ \varphi$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ do vektorového prostoru $(\mathbb{R}^5, +, \cdot)$. Najděte matici G typu 5/3 nad $\mathbb{R}$ takovou, aby pro libovolný vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ a pro jeho obraz $\psi(\varphi((x_1, x_2, x_3))) \in \mathbb{R}^5$ při složeném lineárním zobrazení $\psi \circ \varphi$, $\psi(\varphi((x_1, x_2, x_3))) = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$ platilo

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} = G \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

2. Nechť lineární transformace η vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ je zadána tak, že pro vektory báze $\theta = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3, \mathbf{h}_4)$ vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$, kde

$\mathbf{h}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{h}_2 = (1, 1, 1, 2)$, $\mathbf{h}_3 = (1, 2, 2, 3)$, $\mathbf{h}_4 = (1, 3, 4, 4)$,

jsou stanoveny jejich obrazy

$$\eta(\mathbf{h}_1) = (1, 2, 2, 2),\ \eta(\mathbf{h}_2) = (1, 2, 3, 5),\ \eta(\mathbf{h}_3) = (1, 2, 3, 6),\ \eta(\mathbf{h}_4) = (1, 3, 5, 7).$$

Rozhodněte, zda lineární transformace η je lineárním izomorfismem vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ s ním samotným. Je-li tomu tak, pak uvažte inverzní lineární transformaci η^{-1} vektorového prostoru $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. V tom případě potom najděte čtvercovou matici H řádu 4 nad $\mathbb{R}$ s tou vlastností, že pro libovolný vektor $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$ a pro jeho jediný vzor $\eta^{-1}((y_1, y_2, y_3, y_4)) \in \mathbb{R}^4$ vzhledem k zadané lineární transformaci η bude při označení $\eta^{-1}((y_1, y_2, y_3, y_4)) = (r_1, r_2, r_3, r_4)$ platit

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_2 \\ r_4 \end{pmatrix} = H \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$