Domácí úkoly ke cvičení č. 12

1. Určete paritu $\wp(\sigma)$ každé z následujících permutací σ množiny $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 13 & 7 & 8 & 11 & 9 & 16 & 4 & 19 & 1 & 17 & 3 & 15 & 18 & 5 & 12 & 20 & 2 & 6 & 10 & 14 \end{pmatrix}$,

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 17 & 14 & 11 & 19 & 7 & 20 & 13 & 5 & 12 & 4 & 9 & 8 & 18 & 2 & 10 & 1 & 6 & 15 & 3 & 16 \end{pmatrix}$,

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 14 & 9 & 12 & 7 & 17 & 2 & 15 & 3 & 11 & 4 & 16 & 5 & 20 & 8 & 19 & 1 & 13 & 6 & 10 & 18 \end{pmatrix}$.

2. V závislosti na hodnotě přirozeného čísla $n > 1$ určete paritu $\wp(\sigma)$ každé z následujících permutací σ množiny $\{1, 2, \dots, n, n+1, \dots, 2n-1, 2n\}$:

a) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 4 & 6 & \dots & 2n-2 & 2n & 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-3 & 2n-1 \end{pmatrix}$,

b) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$,

c) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \dots & 3 & 1 & 2n & 2n-2 & 2n-4 & \dots & 4 & 2 \end{pmatrix}$,

d) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2n & 2n-2 & 2n-4 & \dots & 4 & 2 & 2n-1 & 2n-3 & 2n-5 & \dots & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Ověřte, že následující množina čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbb{R}$

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \neq c \right\}$$

spolu s obvyklým násobením matic tvoří grupu. Dále si všimněte, že množina $\mathbb{R} - \{0\}$ všech nenulových reálných čísel spolu s obvyklým násobením čísel tvoří grupu. Poté ověřte, že zobrazení

$$\eta : H \to \mathbb{R} - \{0\}$$

dané předpisem

$$(\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \neq c) \left(\eta \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right) = \frac{a}{c} \right)$$

je homomorfismem grupy H do grupy $\mathbb{R} - \{0\}$.

4. Vypočtěte následující determinanty z matic řádu 5 nad $\mathbb{Z}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Využijte například možnosti převodu na horní trojúhelníkový tvar.

5. V závislosti na hodnotě parametru $x \in \mathbb{R}$ vypočtěte následující determinanty z matic řádu 5 nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 & 1 & 0 \\ x & x & x & 1 & 1 \\ 1 & x & x & x & 1 \\ 1 & 1 & x & x & x \\ 0 & 1 & 1 & x & x \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 1 & 1 & 4x & 9x^2 & 16x^3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Využijte možnosti převodu na horní nebo dolní trojúhelníkový tvar, případně kombinujte tento přístup s použitím Laplaceova rozvoje.

6. Vypočtěte následující determinant z matice řádu $n \in \mathbb{N}$ nad $\mathbb{Z}$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & 3 & \dots & n-3 & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & 2 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 \\ n-2 & n-1 & n & 1 & \dots & n-5 & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-1 & n & 1 \end{vmatrix}.$$

Využijte vhodně volených elementárních řádkových a sloupcových úprav a možnosti převodu matice například na dolní trojúhelníkový tvar.

7. V závislosti na hodnotách parametrů $x, y \in \mathbb{R}$ vypočtěte následující determinant z matice řádu $n > 1$ nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x & x & x \\ y & x & x & \dots & x & x & x \\ y & y & x & \dots & x & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ y & y & y & \dots & x & x & x \\ y & y & y & \dots & y & x & x \\ y & y & y & \dots & y & y & x \end{vmatrix}.$$

Využijte možnosti vytknout společnou hodnotu z některého řádku nebo sloupce, dále použijte vhodně volených elementárních řádkových nebo sloupcových úprav k vynulování podstatné části prvků matice, a konečně využijte možnosti převodu matice na horní nebo dolní trojúhelníkový tvar.

8. V závislosti na hodnotách parametrů $x, y \in \mathbb{R}$ vypočtěte následující determinant z matice řádu $n > 1$ nad $\mathbb{R}$:

$$\begin{vmatrix} x+2y & x & x & \dots & x & x & x-y \\ x-y & x+2y & x & \dots & x & x & x \\ x & x-y & x+2y & \dots & x & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+2y & x & x \\ x & x & x & \dots & x-y & x+2y & x \\ x & x & x & \dots & x & x-y & x+2y \end{vmatrix}.$$

Využijte elementárních řádkových úprav (k nim patří třeba i přičtení všech řádků například k prvnímu řádku), dále využijte toho, že je možné vytknout společnou hodnotu z některého řádku, poté využijte možnosti pomocí vhodných elementárních řádkových úprav většinu prvků matice vynulovat, potom můžete využít možnosti vynásobit sloupce matice vhodně zvolenými čísly (současně se ale přitom musí hodnota determinantu vydělit těmito čísly) tak, aby nakonec bylo možno posloupností vhodně volených elementárních sloupcových úprav převést matici na horní trojúhelníkový tvar. (Takto se lze vyhnout použití rekurentní formule k výpočtu tohoto determinantu.)