

## Domácí úkoly ke cvičení č. 3

1. Vypočtěte součin obdélníkových matic nad  $\mathbb{Z}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \\ -4 & 5 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \\ -6 & 7 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Pro všechna přirozená čísla  $n$  vypočtěte mocniny čtvercových matic nad  $\mathbb{Z}$  řádu 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Ověřte správnost vašich výsledků indukcí vzhledem k  $n$ .

3. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla  $n$  a pro příslušné mocniny následující čtvercové matice nad  $\mathbb{Z}$  řádu 3 platí:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & \frac{5^n - 3^n}{2} & \frac{7^n - 2 \cdot 5^n + 3^n}{8} \\ 0 & 5^n & \frac{7^n - 5^n}{2} \\ 0 & 0 & 7^n \end{pmatrix}$$

Postupujte indukcí vzhledem k  $n$ .

4. Vypočtete součin čtvercových matic řádu  $n$ , kde  $n > 1$  je přirozené číslo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Vypočtete součin čtvercových matic řádu  $n$ , kde  $n > 1$  je přirozené číslo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$