Výroková logika

- **Výrok** je sdělení, u něhož má smysl otázka, zda je či není pravdivé. Může nastat právě jedna z možností.
- Sdělení, o nichž jsme dosud neurčili jednoznačně, zda-li jsou pravdivé či nikoli, avšak v principu jedna z těchto možností musí nastat, se nazývají **hypotézy (domněnky)**. Hypotéza je výrok.
- Jestliže je výrok pravdivý, přiřazujeme mu výrokový znak 1; jestliže je nepravdivý, přiřazujeme mu znak 0.
- Slova nebo znaky, pomocí nichž tvoříme nové výroky, se nazývají **logické spojky**.
- **Atomární výrok** je výrok bez logických spojek. Pokud výrok obsahuje logické spojky nazývá se **složený**.

Nejpoužívanější logické spojky:

1. **Negace** ... negací výroku A rozumíme výrok: "Není pravda, že platí A".
   Značíme ji $\neg A$ (nebo A'; $\overline{A}$).

výrok	**negace**
aspoň a	nejvýše $a-1$
nejvýš a	aspoň $a+1$
právě a	nejvýše $a-1$ nebo aspoň $a+1$

A	$\neg A$
1	0
0	1

2. **Konjunkce** ... spojka **„a“** (ve smyslu *a zároveň*) $\rightarrow A \wedge B$
   - konjunkce výroku je pravdivá jen v případě, že jsou pravdivé oba výroky

A	$\wedge$	B
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	0	0

3. **Disjunkce** ... spojka **„nebo“** $\rightarrow A \vee B$
   - disjunkce výroku je pravdivá, je-li pravdivý aspoň jeden z výroků

A	$\vee$	B
1	1	1
1	1	0
0	1	1
0	0	0

4. **Implikace** ... spojka **„jestliže, pak“** $\rightarrow A \Rightarrow B$
   - implikace výroku je pravdivá, jen tehdy, je-li pravdivý výrok A i B nebo je-li výrok A nepravdivý.
   Implikace je **nekomutativní**

A	$\Rightarrow$	B
1	1	1
1	**0**	**0**
0	1	1
0	1	0

Z nesmyslu vyplyne cokoli :o)

5. **Ekvivalence** ... spojka **„tehdy a jen tehdy; právě tehdy, když ... “** $\rightarrow A \Leftrightarrow B$
   - ekvivalence výroku je pravdivá, jenom v případě, že oba výroky mají stejnou hodnotu pravdivosti

A	$\Leftrightarrow$	B
1	1	1
1	0	0
0	0	1
0	1	0

Priority logických spojek:

1. negace
2. konjunkce a disjunkce
3. implikace a ekvivalence

Tautologie je vždy pravdivý složený výrok, bez ohledu na pravdivostní hodnotu jednotlivých částí takového výroku.

Příklady tautologií:

$\neg(A \wedge \neg A)$ - **zákon o vyloučení třetího**
$(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$ - **zákon Dunse Scota**
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ - **Obměna**
$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$
$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

$$\left.\begin{array}{l} (A \wedge B) \vee C \;\Leftrightarrow\; (A \vee C) \wedge (B \vee C) \\ (A \vee B) \wedge C \;\Leftrightarrow\; (A \wedge C) \vee (B \wedge C) \end{array}\right\} \textbf{Distributivní zákon}$$

$$\left.\begin{array}{l} \neg(A \wedge B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \vee \neg B \\ \neg(A \vee B) \;\Leftrightarrow\; \neg A \wedge \neg B \end{array}\right\} \textbf{De Morganova pravidla}$$

1. Zapište symbolicky následující výroky:
   (a) Petr nemá hlad ani žízeň.
   (b) Přijde Adam, ale Božena ne.
   (c) Půjdu na návštěvu ke známým, nedostanu-li lístek do divadla.
   (d) Přijde alespoň jeden z rodičů.
   (e) Jestliže přijde matka, tak nepřijde otec.
   (f) Přijde nejvýš jeden z rodičů.

2. Rozhodněte, která z uvedených sdělení jsou výroky. Ke všem uvedeným výrokům přiřaďte jejich pravdivostní hodnotu a vytvořte negaci:
   (a) Sněžka je nejvyšší hora v Čechách.
   (b) Snažte se!
   (c) Existuje alespoň jedno sudé prvočíslo.
   (d) Mars je planeta nejbližší Slunci.
   (e) Přijedete také zítra?
   (f) x je větší než 3.

3. Vyjádřete stručně (bez použití obratu "není pravda,že…") negace těchto výroků:
   (a) Nemrzne ani nefouká vítr.
   (b) Zůstanu-li v Praze, půjdu na výstavu.
   (c) Máme pivo a minerálky.
   (d) Osvěžím se čajem nebo kávou.
   (e) Je mokro, ale neprší.

4. Vyšetřete pravdivostní hodnoty těchto formulí:

(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

(b) $\neg(p \vee q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)$

(c) $(\neg p \vee q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$

(d) $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

5. Rozhodněte, zda dané dvojice výrokových formulí jsou logicky ekvivalentní:

   (a) $\neg(p \Leftrightarrow q), \quad (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

   (b) $\neg(p \Leftrightarrow q), \quad (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$

6. V dílně pracují tři stroje podle těchto podmínek:

   (a) Pracuje-li první stroj, pracuje i druhý stroj.

   (b) Pracuje druhý nebo třetí stroj.

   (c) Nepracuje-li první stroj, nepracuje ani třetí.

   Rozhodněte jaké jsou možnosti pro práci těchto tří strojů.

7. Logická spojka $|$, definovaná tabulkou pravdivostních hodnot:

A	B	$A\|B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

   se nazývá *Shefferův symbol*. Dá se dokázat, že pomocí Shefferova symbolu lze vyjádřit každou z logických spojek $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$. Rozhodněte, která z uvedených logických spojek je vyjádřena vztahem:

   (a) $A|(A|B)$

   (b) $(A|B)|(A|B)$.

8. Nalezněte výrokovou formuli v proměnných $A,\ B,\ C$ s následující tabulkou pravdivostních hodnot:

A	B	C		
1	1	1		1
1	1	0	...	0
1	0	1		0
1	0	0		0
0	1	1		0
0	1	0	...	1
0	0	1		0
0	0	0		0

Domácí úkol: Petr a Pavel čekají před kinem na své spolužáky Adama, Břéťu a Cyrila.
Petr tvrdí: „Přijde-li Adam a Břéťa, přijde i Cyril.“
Pavel říká: „Já myslím, že když přijde Adam a nepřijde Cyril, nepřijde ani Břéťa.“
Na to odpovídá Petr: „To ovšem říkáš totéž, co já.“
Rozhodněte, zda oba skutečně říkají totéž.

9. Vyšetřete, zda uvedené formule jsou tautologie:

   (a) $p \Leftrightarrow \neg p$
   (b) $\neg(p \Leftrightarrow \neg p)$
   (c) $p \vee (p \Leftrightarrow \neg p)$
   (d) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
   (e) $(p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$
   (f) $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$.

Predikát (výroková forma) je sdělení, které obsahuje jednu nebo více proměnných, za které když dosadíme, dostaneme výrok. Značíme ji např. $V(x)$. Proměnnou také můžeme vázat kvantifikátorem.

(a) **obecný** (velký) kvantifikátor – symbol obecnosti; značíme $\forall$. Použití ve smyslu „pro každé“, „pro všechna“, „pro libovolné“.

   ($\forall x \in \mathbb{R}; \ldots \rightarrow$ pro všechna reálná čísla platí ...)

(b) **Existenční** (malý) kvantifikátor – značíme $\exists$. Použití ve smyslu „existuje alespoň jedno“, „pro alespoň jedno“. Někdy se používá $\exists!$ ve smyslu „právě jedno“.

   ($\exists x \in \mathbb{R}; \ldots \rightarrow$ existuje alespoň jedno x, pro které platí ...)

Negace kvantifikovaných sdělení: Obecný kvantifikátor nahradíme existenčním, existenční obecným a podmínku nahradíme její negací.

$$\forall\, x \in \mathbb{R};\ x^2 > 0 \text{ (nepravda)} \rightarrow \exists\, x \in \mathbb{R};\ x^2 \leq 0 \text{ (pravda)}$$

10. Rozhodněte, zda jsou následující formule pravdivé v $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

   (a) $(\forall x)(\forall y)(x < y \Rightarrow (\exists z)(x < z < y))$
   (b) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(x + z = y)$
   (c) $(\exists z)(\forall x)(z \leq x)$
   (d) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)(z|x \wedge z|y \wedge (\forall u)((u|x \wedge u|y) \Rightarrow u|z))$
   (e) $(\exists x)(\forall y)(y + x = x + y = y)$

11. Znegujte formule z předešlého příkladu a upravte je do tvaru, ve kterém se bude negace vyskytovat jen u atomických formulí.

12. Popište následující formule a diskutujte jejich pravdivost v číselném oboru $\mathbb{N}$.

   (a) každé číslo je dělitelné prvočíslem;
   (b) existuje nejmenší společný násobek libovolné dvojice čísel.

13. Je možné zaměnit v libovolné formuli predikátové logiky obecný a existenční kvantifikátor? Diskutujte obě implikace. Konkrétně mějmě formuli predikátové logiky se dvěma volnými proměnnými $f(x, y)$. Platí $(\forall x)(\exists y)f(x, y) \Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)f(x, y)$? Jako příklad formule $f(x, y)$ uvažujte $x \leq y$.