Matematické důkazy

- **axiómy** (**postuláty**) – výchozí matematické výroky, které se prohlásí za pravdivé bez dokazování;
- **Definice** – stanoví název (označení) zaváděného pojmu a vymezuje podstatné (charakteristické) vlastnosti pojmu pomocí dříve definovaných nebo primitivních pojmů;
- **Matematická věta (poučka, teorém)** – pravdivý matematický výrok; dá se odvodit pomocí logiky na základě axiómů, definic a dříve dokázaných vět. Většina matematických vět má tvar *obecného výroku* $\forall x;\ V(x)$, tzn. **obecné věty**, nebo *existenčního výroku* $\exists x;\ V(x)$, tzv. **existenční věty**.
  Pro **obecnou větu ve tvaru implikace**

  $$\forall x \in \mathsf{D};\ A(x) \Rightarrow B(x)$$

  máme:

  - $A(x)$ – **předpoklad věty**; platnost je **postačující podmínkou** pro $B(x)$;
  - $B(x)$ – **závěr** nebo **tvrzení věty** ; platnost je **nutnou podmínkou** pro $A(x)$;
  - **obměna věty** – logicky ekvivalentní s obecnou větou; $\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x)$;
  - **obrácení věty** – nemusí být věta (pravdivý mat. výrok); $B(x) \Rightarrow A(x)$; jestliže je to pravdivý výrok, je to tzv. **obrácená věta**; pak $A(x) \Leftrightarrow B(x)$;
  - **negace věty** – $\exists x; (A(x) \wedge \neg B(x))$

  Důkazem matematické věty nazýváme logický proces, kterým ověřujeme její platnost na základě axiomů, definic a dříve dokázaných vět užitím logických zákonů (výrokové a predikátové logiky).

  K důkazu matematických vět tvaru implikace $A \Rightarrow B$ užíváme obvykle:

  1. **důkaz přímý** – z platnosti předpokladu A řadou platných implikací odvodíme platnost tvrzení B;
  2. **důkaz nepřímý** spočívá v přímém důkazu věty obměněné k dané větě, tj. věty $\neg B \Rightarrow \neg A$;
  3. **důkaz sporem** – modifikace nepřímého důkazu; předpokládáme platnost A a $\neg B$; řadou platných implikací pak odvodíme spor s některým z předpokladů nebo s jiným výrokem. Znamená to tedy, že musí platit B.

  Matematická věta ve tvaru ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ se dokazuje většinou tak, že dokážeme zvlášť platnost implikace $A \Rightarrow B$ a zvlášť implikace $B \Rightarrow A$.

  Důkaz matematickou indukcí.
  Pouze pro věty, které tvrdí, že za určitých předpokladů platí výrok $V(n)$ pro všechna přirozená čísla $n \geq n_0$, kde n_0 je nějaké pevné přirozené číslo (nejčastěji $n_0 = 0$, resp. $n_0 = 1$).

  Důkaz matematickou indukcí probíhá ve dvou krocích:

  (a) dokážeme platnost výroku $V(n_0)$

  (b) předpokládáme, že výrok $V(n)$ platí pro obecné n (**indukční předpoklad**) a za tohoto předpokladu dokážeme platnost výroku $V(n+1)$.

  Věta je pak dokázaná.

1. K dané matematické větě formulujte větu obrácenou, obměněnou, obměněnou k obrácené větě, negaci dané věty. Dále rozhodněte, která z takto utvořených vět platí a která ne.
   Je-li ciferný součet přirozeného čísla dělitelný třemi, pak je i toto číslo dělitelné třemi.

2. Dokažte nepřímo větu: *Jestliže je součet dvou celých čísel číslo liché, pak součin těchto dvou čísel je číslo sudé.*

3. Dokažte nepřímo větu: *Pro každé přirozené číslo n platí: je-li n^2 dělitelné třemi, pak je třemi dělitelné i číslo n.*

4. Dokažte sporem:

   (a) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \left(x, y > 0 \ \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \right)$.

   (b) $(\forall x, y \in \mathbb{R}) \left(x, y > 0 \ \Rightarrow \ (x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \geq 4 \right)$.

5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Domácí úkol: Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+5)}{(i+2)(i+3)} = \frac{n(n+1)}{n+3}$$

6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 2$ platí:

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2} \geq \frac{7}{12} - \frac{1}{n+1}$$

7. Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geq 6$ platí $2^n > (n+1)^2$.

8. Nechť r je reálné číslo takové, že $r + \frac{1}{r}$ je celé číslo. Dokažte, že pak pro každé přirozené číslo n je $r^n + \frac{1}{r^n}$ rovněž celé číslo.

9. Dokažte, že součet vnitřních úhlů v (konvexním) n-úhelníku je roven $\pi \cdot (n-2)$.

10. Pro každé $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$ existují jednoznačně určená $q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < b$ taková, že platí $a = bq + r$. Dokažte.