Teorie množin

- Intuitivně je **množina** soubor (skupina, systém, třída, ...) objektů, které jsou navzájem různé a pro každý objekt lze jednoznačně určit zda je či není prvkem (objektem) dané množiny.
- Zápis $a \in A$ značí „prvek a patří do množiny A“. Zápis $b \notin B$ značí „prvek b nepaří do množiny B“.
- Množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazveme **prázdnou množinou**; značíme ji $\emptyset$.
- Množina může být zadána:
  1. **výčtem prvků** – $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$
  2. **charakteristickou vlastností** – tj. vlastností, která je společná pro všechny prvky množiny – $B = \{x \in \mathbb{Z}_0^+; x \leq 7\}$
  3. **rekurentně** – zadáním jednoho či několika prvků a pomocí obecného vyjádření můžeme generovat všechny prvky množiny – $1 \in \mathbb{N};\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow k + 1 \in \mathbb{N}$
- Prvky množiny mohou být opět množiny. Pokud všechny prvky dané množiny jsou množiny, pak takovou množinu nazýváme **systém množin**.
- **Potenční množina** – množina všech podmnožin množiny A; značí se $\mathcal{P}(A)$. (Potenční množina je systémem množin.) Je-li A konečná a $|A| = n$, pak $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.
- Množiny A, B považujeme za **sobě rovné** (identické), píšeme $A = B$, právě když mají právě jen tytéž prvky.
  V opačném případě píšeme $A \neq$ B a říkáme, že množina A se **nerovná** množině B.
- Řekneme, že A je **podmnožinou (inkluzí)** B **právě tehdy, když platí**

  $$A \subseteq B = \{x \in U^{a};\ x \in A \ \Rightarrow\ x \in B\}$$

  Pokud $A \neq B$**, pak se jedná o tzv. ostrou** inkluzi; značíme $A \subset B$. A je **vlastní** podmnožina.
- Množiny A, B se rovnají právě tehdy, když platí $(A \subseteq B)\ \wedge\ (B \subseteq A)$, tedy

  $$A = B = \{x \in U;\ x \in A \ \Leftrightarrow\ x \in B\}$$

Operace s množinami:

- **Sjednocení:** $A \cup B = \{x \in U;\ x \in A\ \vee\ x \in B\}$
- **Průnik:** $A \cap B = \{x \in U;\ x \in A\ \wedge\ x \in B\}$ Pozn.: Pokud $A \cap B = \emptyset$, pak řekneme, že množiny A a B jsou **disjunktní**.
- **Rozdíl:** $A - B = \{x \in U; x \in A\ \wedge\ x \notin B\}$
- **Doplňek:** $A \subseteq B\ \Rightarrow B - A$, značíme A'_B.

  $$\left.\begin{array}{l}(A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B'\end{array}\right\}\ \text{De Morganova pravidla}$$

- **Symetrický rozdíl:** $A \div B = \{x \in U; x \in A \veebar x \in B\} = \{x \in U; x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$

[a] základní množina

1. Zapište výčtem prvků i charakteristickou vlastností množinu

   (a) jejíž prvky jsou druhé mocniny všech celých čísel x, pro něž platí $0 < x \leq 15$
   (b) jejíž prvky jsou třetí mocniny všech celých čísel x, pro něž platí $0 < x \leq 5$

2. Množina A je množina všech přirozených čísel, která jsou o jednu zmenšenými čtverci lichých čísel, množina B je množina všech přirozených násobků 8. Zapište obě množiny charakteristickou vlastností i výčtem prvků.

3. Je daná množina $\mathsf{A} = \{\{1,2,3\},\{1,3\},1,2\}$. Rozhodněte, zda platí:

   (a) $\{1,2\} \in A$
   (b) $\{1,2\} \subseteq A$
   (c) $\{1,3\} \in A$
   (d) $\{1,3\} \subseteq A$
   (e) $\{1\} \in A$
   (f) $\{1\} \subseteq A$
   (g) $\{2,3\} \in A$
   (h) $\{2,3\} \subseteq A$

4. Určete, která z těchto tvrzení jsou pravdivá:

   (a) $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
   (b) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
   (c) $\{\{\emptyset\}, \emptyset\} \neq \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
   (d) $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$
   (e) $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$
   (f) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}\}$
   (g) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$
   (h) $\{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

5. Nechť A, B, C jsou množiny. Určete, kolik prvků má daná množina. (Pozor, odpovědi se mohou lišit v závislosti na množinách A, B, C.)

   (a) $\{\{\{\emptyset, \emptyset\}\}, \emptyset, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \emptyset\}\}\}$
   (b) $\{A, B, C\}$
   (c) $\{A, \{B, C\}\}$
   (d) $\{A, \{B\}, \emptyset\}$

6. Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí:

   (a) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
   (b) $A \cap B = A - (A - B)$
   (c) $A \cup B = (A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$
   (d) $A \div (B \div C) = (A \div B) \div C$
   (e) $A \cap B \subseteq C \Leftrightarrow A \cap (B - C) = \emptyset$
   (f) $A \subseteq C \Rightarrow (A \subseteq B \Leftrightarrow (C - B) \subseteq (C - A))$

7. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny A, B, C platí:

   (a) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
   (b) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
   (c) $A \cap C \subseteq B \Rightarrow ((A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup C = B \cap (A \cup C))$