Zobrazení

- **Zobrazení** $f : A \to B$ množiny A do množiny B je předpis přiřazující každému prvku množiny A prvek množiny B.
- $f : A \to B$ je **prosté (injektivní) zobrazení,** pokud platí $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$
- Zobrazení množiny A **na** množinu B (**surjektivní**) se nazývá takové zobrazení, jestliže pro libovolné $b \in B$ existuje $a \in A$ tak, že $f(a) = b$.
- Zobrazení, které je současně prosté a surjektivní se nazývá **bijektivní**. Množiny A, B se nazávají **isomorfní**, jestliže existuje bijekce $A \to B$. Značíme $A \cong B$.
- $f : A \to B$ je bijekce. $f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$;
  $f^{-1} : B \to A$ je **inverzní** zobrazení k f. Platí $(f^{-1})^{-1} = f$;
  f^{-1} je také bijekce.
- **Identické** zobrazení $id_A : A \to A$ je definováno předpisem $id_A(a) = a$.
- $f : A \to B$, $g : B \to C$, předpis $(g \circ h)(a) = g(f(a))$ definuje zobrazení $g \circ f : A \to C$. Toto zobrazení se nazývá **složené** zobrazení.

1. Rozhodněte zda následující předpisy určují zobrazení. V kladném případě zjistěte, zda je zobrazení injektivní, případně surjektivní.

   (a) $f : \mathbb{Z} \to (0, 1),\ f(x) = |x|$

   (b) $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\},\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro} x > 1 \\ 2 & \text{pro} x < 2 \end{cases}$

   (c) $f : \mathbb{Z} \to \{0, 1, 2\},\ f(x) =$ zbytek po dělení třemi (x mod 3)

   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = 3x$

   (e) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N},\ f(x) = (x - 1)^2 + 1$

   (f) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \begin{cases} y & \text{pokud } (y - 1)^2 + 1 = x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

   (g) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}),\ f((x, y)) = \{x, y\}$

   (h) $f : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to \mathbb{N}_0,\ f(X) =$ počet prvků X

   (i) $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}),\ f(X) =$ min$X$.

2. Pro bijektivní zobrazení $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zadané vztahy $f(x) = x - 2$ a $g(x) = 2x + 3$, najděte předpis pro $g \circ f, f^{-1}, g^{-1}, f \circ g^{-1}$ a pod. Jak se řešení liší, pokud množinu $\mathbb{R}$ nahradíme množinou $\mathbb{Z}$.

3. Nechť $f : A \to A$ je zobrazení takové, že existuje $n \in \mathbb{N}$ s vlastností $f^n = \mathrm{id}_A$. Dokažte, že f je bijekce.

4. Pro zobrazení $f : A \to B$ a $g : B \to C$ zjistěte, zda platí následující ekvivalence. Až zjistíte, že implikace $\Leftarrow$ obecně neplatí, pozměňte levou stranu tak, aby platila.

   (a) f a g jsou injektivní $\Leftrightarrow g \circ f$ je injektivní,

   (b) f a g jsou surjektivní $\Leftrightarrow g \circ f$ je surjektivní.