1. Dokažte, že následující zobrazení jsou bijektivní:

   (a) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x, y) = 2^{x-1}(2y - 1)$,

   (b) $f : (a, b) \to \mathbb{R}^+, f(x) = \frac{x-a}{b-x}$.

   Udejte předpis inverzních zobrazení.

2. Pro disjunktní množiny A a B dokažte, že zobrazení $f : \mathcal{P}(A \cup B) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ definované předpisem $f(X) = (X \cap A, X \cap B)$ je bijekce. Nalezněte zobrazení inverzní.

Relace

- (Binární) relaci mezi množinami A a B definujeme jako podmnožinu $R \subseteq A \times B$.
- Obecně $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$
- Zobrazení $f : A \to B$ odpovídá relaci $R_f \subseteq A \times B$ s vlastností, že pro libovolné $a \in A$ existuje právě jedno $b \in B$, tak že $(a, b) \in R_f$.
- **Skládání relací** $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$ se definuje předpisem

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C;\ \exists\, b \in B;\ (a, b) \in R,\ (b, c) \in S\}$$

  $S \circ R \subseteq A \times C$.
- $S \circ R \subseteq A \times C$, $T \subseteq C \times D$, pak platí $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$.
- $id_B \circ R = R = R \circ id_A$
- **Inverzní relace** R^{-1} k realci $R \subseteq A \times B$ se definuje jako $R^{-1} = \{(b, a); (a, b) \in R\}$. Platí $R^{-1} \subseteq B \times A$. Zřejmě $R_{f^{-1}} = R_f^{-1}$.

Vlastnosti relací:

Pokud $R \subseteq A \times A$, pak říkáme, že R je **relace na množině** A. Relace na množině A se nazývá:

(a) **reflexivní**, pokud $id_A \subseteq R$, tedy pokud pro $\forall a \in A$ platí $(a, a) \in R$;

(b) **symetrická**, pokud $R^{-1} = R$, tedy pokud $\forall a, b \in A;\ (a, b) \in R$, pak $(b, a) \in R$;

(c) **tranzitivní**, pokud $R \circ R \subseteq R$, tedy pokud $\forall a, b \in A;\ (a, b) \in R$ a $(b, c) \in R$, pak $(a, c) \in R$;

(d) **antisymetrická**, pokud $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$, tedy pokud $\forall a, b \in A;\ (a, b) \in R,\ (b, a) \in R$, pak $a = b$.

Relace R na množině A se nazývá **ekvivalence**, pokud je současně reflexivní, symetrická a tranzitivní.
Relace R na množině A se nazývá **uspořádání**, pokud je současně reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

3. Na množině $\{0, 1\}$ nalezněte všechny relace, které jsou:

   (a) reflexivní;

   (b) symetrické;

   (c) tranzitivní;

   (d) relace ekvivalence;

(e) symetrické a tranzitivní;

(f) symetrické a antisymetrické.

Totéž v případě jednoprvkové a prázdné množiny.

4. Na množině $\{1, 2, 3\}$ nalezněte všechny relace ekvivalence.

5. Je dána relace ρ na množině $\mathbb{N}$. Rozhodněte zda ρ je reflexivní, resp. symetrická, resp. antisymetrická, resp. tranzitivní relace, je-li pro $x, y \in \mathbb{N}$:

   (a) $x\rho y \Leftrightarrow x \cdot y$ je liché číslo;

   (b) $x\rho y \Leftrightarrow x, y$ jsou nesoudělná;

   (c) $x\rho y \Leftrightarrow y = x \vee y = 2x \vee y = 3x$;

   (d) $x\rho y \Leftrightarrow |x - y| = 3 \vee x = y$.

6. Je dána relace ρ na množině $\mathcal{P}(A)$, kde A je neprázdná konečná množina. Rozhodněte zda ρ je reflexivní, resp. symetrická, resp. antisymetrická, resp. tranzitivní relace, je-li pro $X, Y \in \mathcal{P}(A)$:

   (a) $X\rho Y \Leftrightarrow X \cup Y = A$;

   (b) $X\rho Y \Leftrightarrow X = \emptyset \vee X = A$;

   (c) $X\rho Y \Leftrightarrow X \cap Y = \emptyset$;

   (d) $Y\rho Y \Leftrightarrow$ množiny X, Y mají stejný počet prvků.

7. Na množině M je definována relace ρ. Rozhodněte, zda ρ je relací ekvivalence na M, je-li:

   (a) $M = \mathbb{Z};\ \rho = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ y = x \text{ nebo } y = x + 1\}$;

   (b) $M = \mathbb{R};\ \rho = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x - y \in \mathbb{Z}\}$;

   (c) $M = \mathbb{R};\ \rho = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ |x - y| \leq 1\}$;

   (d) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \rho = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N});\ (A - B) \text{ je konečná množina}\}$;

   (e) $M = \mathcal{P}(\mathbb{N});\ \rho = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N});\ (A \div B) \text{ je konečná množina}\}$;