Rozklady na třídy ekvivalence.

- Relace R je relace ekvivalence na množině A. Pro $a \in A$ je $R_a = \{b \in A;\ (a,b) \in R\}$ tzv. **třída** relace ekvivalence určená prvkem a.
- Množina $A \backslash R = \{R_a;\ a \in A\}$ se nazývá **faktorová množina** relace ekvivalence R na množině A.
- $f : A \to B$ je zobrazení, pak relace $J_f = \{(a_1, a_2);\ f(a_1) = f(a_2)\}$ je relací ekvivalence na množině A a nazývá se **jádro** zobrazení f.

1. Na množině $\mathbb{Z}$ je definována relace ρ. Dokažte, že ρ je ekvivalencí na $\mathbb{Z}$ a popište rozklad $\mathbb{Z} \backslash \rho$. Přitom pro $x, y \in \mathbb{Z}$ je:

   (a) $x\rho y \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z};\ y = x + 4k$;

   (b) $x\rho y \Leftrightarrow x^2 \equiv y^2 \pmod 7$;

   (c) $x\rho y \Leftrightarrow x^2 + 2x = y^2 + 2y$;

   (d) $x\rho y \Leftrightarrow 2|(x^2 - y^2)$.

2. Nalezněte jádra následujících zobrazení:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \lfloor x \rfloor$;

   (b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$;

   (c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x)$ je zbytek po dělení čísla x číslem n;

   (d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = \lfloor \frac{x}{n} \rfloor$.

   Popište přislušný rozklad.

3. Nechť R, S jsou relace na množině A. Rozhodněte, zda platí:

   (a) R, S reflexivní $\Rightarrow R \circ S$ reflexivní;

   (b) R, S symetrická $\Rightarrow R \circ S$ symetrická;

   (c) R, S tranzitivní $\Rightarrow R \circ S$ tranzitivní;

4. Dokažte, že pro libovolné relace $R, R_1, R_2 \subseteq A \times B, S \subseteq B \times C$ a $T \subseteq C \times D$ platí:

   (a) $(R^{-1})^{-1} = R$;

   (b) $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$;

   (c) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$;

   (d) $S \circ (R_1 \cup R_2) = (S \circ R_1) \cup (S \circ R_2)$;

   (e) $S \circ (R_1 \cap R_2) = (S \circ R_1) \cap (S \circ R_2)$;

   (f) $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$;

   (g) $(R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;

   (h) $S \circ R_1 - S \circ R_2 \subseteq S \circ (R_1 - R_2)$.

   Dokažte, že v (e) a (h) obecně neplatí rovnost. Zformulujte a dokažte vztahy (d) – (g) pro libovolná sjednocení resp. průniky.