Uspořádané množiny

- $(A, \leq)$ je **uspořádaná množina**, jestliže $\leq$ je relace uspořádání na množině A.
- Uspořádaná množina $(A, \leq)$ se nazývá **lineárně uspořádaná** (nebo **řetězec**), jestliže pro libovolná $a, b \in A$ platí buď $a \leq b$ nebo $b \leq a$.
- V uspořádané množině $(A, \leq)$ symbolem $a < b$ rozumíme $a \leq b, a \neq b$.

Příklady:

1. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ jsou lineárně uspořádané množiny (vhledem k uspořádání dle velikosti).
2. Pro libovolnou množinu A je $=$ uspořádání na A. Vzniklá uspořádaná množina se nazývá **protiřetězec**.
3. Uspořádanou množinu $(A, \leq)$ znázorníme graficky – prvky jsou body a úsečkou se spojí sousední prvky: $a, b \in A$ tak, že $a \leq b$ kdy neexistuje $c \in A$ tak, že $a < c < b$, píšeme $a \prec b$. Body $a, b \in A$ takové, že $a \prec b$ kreslíme tak, že a je níže než b. Tyto obrázky se nazývají **Hasseovy diagramy**.

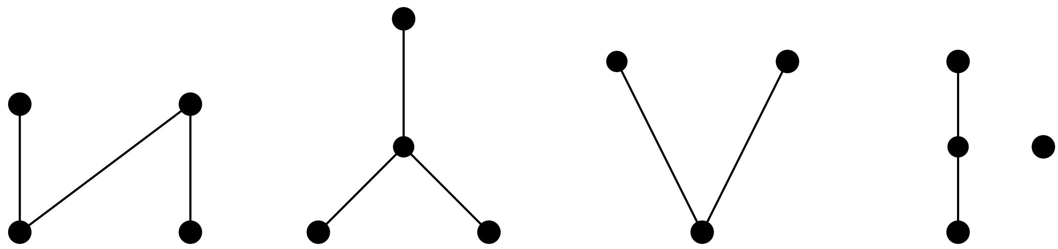
1. Rozhodněte, žda jsou následující relace uspořádání, resp. lineární uspořádání na $\mathbb{N}$. V případě kladné odpovědi naznačte Hasseův diagram uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \preceq)$.
   (a) $x \preceq y \Leftrightarrow x = y$;
   (b) $x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y$;
   (c) $x \preceq y \Leftrightarrow x < y$;
   (d) $x \preceq y \Leftrightarrow y = 4 \vee y = x$;
   (e) $x \preceq y \Leftrightarrow$ počet cifer čísla x je menší nebo roven počtu cifer čísla y;
   (f) $x \preceq y \Leftrightarrow x \not\equiv y \pmod 5$;
   (g) $x \preceq y \Leftrightarrow (x = y) \vee (2 \nmid x \wedge 2|y) \vee (2|x + y \wedge x < y)$.
2. Nechť A je libovolná množina. Dokažte, že $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ je uspořádaná množina. Sestrojte Hasseovy diagramy v případě:
   (a) $A = \emptyset$;
   (b) $A = \{a\}$;
   (c) $A = \{a, b\}$;
   (d) $A = \{a, b, c\}$.

- **nejmenší prvek** uspořádané množiny A je prvek a takový, že pro libovolné $x \in A$ platí $a \leq x$;
- **minimální prvek** uspořádané množiny A je takový prvek a, že neexistuje prvek $x \in A$ tak, že $x < a$.
- nejmenší prvek, pokud existuje, je jediný a je zároveň minimální. Minimálních prvků může být více.
- analogicky definujeme **největší** a **maximální prvek**.
- A je uspořádaná množina a $X \subseteq A$; prvek $a \in A$ je **horní závora** podmnožiny X, jestliže $x \leq a$ pro libovolné $x \in X$;
- prvek a je **supremum** podmnožiny X, jestliže je horní závorou X a pro libovolnou horní závoru b mn. X platí $a \leq b$;
- analogicky – **infimum** podmnožiny X je největší dolní závora.

3. Popište maximální a minimální prvky, resp. největší a nejmenší prvek množiny M s uspořádáním ρ:

   (a) $M = \{a, b, c\},\ \rho = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$
   (b) $M = \{a, b, c\},\ \rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$
   (c) $M = \{a, b, c, d\},\ \rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c)\}$
   (d) $M = \mathcal{P}(\{a, b\}),\ \rho = \subseteq$

4. Popište maximální a minimální prvky, resp. největší a nejmenší prvek, který mají tyto hasseovské diagramy:



5. Na množině $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ definujeme relaci R tak, že

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow (\exists\, n \in \mathbb{N})(y = n \cdot x).$$

   Dokažte, že R je uspořádání a sestrojte hasseovský diagram množiny (M, R). Uvažujte relaci R definovanou tímto vztahem na množině $\mathbb{N}$ a schematicky naznačte hasseovský diagram $(\mathbb{N}, R)$. Popište maximální, minimální, největší a nejmenší prvky těchto množin.

6. V předchozích příkladech diskutujte existenci superem a infim.