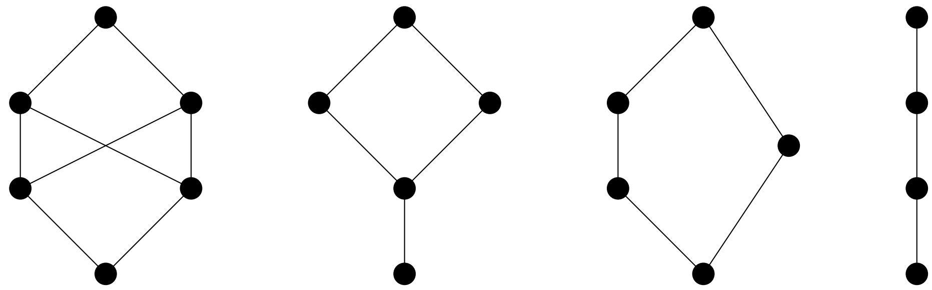
Svazy

- Uspořádaná množina, jejíž libovolná podmnožina má suprémum a infimum, se nazývá **úplný svaz**. Úplný svaz musí obsahovat nejmenší a největší prvek, protože musí obsahovat suprémum a infimum sebe sama.
- Uspořádaná množina A se nazývá **svaz**, pokud libovolná její neprázdná konečná podmnožina má suprémum i infimum (což je totéž jako požadavek, že libovolná dvouprvková podmnožina má suprémum a infimum).

1. Rozhodněte, které z těchto uspořádaných množin jsou svazy.



2. Rozhodněte, zda následující uspořádané množiny (M, R) jsou svazy, resp. úplné svazy:
   (a) $M = \mathcal{P}(\{A\})$, A je libovolná množina, R je $\subseteq$;
   (b) A nekonečná, M je množina všech konečných podmnožin A, R je $\subseteq$;
   (c) $M = \mathcal{P}(\{A\}) - \{\emptyset\}$, A je libovolná množina, R je $\subseteq$;
   (d) $M = \mathbb{N}$, R je $|$.

3. Nechť A je svaz. Dokažte, že pro libovolné $a, b, c \in A$ platí:
   (a) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$;
   (b) $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$.

Kombinatorika

Kombinatorické pravidlo součinu: Počet všech uspořádaných $k-$tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý n_2 způsoby (po výběru prvního), ... až $k-$tý člen n_k způsoby, je roven součinu $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Kombinatorické pravidlo součtu: Jsou-li $A_1,\ A_2, \ldots A_n$ konečné množiny, které mají $p_1,\ p_2, \ldots p_n$ prvků a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny sjednocené $(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_n)$ je roven $p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

4. Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

5. Ve škole je 10 různých předmětů a každý se učí nejvýše 1 hodinu denně. Kolikerým způsobem je možno sestavit rozvrh hodin na jeden den, je-li tento den 5 různých předmětů.

6. Kolik různých čtyřciferných čísel lze napsat číslicemi 0, 1, 4, 7, 9, aniž by se čísla opakovala? Kolik z nich je sudých?

7. Určete počet všech trojciferných přirozených čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

8. Určete, kolika způsoby lze na šachovnici 8×8 vybrat dvě různobarevná políčka tak, aby obě neležela v téže řadě ani v témže sloupci.

Variace bez opakování: k-členná variace z n prvků je **uspořádaná** k-tice z těchto prvků tak, že se každý v ní vyskytuje **nejvýše jednou**.

Počet $V_k(n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V_k(n) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

kde $n!$ je **faktoriál**. $0! = 1$ je definováno.

9. Ve škole je 10 různých předmětů a každý se učí nejvýše 1 hodinu denně. Kolikerým způsobem je možno sestavit rozvrh hodin na jeden den, je-li tento den 5 různých předmětů.

10. Kolik různých čtyřciferných čísel lze napsat číslicemi 0, 1, 4, 7, 9, aniž by se čísla opakovala? Kolik z nich je sudých?

11. K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných pruhů, jsou k dispozici látky barvy bílé, červené, modré, zelené a žluté.

    (a) Určete počet vlajek, které lze z látek těchto barev sestavit [60]
    (b) Kolik z nich má modrý pruh? [36]
    (c) Kolik jich má modrý pruh uprostřed? [12]
    (d) Kolik jich nemá uprostřed červený pruh? [48]

12. Určete počet prvků, z nichž lze utvořit

    (a) 240 dvoučlenných variací;
    (b) dvakrát více čtyřčlenných variací než tříčlenných variací.

13. V biochemické laboratoři se rozhodli prozkoumat účinost pěti různých látek, které měly být podávány pokusným myším vždy po dvou. Každý pokus byl proveden na jedné myši. Kolik myší bylo zapotřebí, přičemž chtěli zjistit, jestli záleží na pořadí léků?

Variace s opakování: k-členná variace s opakováním z n prvků je **uspořádaná** k-tice z těchto prvků tak, že se každý v ní vyskytuje **nejvýše k-krát**.

Počet $V'_k(n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V'_k(n) = n^k,$$

.

14. Určete počet všech trojciferných čísel.

15. Kolik různých vrhů může nastat současně dvěma různě barevnými hracími kostkami?

16. Pokladna má zámek s pěti kotouči na nichž jsou číslice 0,1,...9. Zámek se otevře jestliže se nastaví pěticiferné číslo, které je heslem. Pokladník zapomene heslo a pamatuje si pouze číslici na místě desítek. Jak dlouho by mu trvalo vyzkoušet všechny možnosti, jestliže na nastavení jedné pětice potřebuje 3,6 s.

Permutace bez opakování: Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků neboli uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **právě jednou**.

$$P(n) = V_n(n) = n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$$

17. Určete počet všech pěticiferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu je každá z číslic 0,1,3,4,7. Kolik z těchto čísel je
    (a) dělitelných šesti;
    (b) větších než 70134?

18. Určete součet všech čtyřciferných čísel sestavených z číslic 1,3,5,7 bez opakování číslic.

Permutace s opakování: Permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice ustavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje **alespoň** jednou.

Pozn.: Označme $k_1, k_2, \dots k_p$ kolikrát se každý z daných prvků opakuje.

$$P'(k_1, k_2, \dots k_p) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_p)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_p!}$$

$$P'(k; n-k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

19. Kolik různých slov (majících i nemajících smysl) lze vytvořit z písmen slova
    (a) PARDUBICE
    (b) PRAHA
    (c) PROKOP
    (d) MISSISSIPPI

20. BRIDŽ: 52 karet se rozdá mezi 4 hráče tak, že každý má 13 karet. Kolik různých rozdání existuje?

21. Kolika způsoby je možno rozdělit 9 pracovníků na 3 pracoviště, jestliže na první jsou zapotřebí čtyři pracovníci, na druhé tři a na třetí dva.

Kombinace bez opakování: k-členná kombinace z n prvků je **neuspořádaná** k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se každý vyskytuje **nejvýše jednou**.

$$C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\binom{n}{k}$ ... kombinační číslo

22. Pět přátel se loučí
    (a) kolik stisků ruky si navzájem vymění;
    (b) kolik stisků ruky si vymění, jestliže se loučí jen tři?

23. V lavici sedí pět chlapců z nichž dva bratři chtějí sedět vedle sebe. Kolikrát můžeme chlapce přesadit?

24. Je dáno n ($n > 2$) bodů v rovině z nichž žádné 3 neleží v přímce a žádné 4 na kružnici. Kolik kružnic je těmito body určeno a kolik jich prochází každým z bodů?

25. Na mistrovství světa v ledním hokeji bylo vysláno 22 hráčů z toho 12 útočníků, 8 obránců a 2 brankáři. Nepřihlížejme k tomu, že např. obránce může hrát na levé nebo pravé straně obrany. Kolik různých sestav může trenér z těchto hráčů sestavit?

26. V podniku pracuje 18 můžů a 16 žen. Kolika způsoby lze vybrat 7 zaměstnanců tak, aby to byli
    (a) 4 muži a 3 ženy;

(b) 6 můžů a 1 žena.

27. V soutěžní porotě je 10 znalců. Při hlasování hlasovalo 7 členů pro návrh a 3 proti. Kolika způsoby to mohlo nastat?

Kombinace s opakování: k-člená kombinace s opakováním z n prvků je **neuspořádaná** k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše $k-$krát.

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k} = C_k(n+k-1)$$

28. Existují 4 krevní skupiny – A, B, AB, 0. Určete počet všech možných rozdělení 10 osob podle uvedených krevních skupin.