PRAVDĚPODOBNOST A STATISTIKA
2. PŘEDNÁŠKA

Blanka Šedivá

Katedra matematiky
Fakulta aplikovaných věd
Západočeská univerzita v Plzni

Podmíněná pravděpodobnost

Nechť $A, B \in \mathbb{A}$ jsou jevy a nechť $P(B) > 0$.
Podmíněnou pravděpodobnost jevu A za podmínky jevu B definujeme vztahem

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

. . . .

- je-li $A \cap B = \emptyset$, pak $P(A|B) = 0$
- $P(A|B) \neq P(B|A)$
- $P(A|B)\ P(B) = P(B|A)\ P(A)$

Příklad

Náhodný pokus je hod kostkou.

- jev A: na kostce padlo číslo „1“nebo „2“
- jev B: na kostce padlo číslo sudé („2“,„4“,„6“)
- jev $A \cap B$: na kostce padlo číslo „2“
- $P(A) = 1/3,\ P(B) = 1/2,\ P(A \cap B) = 1/6$
- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = 1/3,$
- $P(B|A) = 1/2$

Závislost a nezávislost jevů

Jevy $A, B \in \mathbb{A}$ se nazývají nezávislé, jestliže platí

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

Jevy, které nejsou nezávislé, jsou závislé.

. . . .

Následující tvrzení jsou ekvivalentní pro $P(A) \neq 0$ a $P(B) \neq 0$

A a B jsou nezávislé	$\overline{A}$ a $\overline{B}$ jsou nezávislé
$P(B\|A) = P(B)$	$P(A\|B) = P(A)$
$\overline{A}$ a B jsou nezávislé	A a $\overline{B}$ jsou nezávislé

Nezávislost vice jevů

Nechť $\{A_i,\, i \in I\}$ je množina jevů. Jevy této množiny se nazývají nezávislé, jestliže pro každé přirozené n a každou podmnožinu $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \subset I$ platí

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}) = P(A_{i_1})\, P(A_{i_2})\, \ldots P(A_{i_n})$$

. . . .

- Rovnost musí platit pro všechny vybrané dvojice, trojice,. . . .
- Párová nezávislost nepostačuje k nezávislosti všech jevů.

Příklad

Náhodný pokus je hod 2 mincemi.

- $\Omega = \{\omega_1 = LL, \omega_2 = LR, \omega_3 = RL, \omega_4 = RR\},\ P(\omega_i) = 1/4$
- $A_1 = \{\omega_1, \omega_2\},\ P(A_1) = 1/2$
- $A_2 = \{\omega_1, \omega_3\},\ P(A_2) = 1/2$
- $A_3 = \{\omega_1, \omega_4\},\ P(A_3) = 1/2$
- jevy A_1 a A_2 jsou nezávislé, protože $A_1 \cap A_2 = \{\omega_1\}$ a
$$P(A_1 \cap A_2) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2$$
jevy A_1 a A_3 jsou nezávislé, protože $A_1 \cap A_3 = \{\omega_1\}$ a
$$P(A_1 \cap A_3) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2$$

.

jevy A_2 a A_3 jsou nezávislé, protože $A_2 \cap A_3 = \{\omega_1\}$ a

$$P(A_2 \cap A_3) = 1/4 = 1/2 \cdot 1/2$$

jevy A_1,A_2 a A_3 jsou závislé, protože $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{\omega_1\}$ a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$$

Příklad o zapomenutém deštníku

- Roztržitý profesor zapomíná v obchodě deštník s ppstí. $\frac{1}{4}$.
- Postupně navštívil tři obchody a cestou domů zjistí, že deštník nemá.
- Určete ppsti., že deštník zapomněl v jednotlivých obchodech.
- !!Deštník může být zapomenut v obchodě pouze tehdy, pokud jej profesor do obchodu donese.
- Jevy A_i: deštník zapomněl v i-tém obchodě (jevy jsou disjunktní).
- Jev $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$: děštník v některém z obchodů zapomněl.
- Jevy $A_i|A$: deštník zapomněl v i-tém obchodě za podmínky, že deštník v některém obchodě zapomněl.

Příklad o zapomenutém deštníku - řešení

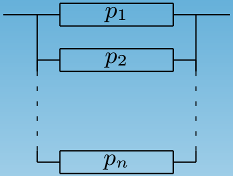
- $P(A_1) = P(A_1 \cap A) = \frac{1}{4}$
- $P(A_2) = P(A_2 \cap A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$
- $P(A_3) = P(A_3 \cap A) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$
- $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{37}{64}$
- $P(A_i|A) = \frac{P(A_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A_i)}{P(A)}$
- $P(A_1|A) = \frac{16}{37}$ $\qquad P(A_2|A) = \frac{12}{37}$
- $P(A_3|A) = \frac{9}{37}$

Spolehlivost paralelně a sériově řazených nezávislých prvků

- Nechť $P_1, P_2, ..., P_n$ jsou prvky spojené sériově nebo paralelně.
- Nechť $p_1, p_2, ...p_n$ jsou pravděpodobnosti poruch těchto prvků.
- Předpokládáme, že poruchy jednotlivých prvků

  jsou na sobě nezávislé.
- Pravděpodobnost poruchy celého systému značíme P.
- Spolehlivost celého systému značíme R a platí $R = 1 - P$.

Paralelně řazené prvky



- $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i$
- $R = 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$

Sériově řazené prvky

- $P = 1 - (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot\dots\cdot(1-p_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$
- $R = (1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot\dots\cdot(1-p_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$

Věta o úplné pravděpodobnosti

- Nechť $B_1, B_2, \dots$ tvoří úplný systém disjunktních jevů,
- nechť $P(B_i) > 0$ pro $i = 1, 2, \dots$ a
- nechť jev A je libovolný jev příslušný témuž náhodnému pokusu.

Pak platí

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)\,P(B_i)$$

. . . .

Důkaz:
Použiji definice podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ a využiji vlastnosti pravděpodobnosti pro sjednocení disjunktních jevů $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$.

Příklad

- Na třech výrobních linkách jsou vyráběny identické výrobky.
- První výrobní linka zajišťuje 60% produkce a ppst. vyrobení vadného výrobku je 1%,
- druhá výrobní linka zajišťuje 30% produkce a ppst. vyrobení vadného výrobku je 2% a
- třetí výrobní linka zajišťuje 10% produkce a ppst. vyrobení vadného výrobku je 3%.
- Určete ppst., že náhodně vybraný výrobek bude vadný.

Řešení

Označme

- jev B_i výrobek je výrobek na i-té lince
- jev A výrobek je vadný

- $P(B_1) = 0.6,\ P(B_2) = 0.3,\ P(B_3) = 0.1$
- $P(A|B_1) = 0.01$
- $P(A|B_2) = 0.02$
- $P(A|B_3) = 0.03$

a podle věty o úplné ppsti platí

- $P(A) = 0.6 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.03 = 0.015$

O výstředním žalářníkovi

- V žaláři je vězeň odsouzený k smrti.
- Výstřední žalářník však dá vězni šanci. Přinese 12 černých a 12 bílých kuliček. Pak mu dá dvě prázdné urny a sdělí mu, že zítra přijde kat a náhodně si vybere jednu urnu a z ní náhodně vybere jednu kuličku.

  Bude-li bílá, dostane vězeň milost.
- Jak má vězeň rozdělit kuličky, aby maximalizoval ppst. udělení milosti.

Řešení

Označme

- jev B_j kat vybral j-tou urnu $(j = 1, 2)$
- n počet kuliček v první urně
- i počet bílých kuliček v první urně

- jev A kat vytáhl bílou kuličku, $P(A_{(n,i)})$ ppst. vytažení bílé kuličky

Pak platí

- $P(B_1) = 1/2,\ P(B_2) = 1/2$
- $P(A|B_1) = \frac{i}{n},\ P(A|B_2) = \frac{12-i}{24-n}$
  a podle věty o úplné ppsti platí

- $P(A_{(n,i)}) = \frac{1}{2}(\frac{i}{n} + \frac{12-i}{24-n})$

Hledám maximum funkce $P(A_{(n,i)})$ pro všechna n a i.

- $P(A_{(n,i)}) < P(A_{(n,n)})$ pro $n = 1, 2, \ldots, 11,\ i = 0, 1, \ldots, n-1$
- $P(A_{(n,n)}) < P(A_{(1,1)})$ pro $n = 2, 3, \ldots, 12$

- maximální ppst vězeň dosáhne pro $A_{(1,1)}$
- $P(A_{(1,1)}) = \frac{17}{23} = 73,91\%$

Bayesova věta o inverzní pravděpodobnosti

- Nechť $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tvoří úplný systém disjunktních jevů,
- nechť $P(B_i) > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ a
- nechť jev A je libovolný jev příslušný témuž náhodnému pokusu takový, že $P(A) > 0$.

Pak platí pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\,P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\,P(B_i)}$$

. . . .

Důkaz:
Použiji definici podmíněné pravděpodobnosti a výsledky věty o úplné pravděpodobnosti.

Příklad

- Na třech výrobních linkách jsou vyráběny identické výrobky.
- První výrobní linka zajišťuje 60% produkce a ppst. vyrobení vadného výrobku je 1%, druhá výrobní linka zajišťuje 30% produkce a ppst. vyrobení vadného výrobku je 2% a třetí výrobní linka zajišťuje 10% produkce a ppst. vyrobení vadného výrobku je 3%.
- Nechť výrobek je vadný.
- Určete ppst., že náhodně vybraný vadný výrobek pochází z $1.$, $2.$ resp.$3.$ linky.

Řešení

- jev B_i výrobek je výrobek na i-té lince
- jev A výrobek je vadný
- $P(A) = 0.6 \cdot 0.01 + 0.3 \cdot 0.02 + 0.1 \cdot 0.03 = 0.015$

  podle inverzní věty platí
- $P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)\,P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.6 \cdot 0.01}{0.015} = 0.4$
- $P(B_2|A) = \frac{0.3 \cdot 0.02}{0.015} = 0.4$
- $P(B_3|A) = \frac{0.1 \cdot 0.03}{0.015} = 0.2$

Příklad z lékařské diagnostiky

- Označme jev CH, že náhodně vybraná osoba má sledovanou chorobu. $P(CH) = 0.5\%$ (prevalence nebo incidence choroby).
- Předpokládejme, že určitý test na odhalení choroby má následující výsledky.
  - Má-li osoba sledovanou chorobu, poskytne test pozitivní výsledek v 95% případů (senzitivita testu).
  - Nemá-li osoba sledovanou chorobu, poskytne test negativní výsledek v 90% případů (specificita testu).
- Jestliže u náhodně vybrané osoby byl výsledek testu pozitivní, jaká je ppst., že skutečně má sledovanou chorobu ?

Řešení

Označme

- jev $+$: výsledek testu byl pozitivní, jev - : byl negativní

Známe ppsti

- $P(+|CH) = 0.95$:
  osoba, která má danou chorobu, má pozitivní výsledek testu
- $P(-|CH) = 0.05$:

  osoba, která má danou chorobu, má negativní výsledek testu
- $P(+|\overline{CH}) = 0.10$:
  osoba, která nemá danou chorobu, má pozitivní výsledek testu
- $P(-|\overline{CH}) = 0.90$:
  osoba, která nemá danou chorobu, má negativní výsledek testu

Podle věty o úplné ppsti platí

$$P(+) = 0.95 \cdot 0.005 + 0.10 \cdot 0.995 = 0.10425$$

a podle Bayesovy věty platí

$$P(CH|+) = \frac{P(+|CH)\,P(CH)}{P(+)} = \frac{0.95 \cdot 0.005}{0.10425} \doteq 4.56\%$$

a dále platí

$$P(CH|-) = \frac{P(-|CH)\,P(CH)}{P(-)} = \frac{0.05 \cdot 0.005}{1 - 0.10425} \doteq 0.03\%$$

$$P(\overline{CH}|+) = \frac{P(+|\overline{CH})\,P(\overline{CH})}{P(+)} = \frac{0.10 \cdot 0.995}{0.10425} \doteq 95.44\%$$

$$P(\overline{CH}|-) = \frac{P(-|\overline{CH})\,P(\overline{CH})}{P(-)} = \frac{0.90 \cdot 0.995}{1 - 0.10425} \doteq 99.97$$