Podmíněná pravděpodobnost, nezávislost

Úloha 1: Již dříve jsme určili, že pravděpodobnost výhry ve sportce v I. pořadí je $1/\binom{49}{6} = 1/13\,983\,816 \doteq 0{,}000\,000\,072$. Je poměrně obtížné si tak malou pravěpodobnost představit.
a) Porovnejte tuto pravděpodobnost s pravděpodobností padnutí n líců při hodu n mincemi, tj. určete, kolika mincemi musíme hodit, aby byly obě pravděpodobnosti přibližně stejné.
b) Porovnejte tuto pravděpodobnost s pravděpodobností padnutí n šestek při hodu n kostkami, tj. určete, kolika kostkami musíme hodit, aby byly obě pravděpodobnosti přibližně stejné.

[a) $n = 24$, b) $n = 9$]

Úloha 2: Ve Sportce získáme výhru v V. pořadí, pokud se nám podaří uhodnout libovolná tři čísla ze šesti tažených.
a) Jaká je pravděpodobnost výhry v V. pořadí při jednom vsazení?
b) S jakou pravděpodobností získáme během jednoho roku alespoň jednou výhru v V. pořadí, budeme-li sázet každý týden jednu sázenku.?

[a) 0,01765, b) 0,604]

Úloha 3: Určete pravděpodobnost, že při opakovaných hodech kostkou padne šestka poprvé
a) ve třetím hodu, b) v pátém hodu.

[a) 0,11574, b) 0,08038]

Úloha 4: Určete pravděpodobnost, že při pěti hodech mincí padne rub
a) právě dvakrát, b) nejvýše jednou, c) alespoň dvakrát.

[a) 0,3125, b) 0,1875, b) 0,8125]

Úloha 5: Určete pravděpodobnost, že při 10 hodech kostkou
a) nepadne žádná šestka, b) padne alespoň jedna šestka, c) padnou právě tři šestky,
d) padnou nejvýše tři šestky.

[a) 0,16151, b) 0,83849, c) 0,15505, d) 0,93027]

Úloha 6: V osudí jsou 3 bílé a 7 černých koulí. Vytáhneme 5-krát po sobě jednu kouli, zaznamenáme její barvu a *vrátíme* ji zpět do osudí. Určete pravděpodobnost, že vytáhneme:
a) vždy bílou kouli, b) právě dvakrát bílou kouli, c) alespoň 3-krát bílou kouli.

[a) 0,00243, b) 0,3087 c) 0,16308]

Úloha 7: V osudí je 5 koulí, z nichž některé jsou bílé a některé černé. Provedli jsme 24 tahů jedné koule s *vracením* (po každém tahu vrátime kouli zpět do osudí), během nichž jsme 8-krát zaznamenali vytažení bílé koule. Při jakém složení osudí je tento výsledek nejpravděpodobnější?

[Nejpravděpodobněji je v osudí 1 bílá a 4 černé koule.]

Úloha 8: Do třídy 1.A chodí 10 chlapců a 20 dívek, z toho jsou 3 chlapci se jménem Jakub a 2 dívky se jménem Katka. Martina tvrdí, že ráno potkala někoho ze třídy 1.A.
a) Jaká je pravděpodobnost, že potkala Jakuba?
b) Jaká je pravděpodobnost, že potkala Katku?
Martina upřesní svoji výpověd, tvrdí, že potkala některého chlapce ze třídy 1.A. Jak se změní po vyslovení této informace odpovědi na otázky a), b)?

[a) 0,125, b) 0,375]

Úloha 9: Finále soutěže Miss se účastní dvanáct dívek. Podle předběžných anket se zdá, že největší šance zvítězit mají dívky Kateřina, Lucie a Markéta. Kateřině je předpovídáno vítězství s pravděpodobností 0,2, Lucii s pravděpodobností 0,1 a Markétě s pravděpodobností 0,3. Těsně před začátkem finále se však Kateřina rozhodne odstoupit ze soutěže. Jak se změní pravděpodobnosti vítězství Lucie a Markéty?

[viz řešené úlohy]

Úloha 10: Náš kamarád hodí dvěma kostkami a oznámí nám, že na kostkách padla různá čísla. Jaká je po obdržení této informace pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padla šestka. (Určete podmíněnou pravděpodobnost, že alespoň na jedné kostce padla šestka, za podmínky, že na kostkách padla různá čísla.)

[1/3]

Úloha 11: Z balíčku 32 tzv. „mariášových karet“ vytáhneme postupně dvě karty, přičemž kartu po vytažení nevracíme zpět do balíčku. Jaká je pravděpodobnost, že obě vytažené karty budou esa? Balíček Mariášových karet obsahuje čtyři esa.

[0,012097]

Úloha 12: Řešte předchozí úlohu pro případ, že první taženou kartu vrátíme zpět do balíčku. Porovnejte pravděpodobnosti vytažení dvou es pro původní i upravené zadání úlohy.

[0,015625]

Úloha 13: Výstřední profesor matematiky zkouší každou hodinu jednoho chlapce a jednu dívku. Přitom používá následující metodu: Má připravenu krabici, která obsahuje 3 černé lístky s velmi obtížnými úlohami a 6 bílých lístků se snadnými úlohami. Každý ze studentů si musí se zavřenýma očima jeden z lístků vylosovat. Vylosované lístky se již do krabice nevrací. Ke zkoušení byli vybráni studenti Jirka a Petra.

a) Jestliže Jirka losuje jako první a vytáhne si černý lístek, jaká je pravděpodobnost, že si černý lístek vytáhne i Petra?

b) Jestliže Jirka losuje jako první a vytáhne si černý lístek, jaká je pravděpodobnost, že si Petra vytáhne bílý lístek?

c) Jirka je zamilovaný do Petry a proto je ochoten přijmout obtížnou úlohu, jen aby zvýšil šance Petry na získání snadné úlohy. Měl by losovat jako první, nebo nechat Petru, aby jako první losovala ona?

[a) 5/8, b) 3/4, c) je to jedno (viz řešené úlohy)]

Úloha 14: V žaláři je vězeň odsouzený k trestu smrti. Výstřední žalářník však dá vězni šanci. Přinese mu 12 černých a 12 bílých kuliček. Pak mu dá dvě prázdné urny. Sdělí mu, že zítra příjde kat, náhodně si vybere jednu urnu a z ní náhodně vybere jednu kuličku. Bude-li bílá, dostane vězeň milost. V opačném případě bude ortel neprodleně vykonán. Jak má vězeň rozdělit kuličky do uren, aby maximalizoval pravděpodobnost svého osvobození?

[viz řešené úlohy]

Úloha 15: Budeme házet bílou a černou kostkou. Jev A značí „padne součet 4“, B značí „padne součet 7“ a jev C značí „na bílé kostce padne 1“. Rozhodněte, jsou-li jevy A a C nezávislé a dále rozhodněte, jsou-li také nezávislé jevy B a C.

[A a C nejsou nezávislé, B a C jsou nezávislé.]

Úloha 16: Nechť A_i, kde $i = 2, 3, \ldots, 12$, značí jev „při hodu bílou a černou kostkou padne součet i“ a jev B značí „na bílé kostce padne 1“. Rozhodněte, které z dvojic jevů A_i a B jsou nezávislé.

[Pouze A_7 a B jsou nezávislé.]

Úloha 17: Hodíme dvěma mincemi – zlatou a stříbrnou. Jev A značí „na obou mincích padne stejná strana“, jev B značí „na stříbrné minci padl líc“. Rozhodněte, jsou-li jevy A, B nezávislé a určete $P(A \,|\, B)$ a $P(B \,|\, A)$.

[jsou nezávislé, 1/2, 1/2]

Úloha 18: Roztočíme ruletu. Jev C značí „padne číslo 7“, jev D značí „padne liché číslo“. Rozhodněte, jsou-li jevy C, D nezávislé a určete $P(C \,|\, D)$ a $P(D \,|\, C)$.

[nejsou nezávislé, 1/18, 1]

Úloha 19: Házíme dvěma hracími kostkami, bílou a černou. Jev A znamená, že na bílé kostce padlo liché číslo, jev B znamená, že na černé kostce padlo sudé číslo, jev C znamená, že součet obou čísel je lichý. Jsou náhodné jevy A, B, C nezávislé? Jsou náhodné jevy A, B, C po dvou nezávislé?

[nejsou nezávislé, jsou po dvou nezávislé]

Úloha 20: Hráč má v kapse dvě mince – pravou a falešnou (obě strany falešné mince jsou lícové).
a) Hráč náhodně vytáhne z kapsy jednu minci, vyhodí ji a padne líc. Jaká je pravděpodobnost, že se jedná o pravou minci?
b) Hráč ještě jednou hodí toutéž mincí a znovu padne líc. Jaká je nyní pravděpodobnost, že se jedná o pravou minci?

[a) 1/3, b) 1/5]

Úloha 21: Na výrobku se objevují tři druhy vad – vada 1. druhu s pravděpodobností 0,1, vada 2. druhu s pravděpodobností 0,05 a vada 3. druhu s pravděpodobností 0,02. Jsou-li výskyty vad všech tří druhů nezávislé jevy, jaká je pravděpodobnost, že výrobek bude bez vady?

[0,8379]

Úloha 22: Zařízení se skládá z bloků a_1, a_2 a a_3, které jsou nezávisle na sobě provozuschopné s pravděpodobnostmi 0,95, 0,90 a 0,85. Přitom jednotlivé bloky jsou zapojeny
a) sériově, tj. všechny tři bloky jsou umístěny za sebou v jedné větvi,
b) paralelně, tj. každý blok je umístěn samostatně v jedné větvi.
S jakou pravděpodobností zařízení funguje? (Zařízení funguje, jestliže alespoň jednou větví prochází elektrický proud.)

[a) 0,72675, b) 0,99925]

Úloha 23: Zařízení se skládá z bloků a_1, a_2 a a_3, které jsou nezávisle na sobě provozuschopné s pravděpodobnostmi 0,95, 0,90 a 0,85. Větve a_1 a $a_2 a_3$ jsou zapojeny vedle sebe (paralelně) a bloky a_2 a a_3 ve druhé větvi za sebou (sériově). S jakou pravděpodobností zařízení funguje? (Zařízení funguje, jestliže alespoň jednou větví prochází elektrický proud.)

[0,988]

Úloha 24: Ve třech osudích jsou bílé a černé koule. V 1. osudí jsou 2 bílé a 3 černé koule, ve 2. osudí jsou 3 bílé a 4 černé koule a ve 3. osudí je 5 bílých koulí. Z náhodně zvoleného osudí vytáhneme jednu kouli. Jaké je pravděpodobnost, že
a) vytažená koule bude bílá (jev A),
b) tato koule byla tažena z 1. osudí (jev $B_1 \mid A$),
c) tato koule byla tažena ze 2. osudí (jev $B_2 \mid A$),
d) tato koule byla tažena ze 3. osudí (jev $B_3 \mid A$)?

[a) 0,60952, b) 0,21875, c) 0,234375, d) 0,546875]

Úloha 25: Adam sejme tři karty z dobře promíchaného balíčku 32 tzv. „mariášových karet“. Břetislav, neví, jaké karty Adam sejmul a pokouší se odhadnout alespoň jejich barvu. Adam mu dovolí si jednu z jeho tří karet vybrat a podívat se na její barvu. Břetislav tedy náhodně vybere jednu ze tří karet, které drží Adam v ruce a zjistí, že je červená. Jaká je po obdržení této informace pravděpodobnost, že
a) všechny karty, které má Adam v ruce jsou červené,
b) Adam má v ruce dvě červené karty a jednu kartu jiné barvy,
c) Adam má v ruce jednu červenou kartu a dvě karty jiné barvy,
d) Adam nemá v ruce ani jednu červenou kartu?

[a) 0,04516, b) 0,36129, c) 0,59355, d) 0]

Úloha 26: Předpokládejme, že z rozsáhlých lékařských výzkumů víme, že že ve sledované populaci má rakovinu 0,5% lidí. Test, kterým se rakovina zjišťuje má *senzitivitu* 95%, tj. jestliže má testovaná osoba rakovinu, potom je výsledek testu v 95% případů pozitivní a *specificitu* 95%, tj. jestliže testovaná osoba rakovinu nemá, potom je výsledek testu v 95% případů negativní.
a) Pacient byl otestován a výsledek testu byl pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že pacient má rakovinu?
b) Pacient byl otestován a výsledek testu byl negativní. Jaká je pravděpodobnost, že pacient nemá rakovinu?

[a) 0,087156, b) 0,999736]